

緩傾斜 波浪式에 대한 PCGM 演算方式 比較 Comparison of PCGM Algorithms for Mild Slope Equation

徐 承 男*
Seung Nam Seo*

要 旨 : 反復技法인 PCGM에 근거한 精密하고 收斂速度가 빠른 數值技法을 개발하기 위하여 既存技法인 Bayliss 등(1983) 혹은 Panchang 등(1991)의 技法을 포함하여 여러가지 技法을 제시하였다. 각 技法의 數值結果는 一定 水深 위를 지나는 線形 波浪의 解析解와 比較하였으며, 각 方法의 長短點을 論한 뒤 精密度와 收斂速度를 分析하였다. 이러한 比較를 통해 본 論文의 方法이 검토한 方法중에서 緩傾斜 波浪式을 PCGM 數值技法으로 計算하는 데 가장 適合한 方法임을 立證하였다.

Abstract □ In order to make an accurate and fast numerical method based on Preconditioned Conjugate Gradient Method(PCGM), several methods are presented including the existing method such as Bayliss *et al.* (1983) or Panchang *et al.* (1991). The results of the methods are compared with the analytical linear solution of plane waves over a constant depth. After advantages and disadvantages of the methods are discussed, both accuracy and convergence of them are analyzed. The method developed in the paper is proved, by means of tests, to be the best method to solve the mild slope equation numerically.

1. 緒 論

천해로 진행되는 波浪의 變形을 적절히 나타내는 緩傾斜 波浪式의 解를 數值的으로 구하는 方法은 有限差分法과 有限要素法으로 구분된다. 解의 精確도는 差分法 技法에 의해 다소 영향을 받으나 어떤 技法이든지 格子點(또는 미지수)의 갯수를 늘리면 精確도가 높아진다. 한편 港灣의 防波堤를 설계하기 위한 設計波 산정에는 精密한 數值解가 요구되며 附與된 境界條件으로부터 생성되는 誤差를 줄이기 위해서는 計算 境界線을 주요 관심지역으로부터 가능하면 멀리 정하는 方法이 바람직하다. 결국 이러한 要件이 충족되려면 計算領域이 커져야 한다.

計算領域이 커짐에 따라 差分法된 식으로부터 형성되는 連립방정식 行列의 크기는 미지수 갯수의 제곱에 比例하여 커진다. 그러나 위에 언급한 方法의 行列 成分은 대부분 零으로 구성되며 有限要素法에 비해 有限差分法의 行列은 이러한 特性이 뚜렷하다.

구성된 連립방정식을 直接技法(direct method)으로 풀 때에는 sparse matrix packing scheme과 같은 效率적인 方法(Jennings and McKeown, 1992)으로 電算機 記憶容量을 운영해도 상당량의 기억용량이 占有된다. 그러나 間接技法 또는 反復技法(iteration method)으로 連립방정식의 解를 구하는 경우 行列의 成分을 記憶할 필요가 없다. 따라서 상당한 크기의 區域에 대한 波浪을 計算할 때(예를 들면 格子點 100×100 이상) 전산기 기억용량과 計算速度의 效率性을 勘案하면 反復技法이 有利하다.

본 論文에서는 有限차분법을 사용하고 差分法으로부터 만들어진 連립방정식의 解를 反復技法으로 구하는 PCGM(Preconditioned Conjugate Gradient Method)을 사용하였다. 緩傾斜 波浪式에 대해 PCGM을 사용한 數值模型은 Panchang 등(1991)에 의해 처음 試圖되었고 그 結果를 Berkhoff 등(1982)의 타원천퇴 실험과 Lee(1971)의 항부진동 解析解와 比較하여 이 方法의 우수한 精密度를 立證하였다. 그

*한국해양연구소 해양공학연구부 (Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan 425-600, Korea)

러나 Panchang 등의 數値模型은 緩傾斜 波浪式을 有限差分하여 Bayliss 등(1983)의 演算方式을 그대로 사용한 것이다. 한편 본 論文에서는 演算方式을 比較·分析하여 緩傾斜波浪式의 數値解를 구하는 最適技法을 도출하고자 한다. 또한 국내 연구로는 尹(1993)이 Panchang 등의 數値模型을 사용하여 그 結果를 Ito와 Tanimoto(1972)에 의한 球形 淺堆實驗 結果 및 Watanabe와 Maruyama(1986)의 離岸堤 실험 結果와 比較하였다.

