

橢圓形淺堆에 대한 PCGM과 拋物形近似式 數值模型比較 Comparison of PCGM and Parabolic Approximation Numerical Models for an Elliptic Shoal

徐承男* · 延泳鎮**

Seung Nam Seo* and Young Jin Yeon**

要 旨 : Berkhoff 등(1982)의 水理實驗 結果를 사용하여 PCGM과 拋物形近似式(PA) 數值模型의 精密度와 計算效率를 比較하였다. 두 模型 結果는 水理實驗의 實測値와 잘 附合되었으나 比較적 波高가 큰 淺堆 뒷편의 일부 斷面에서는 PCGM模型 結果에 비해 PA模型 結果가 實驗値에 가까운 것으로 나타났다. PA模型은 淺海域의 넓은 지역에 대한 波浪變形을 豫測하는 데 유용한 模型이나 反射波를 無視할 수 있는 경우에만 適用 可能하다. 한편 緩傾斜 波浪式으로부터 직접 差分化하여 反射波를 考慮할 수 있는 PCGM模型의 計算效率를 增大시킬 필요가 있다. PA模型 結果를 PCGM模型의 初期 入力條件으로 사용함으로써 약 40%의 計算時間 減少를 가져왔다.

Abstract □ By use of laboratory experiment data set for an elliptic shoal by Berkhoff *et al.* (1982), both accuracy and performance tests of numerical results between PCGM (Preconditioned Conjugate Gradient Method) and PA(Parabolic Approximation) are compared. Although both results show good agreement with the experimental data, the PA model gives better reproduction of the relatively high amplitudes in the section 4-5 downwave of the shoal, in comparison with the PCGM. The PA model has been proved to be a useful tool for predicting wave transformations in large shallow water region, but it can be applied only to the case of negligible reflection. On the other hand, there is a need to improve the computational efficiency of the PCGM model which is a finite difference scheme directly derived from the mild slope equation and can handle reflection. By taking the results of the PA model as an input data of the PCGM, the CPU time can be reduced by about 40%.

1. 緒 論

淺海域의 波浪變形을 계산하기 위해 緩傾斜波浪式을 직접 差分化하여 反復技法으로 계산하는 PCGM과 반사파를 無視하고 진행파만을 계산하는 拋物形近似式의 結果를 橢圓形淺堆의 水理實驗 結果(Berkhoff 등, 1982)와 比較하였다. 本 論文의 目的은 두 방법을 동일한 入力條件에서 직접 比較함으로써 각 方法의 精密度와 計算時間을 分析하고자 한다. 複雜한 地形인 淺堆등과 構造物이 존재하는 지역에서도 사용할 수 있는 PCGM에 比較적 精밀한 初期條件을 使用함으로써 計算時間을 短縮하기 위해 拋物形近似式의 結果를

利用하려는 것이 또 다른 目的이다. 既存의 많은 結果(Kirby와 Dalrymple, 1984; Yoo와 O'Connor, 1988; Mei와 Liu, 1993; 유, 1993; 徐 등, 1994)에서 밝힌 바와 같이 淺堆實驗은 比較적 非線形性이 뚜렷하므로 本 논문에서는 非線形模型만을 사용하였다. 言及된 두 數值模型은 格子點의 수가 달라 解像度(resolution)에 差異가 있으며 사용된 非線形 波浪分散式이 相異함으로 이에 따른 差異도 豫想된다. 따라서 本 論文에서는 216×201개의 格子點으로 構成된 格子網을 사용하고 非線形 波浪分散式(Kirby와 Dalrymple, 1986)으로부터 波數를 계산하였다. 拋物形近似式 模型은 같은 精密度의 PCGM 模型에 비해 계산속도가 대단

*한국해양연구소 해양공학연구부 (Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan 425-600, Korea)

**성균관대학교 한국해양연구소 학연 박사과정 (Sung Kyun Kwan University-KORDI Joint Graduate Program on Coastal and Ocean Engineering)

히 빠르다. 따라서 포물형근사식 모델을 먼저 비교하였다. 가장 精密한 模型으로 알려진 Kirby(1986)의 포물형근사식 模型結果(87×81개 격자점)를 徐(1991)의 模型 결과와 비교한 후 격자점을 위에 言及한 갓수로 늘려 계산한 結果를 비교하였다. 마지막으로 포물형근사식 模型과 PCGM 模型의 結果를 相互比較하고 포물형근사식 模型의 結果를 PCGM 模型의 初期條件으로 사용한 結果를 圖示하고 그 特性을 分析하였다.

2. 方程式의 定式化

緩傾斜 波浪式에 대한 拋物形近似式 模型과 PCGM 模型의 支配方程式은 相異하나 이 節에서는 두 模型에 共通되는 방정식을 記述하고 상이한 식은 제 3절에서 다루고자 한다. 時間成分을 分離한 速度포텐셜 $\hat{\phi}(x, y)$ 로 표시된 緩傾斜波浪式을 $\hat{\phi}(x, y) = \hat{\phi}\sqrt{CC_g}$ 를 이용하여 變數變換한 Helmholtz 식 (1)을 支配方程式으로 사용한다. 座標系는 入射波浪의 進行方向을 x 축의 陽의 方向으로 定한다.

$$\nabla^2 \hat{\phi} + \kappa^2 \hat{\phi} = 0, \quad (1)$$

$$\text{여기서 變換波數인 } \kappa^2 = k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}},$$

$$\text{波速 } C = \frac{\sigma}{k}, \text{ 群速度 } C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \text{로}$$

定義된다.

그리고 h 는 水深이고 σ 는 角周波數이다.

角周波數와 水深과 波數의 關係식은 非線形 波浪分散式으로부터 구한다. 식 (2)는 Kirby와 Dalrymple (1986)이 提示한 식으로 深海로부터 淺海까지 全 海域에 걸쳐 비선형파랑의 波數를 계산할 수 있게 考案되었다.

$$\sigma^2 = gk [1 + (ak)^2 F_1 \tanh^5 kh] \tanh[kh + ak F_2] \quad (2)$$

$$F_1 = \frac{\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh}{8 \sinh^5 kh}$$

$$F_2 = \left(\frac{4kh}{\sinh kh} \right)^2$$

여기서 a 는 振幅이고 g 는 重力加速度이다.

식 (1)에 附與될 일반적인 境界條件은 模型에 따라

약간 다르나 PCGM 模型에 적용되는 條件이 보다 包括的이므로 이를 간략히 記述한다. 緩傾斜波浪式이 成立하기 위해서는 水深 變化率이 작아야 하며 따라서 水深의 變化로부터 惹起되는 波高 變化율도 작게 된다. 境界條件에서 크기가 작은 항들을 無視하여 整理하면 식 (3)-(6)을 얻을 수 있다(徐, 1994).

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = 2i\tilde{\phi}^{\text{in}} + \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial x} - i\ell \right) \tilde{\phi}, \quad x=0 \text{에서,} \quad (3)$$

여기서 入射포텐셜 $\tilde{\phi}^{\text{in}} = -\frac{iga\sqrt{CC_g}}{\sigma} e^{imy}$ 으로 波數

k 의 x, y 成分을 각각 l, m 으로 나타내고 虛數 $i = \sqrt{-1}$ 으로 定의한다.

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial x} + i\ell \right) \tilde{\phi}, \quad x=M \text{에서,} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} = \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial y} + im \right) \tilde{\phi}, \quad y=0 \text{에서,} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} = \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial y} + im \right) \tilde{\phi}, \quad y=N \quad (6)$$

境界條件 (4)-(6)의 우변 첫항들은 Liu와 Boissevain (1988)의 境界條件式 (12)에서도 提示된 것임을 밝힌다. 단순한 경우인 入射境界 附近의 水深이 一定하고, 산란되어 反射된 波浪을 無視할 수 있는 경우를 들어 식 (3)의 境界條件을 檢討하자. 이 경우 入射포텐셜과 未知 포텐셜은 같고 右邊의 둘째 항은 없어지게 된다. 따라서 식 (3)은 일정 수심을 지나는 파랑의 透過條件으로 바뀌게 된다.

위에서 언급한 바와 같이 拋物形近似式은 반사파를 무시함으로 外海境界條件(Upwave B.C.)에서는 入射波浪諸元만을 사용하여 식 (3) 右邊의 첫항 계수를 1로 하고 셋째항은 무시한다. 그러나 PCGM에는 反射波浪에 대한 조건을 考慮하므로 식 (3)을 전부 사용한다. 또한 拋物線近似式에서는 沿岸境界條件(Downwave B.C.)을 附與치 않으나 PCGM에서는 透過條件을 附與하였다. 한편 側面境界條件인 식 (5)-(6)은 透過條件이나 側面に 壁(No-flux Condition)이 있는 경우인 水理實驗의 條件에서는 우변의 둘째항을 무시한다. 그리고 本 論文에서는 No-flux Condition을 사용하였다.

3. 數值模型

앞에서 言及한 數值模型은 서로 相異하여 이 절에서는 이를 區別하여 記述하고자 한다. 우선 PCGM 模型을 제 3.1절에서 설명한 후 제 3.2절에서는 拋物形近似式 模型을 간략히 정리하였고 보다 자세한 誘導過程은 徐(1994)와 徐(1991)에 각각 既述되어 있다.

3.1 PCGM 模型

식 (1)과 關聯 境界條件을 Δx , Δy 의 2次項까지 고려하여 有限差分化한 聯立方程式은 식 (7)의 형태로 쓸 수 있다.

$$Ax=b \quad (7)$$

식 (7)의 行列 A 는 格子點 갯수의 제공과 같은 수의 成分들로 構成된다. 즉 格子點의 갯수가 增加하면 未知數의 갯수도 같이 증가하나 行列 A 의 成分은 제공으로 증가한다. 따라서 상당한 크기의 해석에 대한 波浪計算을 위해 매우 큰 記憶容量이 要求되므로 기억용량을 最小化하고 計算速度를 빠르게 하기 위한 反復法이 必要하게 된다. 한편 比較적 單純한 反復技法인 CGM(Conjugate Gradient Method)은 收斂速度가 느려 계산의 효율성이 떨어지게 되므로 計算速度를 加速시키기 위한 Preconditioner를 使用하는 技法이 要求된다. 또한 식 (7)의 行列 A 는 非自己隨伴行列이므로 相應하는 公역전치행렬을 곱해 自己隨伴行列로 만들어야 한다.

Preconditioner는 $M=Q Q^{-1}$ 이고 行列 Q 는 행렬 A 로부터 만들어지는 實數行列로 本 模型에서는 S.S.O.R(Symmetric Successive Over Relaxation)方法에 基礎하여 構成하였고 식 (8)로 나타낼 수 있다.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\omega(2-\omega)}}(I-\omega L), A = I-L-L^T+S \quad (8)$$

여기서 行列 A 는 對角成分의 크기를 1로 調整하였고 행렬 I 는 單位行列, 行렬 L 은 대각成分이 零이고 實數인 下三角行렬 그리고 行렬 S 는 크기가 작은 補助行列로 계산에는 關여하지 않는다. 그리고 Relaxation parameter(ω)의 값으로 1.5를 사용하였다.

식 (7)에 대한 PCGM 模型의 演算方式은 식 (9)와 같다.

$$w_k = A \hat{p}_k \quad (9a)$$

$$\tilde{u}_k = Q^{-1} w_k \quad (9b)$$

$$\alpha_k = \frac{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)}{(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)} \quad (9c)$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \hat{p}_k \quad (9d)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k w_k \quad (9e)$$

$$\tilde{r}_{k+1} = A^* M^{-1} r_{k+1} \quad (9f)$$

$$\hat{r}_{k+1} = Q^{-1} \tilde{r}_{k+1} \quad (9g)$$

$$\beta_k = \frac{(\hat{r}_{k+1}, \hat{r}_{k+1})}{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)} \quad (9h)$$

$$\hat{p}_{k+1} = M^{-1} \tilde{r}_{k+1} + \beta_k \hat{p}_k \quad (9i)$$

식 (9)에 필요한 初期값은 식 (10)으로 주어진다.

$$\begin{aligned} r_0 &= b - A x_0, \\ \tilde{r}_0 &= A^* M^{-1} r_0, \\ \hat{r}_0 &= Q^{-1} \tilde{r}_0, \\ \hat{p}_0 &= M^{-1} \tilde{r}_0 \end{aligned} \quad (10)$$

식 (9)-(10)에서 添字 *는 公역전치행렬을 의미하고 小文字는 벡터 그리고 아래 첨자는 反復段階를 각각 나타낸다.