연립방정식의 解를 反復技法으로 구하는 CGM의 演算速度를 增加시키기 위한 PCGM에는 여러가지 方法이 存在할 수 있으며 본 論文에서는 이들 가운데 대역성 種류의 演算技法에 의한 數値 結果를 一定水深 위를 지나는 波浪의 解析解와 比較하여 이들 特性을 比較·分析하고자 한다. 제 2절에서는 支配方程式과 差分式을 記述하여 연립방정식을 구성하였다. 먼저 제 3.1절에서 연립방정식의 行列이 自己隨伴行列(Hermite Matrix)인 경우에만 성립하는 CGM의 演算技法을 간략히 記述한 후 이를 非自己隨伴行列(Non-Hermite Matrix)의 경우로 技法을 擴張하였다. 그리고 제 3.2절에서는 이에 Preconditioner를 接木하여 收斂速度를 加速시키는 方法들을 記述하였다. 제 3.2절에 기술된 演算技法들을 대상으로 한 數値模型을 제시하고 일정 수심 위를 지나는 平面波의 解析解와 比較하여 그 特性에 대한 分析을 제 4절에 記述하였다. 마지막으로 제 5절에 淺海波 算定 및 港灣 靜穩度 分析에 이용할 수 있는 緩傾斜 波浪式의 數値解析에 가장 좋은 PCGM의 演算技法을 제시하였다.

2. 支配方程式과 差分式

2.1 支配方程式

비압축성 유체와 비회전성 흐름에는 速度포텐셜이 존재하고 流體의 運動은 Laplace式에 의해 지배된다. 單週期 波浪의 경우 速度포텐셜의 時間成分을 分離하기 위해 速度포텐셜을 $\bar{\phi}(x, y, z) \exp(-i\sigma t)$ 로 定義한다. 여기서 複素數 $i = \sqrt{-1}$ 이고 角周波數는 $\sigma = 2\pi/T$ 이며 T는 波浪의 週期이다. 평균수면상에 x, y 축을 놓고 z축의 陽의 方向을 水面 위로 향하게 座標系를 定한다. 또한 入射波浪은 x축의 양의 方向으로 進行한다. 3차원 Laplace式을 2차원 平面波浪의 式으로 變換하기 위해 速度포텐셜의 水深成分 f(z)을 Lap-

lace式에 곱해 수심에 대해 積分하고 관련된 境界條件을 적용한다. 水深成分 f(z)은 식 (1)로 정의되며, k는 波數(=2π/L, L=파장)이며 波浪 分散式으로부터 구해진다.

$$f(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}, \quad (1)$$

$\sigma^2 = gk \tanh kh$,
g = 중력 가속도.

水深이 緩慢하게 변할 때, 즉 水深 傾斜率이 작은 경우에 적분한 식에 나타난 수심 경사율의 제곱항과 2차 경사율을 무시하면 緩傾斜 波浪式이 유도된다 (Berkhoff, 1972; Mei, 1989).

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \bar{\phi}) + k^2 CC_g \bar{\phi} = 0, \quad (2)$$

여기서 파속 $C = \sigma/k$ 이고, 群速度 $C_g = C/2 (1 + 2kh / \sinh 2kh)$ 이다. 식 (2)를 직접 차분하는 것보다 $\phi(x, y) = \bar{\phi} \sqrt{CC_g}$ 를 사용하여 Helmholtz식 (3)으로 變換하는 것이 곱셈의 수가 적어져 計算速度가 빨라지게 된다.

$$\nabla^2 \phi + \kappa^2 \phi = 0, \quad (3)$$

여기서 $\kappa^2 = k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}}$ 이다.

본 論文은 주어진 精密度에 도달하는 演算技法의 計算速度를 比較하기 위한 것이므로 解析解가 존재하는 일정 수심 위를 지나는 平面波浪만을 대상으로 한다. 따라서 식 (3)의 κ 는 k로 바뀌어 식 (4)가 되며 이에 대한 解析解는 식 (5)로 주어진다.

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0. \quad (4)$$

$$\phi(x, y) = -\frac{iga\sqrt{CC_g}}{\sigma} e^{i(k_x x + k_y y)}, \quad (5)$$

여기서 a는 波浪의 振幅이며 k_x, k_y 는 각각 波數의 x, y 成分이다. 식 (5)는 지배방정식 (4)를 만족하며 그림 1에 도시된 格子網의 경계조건으로는 식 (6)~(9)가 됨을 알 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ik_x (2\phi^{\text{in}} - \phi), \quad x=0 \text{에서}, \quad (6)$$

여기서 $\phi^{in} = -\frac{iga\sqrt{CC_g}}{\sigma} e^{ik_y y}$ 이다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ik_x \phi, \quad x=M \text{에서}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = ik_y \phi, \quad y=0 \text{에서}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = ik_y \phi, \quad y=N \text{에서}, \quad (9)$$

식 (6)~(9)로 주어진 경계조건은 斜角 入射波에도 적용되는 것이며 Panchang 등(1991)은 直交 入射波만을 考慮하였다.