非線形式은 解가 式에 影響을 주는 特徵을 가진다. 식 (7)의 連립방정식 行列 A 를 예로 들어 설명하면 속도포텐셜이 식 (11)로 표시되는 振幅 a 의 函數이고 波數는 식 (2)에서 振幅의 函數로 結局 行列 A 는 速度포텐셜의 函數가 된다.

$$a_{ij} \approx \frac{\sigma |\tilde{\Phi}_{ij}|}{g \sqrt{CCg_{ij}}} \quad (11)$$

따라서 식 (7)은 本 模型들에서는 非線形 聯立方程式이 된다. 위에 설명한 바와 같이 非線形模型은 行列 A 가 반복단계마다 바뀌게 되므로 이 行列이 점차 Singular Matrix로 변하면 數值解는 round-off 誤差에 상당히 影響을 받는다. 그러므로 수치해를 구하는 데 상당한 어려움이 따른다. 그러나 本 研究의 경우에는 解가 收斂함으로써 間接적으로나 이러한 영향은 아주 작은 것으로 판단된다.

3.2 拋物形近似式 模型

拋物形近似式 模型에서는 緩傾斜波浪式 (1)을 分離行列法을 사용하여 進行波成分 ϕ^+ 만을 취해 이를 파랑의 進行方向으로 段階的으로 計算한다. 우선 식 (1)을 새로운 연산자 K 를 써서 식 (12)과 같이 풀어 쓴다.

$$\bar{\phi}_{xx} = -\left(\kappa^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\bar{\phi} \equiv -K^2\bar{\phi} \quad (12)$$

여기서 添字는 該當 變數에 대한 偏微分을 의미한다. 그리고 속도포텐셜을 進行波成分과 反射波成分으로 나눈다.

$$\bar{\phi} = \phi^+ + \phi^- \quad (13)$$

水深에 의해 散亂된 波浪을 연산자로 構成된 分離行列 T 를 사용하여 식 (14)로 나타내고

$$\left\{ \begin{matrix} \phi^- \\ \bar{\phi}_x^- \end{matrix} \right\} = T \left\{ \begin{matrix} \bar{\phi} \\ \bar{\phi}_x \end{matrix} \right\} \quad (14)$$

식 (14)를 x 에 대해 微分한 후 식 (14)에 T^{-1} 을 곱한 결과식을 대입한다. 그리고 결과식의 微分次數를 줄이기 위해 식 (12)를 사용하여 정리한다. 즉

$$\left\{ \begin{matrix} \phi_x^- \\ \phi^- \end{matrix} \right\} = T_x T^{-1} \left\{ \begin{matrix} \phi^+ \\ \phi \end{matrix} \right\} + T \left\{ \begin{matrix} \bar{\phi}_x \\ -K^2\bar{\phi} \end{matrix} \right\} \quad (15)$$

식 (15) 右邊 둘째항을 關聯式들을 이용 成分波로 표시하여 x 에 대한 零次 微分만으로 나타낸다. 그리고 成分波間의 連繫를 部分的으로 許容하도록 근사시킨 최종식에서 反射波 成分을 無視하면 식 (16)이 된다.

$$\phi_x^+ = \left(\frac{-K_x}{2K} + iK \right) \phi^+ \quad (16)$$

한편 水深 變化率이 緩慢한 경우 연산자 K 는 식 (17)로 近似시킬 수 있다.

$$K \approx k \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \quad (17)$$

식 (16) 右邊의 첫 항을 波數 k 로 나타내기 위해 微分하여 $4K^2$ 으로 나누고 pseudo-operator로 看做하여 整理하면 拋物形近似式 (18)이 誘導된다.

$$\phi_x^+ = \left(ik + i \frac{\beta}{k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{k_x}{2k} \right) \phi^+ \quad (18)$$

$$-\frac{1}{4k^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\alpha k_x}{2k^3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big) \phi^+ \quad (18)$$

여기서 식 (18)의 未知常數 α 와 β 는 一定 傾斜의 水深에 대해 適用하여 Snell 法則으로부터 구한 結果와 比較하여 가장 좋은 조합인 $\alpha=1, \beta=0.73$ 으로 정하였다. 식 (18)은 高次의 微分項을 포함하여 高次 拋物形近似式으로 分類된다. 이 高次의 항들은 散亂波의 方向이 主 進行方向과 상당한 差異를 나타내는 境遇에도 비교적 작은 誤差를 가져옴으로써 廣角 拋物形近似式으로 부르기도 한다.

斜角 入射波의 영향을 덜 받게 하기 위해서 y 軸에 대해 平均한 수심의 平均波數를 使用하여 속도포텐셜을 구성하였다.

$$\phi^+ = \bar{\phi}(x)\phi(x, y) \equiv e^{i(\bar{k}_x x + \bar{m} y)} \phi \quad (19)$$

여기서 波數 成分에 표시된 添字 $-$ 는 平均된 값을 意味한다. 식 (19)를 식 (18)에 代入한 결과식을 Crank-Nicolson方法으로 差分化하고 該當 境界條件도 $\Delta x, \Delta y$ 의 2次項까지 使用하였다. 그리고 差分化된 式을 三角行列로 만들어 Thomas 演算技法으로 계산하였다.

4. 數值模型 結果比較

本節에서는 제 3節에 既述된 方法에 따라 數值模型 結果를 橢圓形淺堆에 대한 水理實驗 結果 및 既存 結果인 Kirby(1986)의 結果를 同一한 條件에서 比較한 후 數值解의 解像度를 높이기 위해 格子點을 늘려 計算한 結果를 分析하였다. 그리고 216×201 개의 格子點으로 構成된 格子網에 대해 PCGM結果와 拋物形近似式 模型結果를 比較하고 拋物形近似式의 結果를 PCGM 模型의 入力資料로 使用하여 계산한 結果를 圖示하였다.

橢圓形淺堆에 대한 水理實驗의 配置圖를 그림 1에 실었다. Berkhoff의 橢圓淺堆 實驗으로 알려진 수리 실험은 一定 傾斜(1:50)의 수심위에 橢圓形 淺堆가 中央에 位置하고 傾斜面은 入射波浪의 方向과 약 20度의 角을 갖는다. 이 실험에서는 淺堆 뒷편에 集中되는 波浪을 많은 地點에서 計測하여 波浪變形 模型의 精密度를 檢證하는 데 많이 利用된다.

표 1에 水理實驗에 使用된 波浪諸元을 정리하였고

Table 1. Incident wave characteristics for the elliptic shoal experiment (Berkhoff *et al.*, 1982)

wave period(sec)	wave height(cm)	wave angle(°)
1.	4.64	0

Table 2. Grid number and CPU time

	grid size (cm)	grid number	CPU Time (sec)
PCGM	10	216×201	13,367
Parabolic a	10	216×201	80.2
Parabolic b	25	87×81	13.1

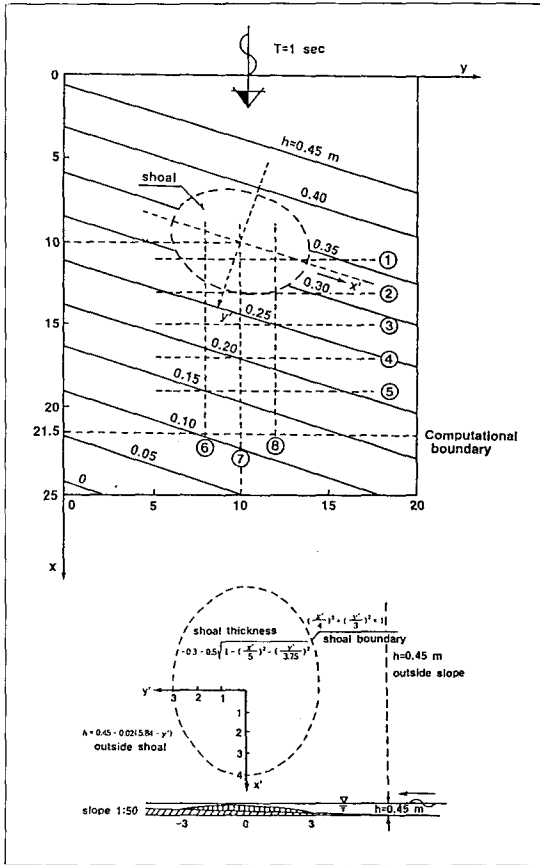


Fig. 1. Layout of an elliptic shoal experiment by Berkhoff *et al.* (1982).

그림 1에 보인 것과 같이水槽의 일정한水深은 45 cm로線形波理論에 의한波長은 약 150 cm이며斷面 4의平均水深을 20 cm로 볼때波長은 약 120 cm가 된다. 한편非線形理論에 따른波長은 식 (2)에서類推할 수 있드시波高가 커지면波長 또한 길어지게 된다.

PCGM 模型의初期條件은 y軸에 대해平均한水深으로부터 Snell 法則으로부터 구한 값을 사용하였다. 제 3節에서言及한演算技法인 식 (9)의 기법으로 계산된 속도포텐셜을 사용하여波浪의振幅을 구하고

이로부터 식 (2)에서波數를 구해 PCGM을 사용하여 30번씩反復하여解를 구한 후 새로운波數를 다시 계산하였다(徐, 1994 參照). 이러한過程을反復하여 계산된誤差가許容誤差보다 작을 때까지反復하여數值解를 구하였다.許容誤差는 첫번 잔차벡터 크기 (Maximum norm)의 5×10^{-4} 배로 정하였다. 또한 식 (7)의左邊은波數가 바뀔 때 마다 그 값이變하게 된다. 그러나徐(1994)의 수치실험에서指摘한 바와 같이左邊을一定한 값으로定하여 계산하였다. 그 이유는첫째收斂을 빠르게 할 뿐아니라 둘째拋物形近似式의既存結果들이水理實驗結果와 거의一致함으로入射境界에서의反射波는無視할 수 있기 때문이다.

拋物形近似式 模型에는 두 가지의 격자망을 사용하였다: 즉 216×201개 격자망을 사용한 결과를 Parabolic a로 87×81개 격자망 결과는 Parabolic b로 각각 표기하였다. 표 2에格子網에 대한諸元과 DX2 66MHz의 컴퓨터로 계산한 소요시간을 정리하였다.

本 拋物形近似式 模型을檢證하기 위해 가장精密한模型으로 알려진 Kirby(1986)의拋物形近似式 模型結果(格子點 87×81)와直接比較하기 위해 Parabolic b의 8개斷面에서 계산한 결과를 그림 2에圖示하였다.實線과點線은 각각本模型結果와 Kirby의結果이며符號는水理實驗의結果이다. 두 결과는 모든 단면에서 거의 같은 값을 보이고實驗値와의比較에서도 알 수 있듯이精密度가 높은 것으로 나타났다. 그러나 Kirby의模型은 2次 Stokes 波浪理論에 의한拋物形近似式으로式 자체가非線形이다. 이를振幅의式으로 나타내면支配方程式은 Cubic Schrödinger equation으로 되어複雜한形態를 갖는다 (Kirby, 1986).