2.2 差分式

計算區域을 그림 1에 도시된 것과 같이 x축으로 0에서 M까지 그리고 y축으로 0에서 N까지(M+1)×(N+1)개의 格子點으로 구성하였다. 各 格子點에서 식 (4)와 식 (6)~(9)에 대해 有限差分法을 사용하여 精密度를 微小格子 Δx, Δy의 2차까지 고려한 式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \left((k\Delta x)^2 - 2 - 2 \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} \right) \phi_{i,j} \\ + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} (\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1}) = 0, \\ i=1, \dots, M-1 \text{ and } j=1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{2} + ik_x \Delta x \right) \phi_{0,j} + 2\phi_{1,j} - \frac{1}{2} \phi_{2,j} = i 2 k_x \Delta x \phi_j^{in}, \\ j=0, \dots, N \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} + ik_y \Delta y \right) \phi_{i,0} - 2\phi_{i,1} - \frac{1}{2} \phi_{i,2} = 0 \\ i=1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi_{i,N-2} - 2\phi_{i,N-1} + \left(\frac{3}{2} - ik_y \Delta y \right) \phi_{i,N} = 0, \\ i=1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi_{M-2,j} - 2\phi_{M-1,j} + \left(\frac{3}{2} - ik_x \Delta x \right) \phi_{M,j} = 0, \\ j=0, \dots, N \end{aligned} \quad (14)$$

식 (10)~(14)로 構成되는 聯立方程式은 식 (15)의

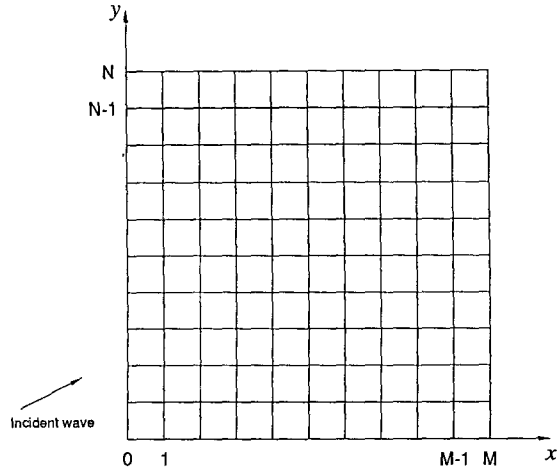


Fig. 1. Sketch of grid system.

형태로 표시할 수 있으며

$$A\{x\} = \{b\} \quad (15)$$

行列 A는 成分이 대부분 零인 sparse matrix가 되고 未知數 {x}는 {φ}로 갯수는 격자점의 갯수와 같은 (M+1)×(N+1)이 된다. 따라서 緩傾斜 波浪式 (4)의 數值解는 差分法에 따라 連립방정식의 行列이 달라지나 식 (15)로 나타내진다. 以後의 모든 連립방정식은 數式展開의 편의상 各 連립방정식의 對角成分을 1로 調整한 식 (15)를 사용하기로 한다. 다음 절에서 이 連립방정식을 효과적으로 푸는 方法을 소개하기로 하며 특별한 경우를 除外하면 行列은 대문자의 알파벳으로 벡터는 소문자의 알파벳 그리고 스칼라는 그리스 문자로 표기하기로 한다. 그리고 벡터를 의미하는 괄호는 사용하지 않기로 한다.

3. 演算方式

3.1 CGM(Conjugate Gradient Method)

우선 가장 단순한 형태의 演算方式을 간단히 記述하고 이를 토대로 한 보다 複雜한 形態의 演算方式으로 擴張하는 方法은 이 절의 뒷부분에 다루고자 한다. 行列 A가 自己隨伴行列이면 CG方法을 사용하여 收斂速度를 빠르게 할 수 있다. 이 方法은 수많은 數值解析 相關 書籍에 記述되어 있으며 여기서는 Strikwerda(1989)과 Jennings and McKeown(1992)의

方法에 따라 整理하였다.

零이 아닌 任意 벡터 x 에 대한 自己隨伴行列 A 의 2次形式(Quadratic forms)은 항상 陽의 값을 가진다. 즉,

$$F(y) = \frac{1}{2}(y-x, A(y-x)) > 0 \quad (16)$$

여기서 (\cdot, \cdot) 는 內積을 의미한다. 물론 y 가 x 가 되면 函數 F 는 최소값을 가진다. 한걸음 더 나아가 식 (16)을 사용하여 函數 $E(y)$ 을 정의하면 이 식 (17) 또한 $y = x$ 에서 최소값을 가짐을 알 수 있다.

$$E(y) \equiv F(y) - F(0) = \frac{1}{2}(y, Ay) - (y, b) \quad (17)$$

여기서 trial vector y 의 內積 (y, b) 가 實數가 되도록 y 를 정한다. 그러면 함수 $E(y)$ 의 y 에 대한 傾斜率은 $Ay - b \equiv -r$ 이 되며 r 은 잔차벡터(residual vector)로 불리며 trial vector y 가 연립방정식의 解 x 에 가까우면 r 은 零에 가깝게 된다. 이러한 過程을 反復的으로 되풀이 하면 벡터 y 는 구하고자 하는 解에 收斂한다.