한편非線形性(Weakly nonlinear)을 나타내는模型은 Liu(1990)가指摘한 바와 같이 두 가지로區別된다. 위에言及한 것과 같은 첫번째 방법은非線形項이支配方程式에包含되는境遇이고 둘째 방법은

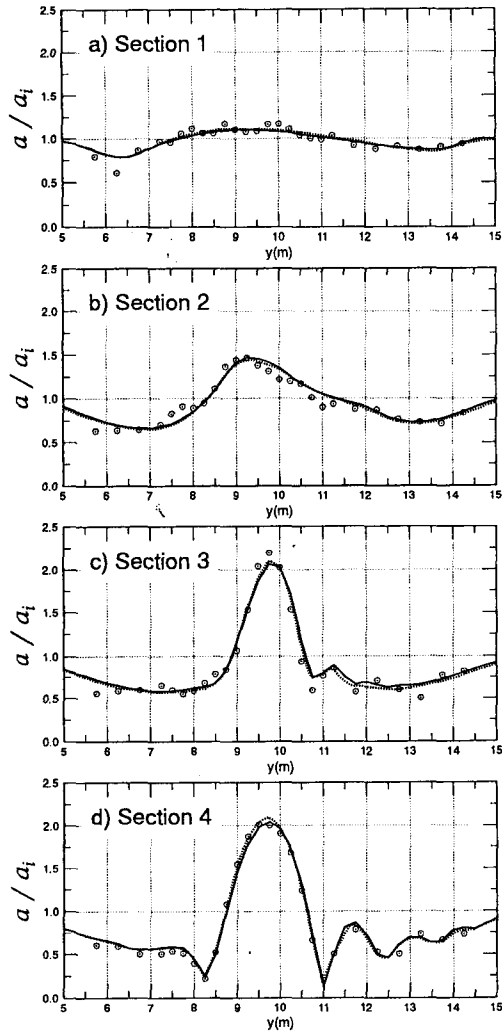


Fig. 2a. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: \odot Data; — Parabolic b; \cdots Kirby's.

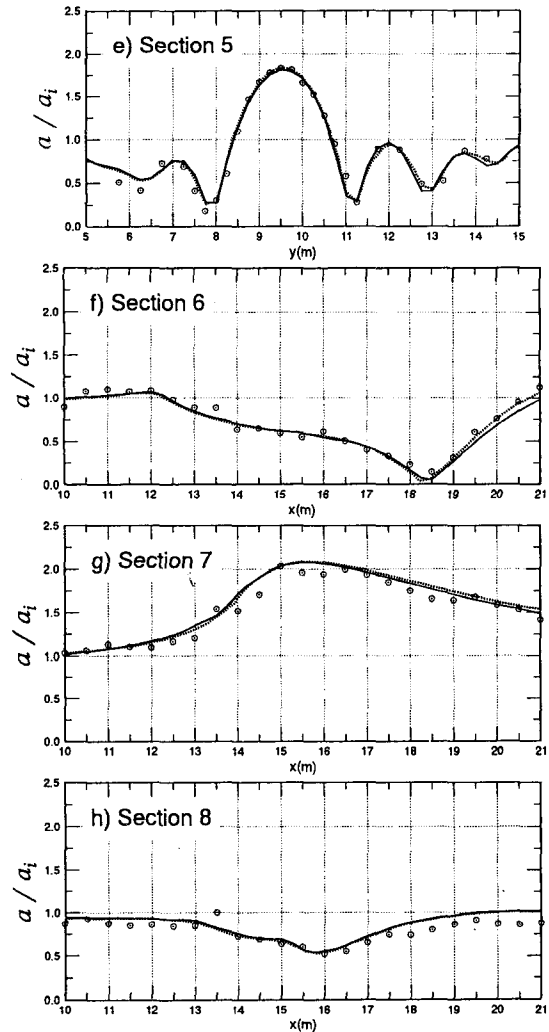


Fig. 2b. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: \odot Data, — Parabolic b; \cdots Kirby's.

本 模型에서와 같이 分散式에 非線形性을 包含하는 方法이다. 두번째 方法은 支配方程式이 簡單하나 Kirby와 Dalrymple(1986)이 지적한 바와 같이 波數를 求할 때 振幅이 必要함으로 反復的인 計算이 필요하다. 本 結果은 振幅을 2回 反復하여 계산하였다. 한편 前 段階의 振幅을 使用하여 반복법을 사용하지 않은 경우도 計算하였다. 반복법을 사용한 경우와 사용하지 않은 경우의 解는 대략 거의 같은 값을 보였으나 反復法을 使用한 境遇의 計算結果는 약간 平滑化된 값을 나타내 實測值에 보다 近接한 것으로 나타났다.

本 模型의 格子點을 늘렸을 때 數值解의 結果를 그림 3에 나타내었다. 淺堆 뒷편 中央部의 平均水深을 20 cm로 볼때 線形理論의 波長은 약 120 cm로 Parabolic b는 波長當 約 6개의 格子를 가지나 Parabolic a는 約 12개의 格子點이 存在한다. 그림에서 實線은 Parabolic a의 결과이고 點線은 Parabolic b 그리고 符號는 水理實驗 結果이다. 格子點을 增加시킨 境遇 數值解가 보다 精密하였고 특히 細細한 波浪變形까지도 나타내므로 波長當 10개 以上의 格子點을 使用하는 것이 좋은 것으로 判斷된다.

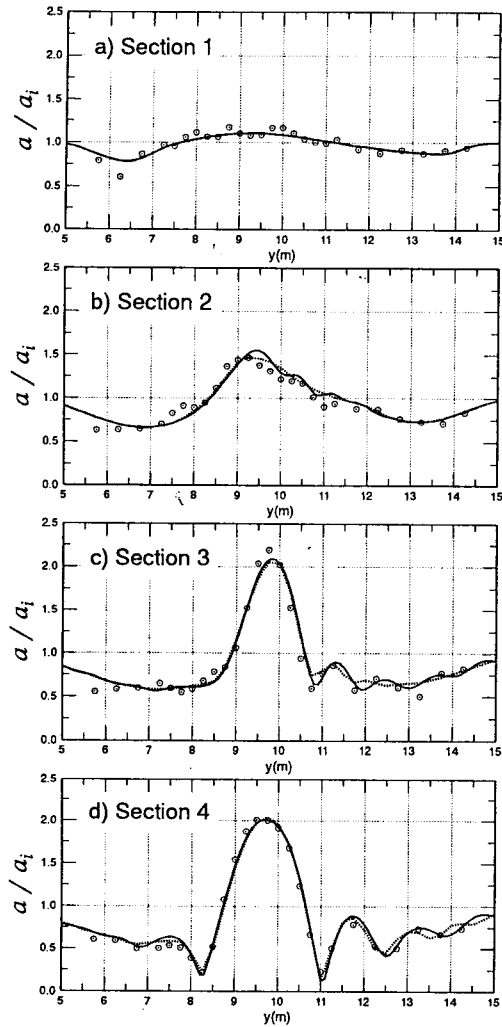


Fig. 3a. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: \odot Data, — Parabolic a; \cdots Parabolic b.

그림 4에 拋物形近似式 模型結果와 PCGM 模型結果를 격자점 216×201 로 構成된 格子網에서 比較하였다. 그림에서 符號는 水理模型 實驗結果이고 點線은 拋物形近似式 結果 그리고 實線은 PCGM 結果이다. 數值模型들의 計算結果는 選定된 8개 斷面의 모든 水理模型 結果에 매우 잘 附合한다. 또한 PCGM 模型의 既存 結果인 Panchang 등(1991) 模型 結果와 거의 對等하거나 優秀한 精密度를 보인다. 結果 그 自體로만 判斷할 때 境界에 가까운 部分에서의 本模型의 計算值가 實測值에 보다 가깝 斷面 8에서는 상당히 나은 結果를 보인 반면에 3-5의 波浪이

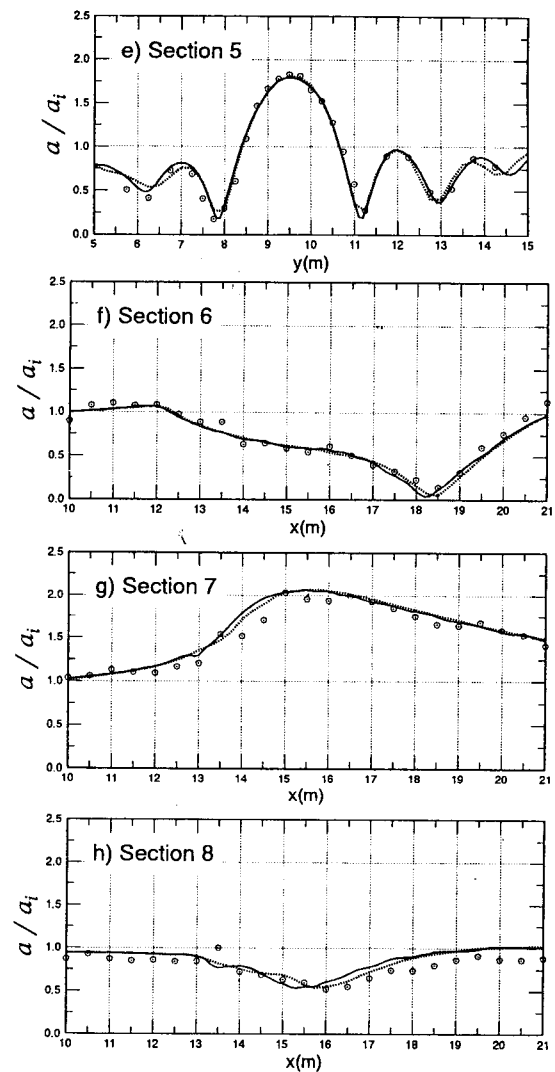


Fig. 3b. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: \odot Data, — Parabolic a; \cdots Parabolic b.

集中되는 部分에서는 보다 못한 結果를 보인다. 그러나 Panchang 등의 模型은 境界條件이 잘 못 設定되었음을 이미 指摘하였다(徐, 1994).

斷面 4-5에서 波浪이 集中되어 波高가 가장 큰 部分의 PCGM 結果는 水理模型 結果와 拋物形近似式 模型結果 보다 작게 나타났다. 全般的으로 볼 때 PCGM 結果는 水理實驗 結果와 拋物形近似式 模型결과 보다 작다. 또한 斷面 7과 8의 水理實驗結果에도 약간의 振動이 存在하나 斷面 6-8의 PCGM 結果에 나타난 빠른 振動形態는 보다 뚜렷하다. 아직 그 原

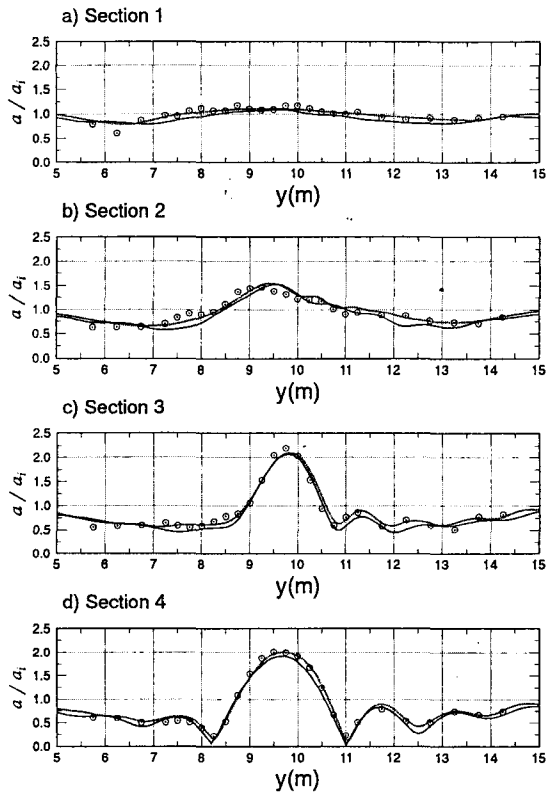


Fig. 4a. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: \odot Data, — Parabolic a; ... PCGM.

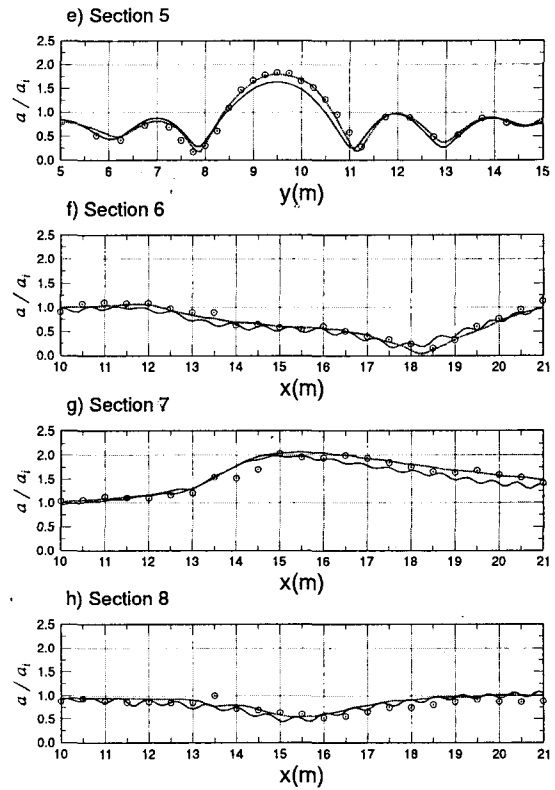


Fig. 4b. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: \odot Data, ... Parabolic a; — PCGM.

因은 不明하나 특히 PCGM결과에 두드러진 것은 反射波에 의한 定常波가 形成되어 나타나는 것으로 推測된다. 그러나 PCGM 模型의 數值誤差가 이를 增幅시킬 可能性도 排除할 수 없다.

Berkhoff 등(1982)의 等位相圖(그림 3)을 分析하면 本 模型의 沿岸境界線 中 파랑이 集中되는 附近에서는 波向이 急激히 變하나 그 밖의 지역에서는 거의 一定하다. 한편 波向의 數值計算은 數值解에 연관되어 있고 ATAN2 함수로 角을 계산할 때 180° 에서 不連續이므로 계산이 容易하지 않다. 특히 波浪이 集中되는 附近에서 波向計算은 매우 어려운 것으로 지적되었다(Mei와 Liu, 1993). 本 計算에서는 沿岸境界에서 波向을 y軸에 直交하는 近似값으로 使用하였고 이로 인한 誤差가 數值結果에 影響을 줄 것으로 料되며 이 영향의 크기를 밝히기 위한 연구가 行 중이다.

拋物形近似式 模型結果를 PCGM模型의 果를 比 較하여 算한 果를 그림 5에 示하였다. 그림에서 實線은 초기값을 Snell 法則으로 구한 속도포텐셜을 用한 果이며 點線은 拋物形近似式 模型結果로 부터 구한 값을 用한 것이다. 여기서 許容誤差는 同 一한 값인 0.124×10^{-3} 을 用하였고 格子點 수는 216×201 개를 用하였다. 표 3에 반복 횟수와 所 要 算時 間을 나타내었다.

표 3에 나타난 바와 같이 比較的 精密한 初期條件을 使用한 PA input 경우에는 38%의 計算速度에 減少를 보였다. 여기서 注目할 事項은 拋物形近似式 模型으로 부터 算한 振幅만 用할 경우에는 算速度의 감소를 보이지 않았다. 한편 포물형근사식 模型에서 算한 속도포텐셜 자체를 用한 경우에는 算時 間의 減少를 가져오는 것으로 밝혀졌다. 두 포텐셜의 關係는 식 (13)으로 부터 알 수 있으며 포물형근사 식은 반사파; 2차함으로서 두 模型의 포텐셜은 같게

그러나 物形近似式 模型에서는 入射角의 영

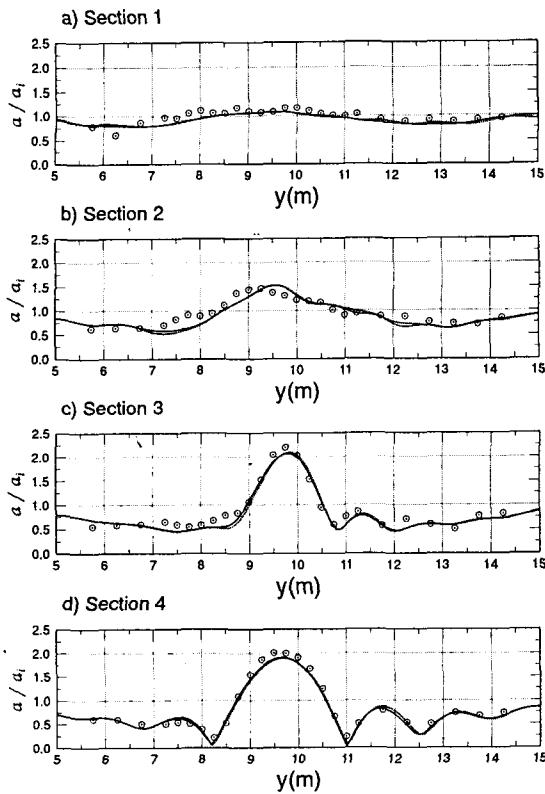


Fig. 5a. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: ⊙ Data, ... PA input; — Snell input.

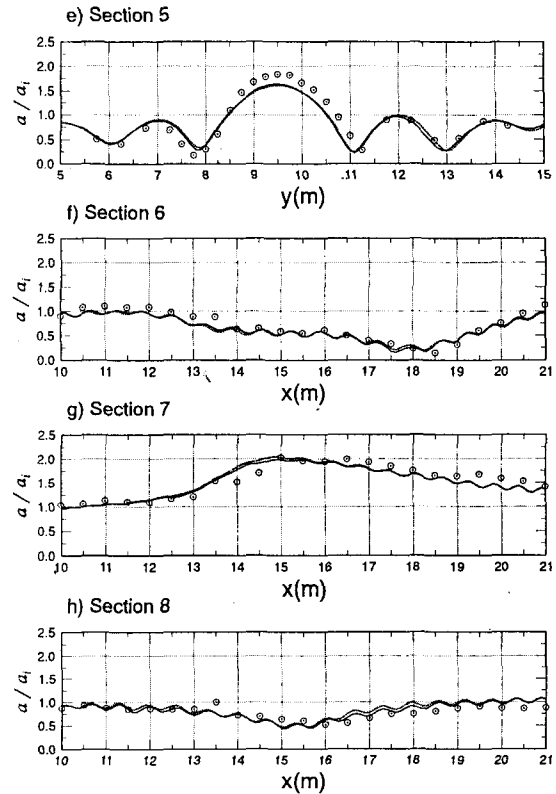


Fig. 5b. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: ⊙ Data, ... PA input; — Snell input.

향을 줄이기 위해 平均波數를 導入하였으므로 最終關係式은 다음 식으로 표시된다.

$$\tilde{\phi}(x, y) \approx \phi^+ = e^{i(\int(x)dx + \bar{m}y)} \phi(x, y) \quad (20)$$

한편 포물형근사식 模型의 결과를 初期條件으로 사용한 경우 計算速度의 減少는 豫想했던 것 보다는 덜 短縮된 것으로 보이며 이는 다음과 같은 原因을 들어 說明할 수 있다. 만일 微分方程式의 解析解를 초기조건으로 사용한다 해도 差分式은 미분방정식의 解를 近似的으로 滿足하게 된다. 즉 差分法에 의해 定해지는 嚴密解는 계산기에서는 숫자를 유한자리 수로 표시함으로 발생하는 round-off 誤差로 인해 數値解와 다르며 原 微分方程式의 解析解와도 다르다. 이것이 豫想했던 계산시간 감소와의 差異를 나타내는 가장 큰 要因으로 思料된다.

그림 5에서 보인 바와 같이 두개의 不同的 초기 條件을 사용하여 計算한 結果는 거의

Table 3. Iteration number and CPU time

	Iteration number	CPU Time (sec)
PA input	3,207	8,227
Snell input	5,284	13,367

本 例題를 통해 相異한 初期條件을 사용하여도 PCGM 模型의 數値解는 收斂하며 같은 結果를 가짐을 立證한 것이다. 이를 분석하여 종합하면 초기조건은 해의 精確도에는 影響을 거의 主지 않는 반면에 計算시간에는 상당한 影響을 주는 것으로 나타났다.

本 結果에 所要된 計算時間은 拋物形近似式 模型은 80.2초가 걸렸으나 PCGM模型은 8,227초가 所要되었 다. 그러나 이렇게 많은 計算시간에도 불구하고 PCGM模型은 反사파를 고려할 수 있기 때문에 複雜한 形에 設置될 沿岸構造物의 設計波 推定 또는 反射波의 影響을 무시할 수 없는 靜穩度 檢討를

위한 資料算定에는 매우 유용한 방법으로 판단된다.

5. 結論 및 討議

拋物形近似式の 數值模型과 緩傾斜波浪式에 대한 PCGM模型에 同一한 入力資料를 사용하여 계산한 非線形 結果를 橢圓形淺堆의 水理實驗 結果와 比較하였다. 두 模型의 結果는 水理實驗 資料에 매우 잘 一致하였다. 波浪의 集中에 의해 波高가 가장 큰 부분에서는 拋物形近似式 結果가 더 좋고 計算時間이 아주 적게 所要되는 것으로 밝혀졌다. 따라서 拋物形近似模型은 廣域의 波浪을 推定하는 데 매우 有用한 방법이다. 그러나 PCGM模型은 緩傾斜 波浪式을 直接 差分化하기 때문에 反射波를 考慮할 수 있으며 本 比較에서 나타난 것과 같이 回折에 의한 細密한 變化를 再現하므로 PCGM模型 역시 構造物을 包含한 沿岸域 波浪推定에 有用한 模型으로 判斷된다.

數值模型의 解像度를 增大시키기 위해 格子點을 늘려 계산한 실험으로 부터 判斷할 때 波長當 10개 以上の 格子點을 使用하는 것이 바람직하며 이 경우 本 數值模型은 細密한 波浪變形까지도 나타낼 수 있다.

두 模型의 長點을 서로 補完하기 위한 試圖로 拋物形近似式の 계산結果를 PCGM模型의 初期條件으로 使用함으로써 PCGM模型의 計算時間을 短縮시켰다. 그리고 本 模型은 반사파의 영향이 뚜렷한 沿岸構造物의 設計波 推定 및 靜穩度 檢討를 위한 資料算定에는 매우 有用한 方法으로 판단된다.

謝 辭

本 研究는 1994년 韓國海洋研究所에서 실시한 出

捐研 研究開發事業(PN00261)의 中間結果이며 研究費 支援에 感謝를 드립니다. 그리고 模型結果 比較를 위해 資料를 준비해 준 박승준와 김선정씨에게도 謝意를 포함합니다.

參考文獻

- 徐承男, 1990. 拋物形 近似式에 의한 淺海波 算定모델, 韓國海岸·海洋工學會誌, 2(3): 134-142.
- 徐承男, 1994. 緩傾斜 波浪式에 대한 PCGM 演算方式 比較, 韓國海岸·海洋工學會誌, 6(2): 186-195.
- 徐承男, 延泳鎮, 1994. 緩傾斜 波浪式에 대한 PCGM 數值 模型, 韓國海岸·海洋工學會誌, 6(2): 164-173.
- 유동훈, 1993. 천해에서 불규칙파의 변이, 한국해양·해양공학회지, 5(3): 212-220.
- Berkhoff, J.C.W., Booy, N. and Radder, A.C., 1982. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, *Coastal Eng.*, 6: 219-232.
- Kirby, J.T., 1986. Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves, *J. Geo. Phys. Res.*, 91(C1): 933-952.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A., 1986. An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models, *Coastal Eng.*, 9: 545-561.
- Liu, P.L.-F., 1990. Wave transformation. In *The Sea: Ocean Engineering Science*, Vol. 9, ed. B. LeMehaute, D.M. Hanes, Wiley, New York, 27-63.
- Liu, P.L.-F. and Boissevain, P.L. 1988. Wave Propagation between Two Breakwaters, *J. Waterway, Port Coastal Ocean Eng.*, ASCE, 114: 237-247.
- Mei, C.C. and Liu, P.L.-F., 1993. Surface waves and coastal dynamics, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 25: 215-240.
- Panchang, V.J., Pearce, B.R., Wei, G. and Cushman-Roisin, B., 1991. Solution of the mild-slope wave equation by iteration, *Applied Ocean Res.*, 13: 187-199.
- Yoo, D. and O'Connor, B.A., 1988. Diffraction of waves in caustics, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, ASCE, 114(6): 715-731.