벡터공간 y 로 표시된 식 (17)에 段階 k 에서의 trial vector y 는 한 점이며 이를 x_k 로 표시하면 이 점에서 함수 $E(y)$ 가 最小가 되는 方向(searching direction)은 정해지나 $(k+1)$ 단계의 점 x_{k+1} 까지의 스칼라량인 距離 α_k 는 미지수가 된다. 따라서 이 量 α_k 에 대해 函數 $E(y)$ 가 最小되도록 점 x_{k+1} 을 정하며 이 方法을 Steepest Decescent 方式이라 한다.

3.1.1 自己隨伴行列의 CGM

한편 CGM은 收斂速度를 빠르게 하기 위해 searching direction을 補完한 方法이다. CGM에서는 두 개의 스칼라량 α_k, β_k 이 정해지며 이 方法의 근본적인 특성은 Steepest Decescent 方法과 거의 같다. 이에 대한 자세한 것은 Strikwerda(1989)에 收錄되어 있으며 여기서는 CGM의 演算方法과 그 主要 特性만을 記述하기로 한다.

$$u_k = Ap_k \quad (18a)$$

$$\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, u_k)} \quad (18b)$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (18c)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k u_k \quad (18d)$$

$$\beta_k = \frac{(r_{k+1}, r_{k+1})}{(r_k, r_k)} \quad (18e)$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k \quad (18f)$$

식 (18)에서 添字는 反復段階를 나타내며 식 (19)로 주어진 초기값으로부터 計算하여 r_k 값이 주어진 크기(許容誤差)보다 작을 때까지 反復 計算한다.

$$p_0 = r_0 = b - Ax_0 \quad (19)$$

식 (18)과 (19)로 주어진 演算技法의 특성은 두 개의 相異한 잔차벡터 r_k 의 內積 및 상이한 searching direction vector p_k 의 內積은 零이 됨을 證明할 수 있다. 즉,

$$(r_k, r_j) = 0, (p_k, Ap_j) = 0, \text{ for } k \neq j \quad (20)$$

따라서 두 개의 연이은 벡터 p_k 들의 行列 A 에 대한 內積은 直交한다. 그리고 매 단계의 演算시 한 번의 行列 A 와 벡터 p_k 의 곱셈이 필요하나 식 (10)~(14)에 나타난 바와 같이 行列 A 는 sparse matrix이므로 이를 기억할 필요가 없어 전산기의 記憶容量을 아주 効率的으로 運營할 수 있다.

3.1.2 非自己隨伴行列의 CGM

앞에서 언급한 바와 같이 CGM은 연립방정식의 行列이 自己隨伴行列이 되어야만 한다. 그러나 본 論文에서 다루고자 하는 식 (10)~(14)의 行列 A 는 非自己隨伴行列이므로 이 경우에는 곧 바로 CGM을 사용할 수 없다. 따라서 식 (15)로 표시된 연립방정식의 行列을 自己隨伴行列로 變換시키기 위해 隨伴 行列 $A^*(=A^T)$ 를 앞에서 곱해준다. 여기서 bar는 공액복소수를 添字 T는 轉置行列을 각각 의미한다. 그러면 變換된 行列 \hat{A} 는 自己隨伴行列이 되고 식 (15)는 식 (21)이 된다.

$$\hat{A}x = \hat{b} \quad (21)$$

여기서 $\hat{A} = A^*A, \hat{b} = A^*b$ 이다.

식 (21)에 대한 CGM은 식 (18)에서 行列 A 를 行列 \hat{A} 로 그리고 그 밖의 관련 값들을 hat 와 관련된 變數로 표시하면 된다. 그러나 주어진 非自己隨伴行列 A 로 표시하는 方法이 計算에 便利함으로 演算技法은 식 (22)로 됨을 보일 수 있다(Jennings와 McKeown, 1992).

$$u_k = Ap_k \quad (22a)$$

$$\alpha_k = \frac{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)}{(u_k, u_k)} \quad (22b)$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (22c)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k u_k \quad (22d)$$

$$\hat{r}_{k+1} = A^* r_{k+1} \quad (22e)$$

$$\beta_k = \frac{(\hat{r}_{k+1}, \hat{r}_{k+1})}{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)} \quad (22f)$$

$$p_{k+1} = \hat{r}_{k+1} + \beta_k p_k \quad (22g)$$

식 (22)의 계산에 필요한 初期 값은 식 (23)으로 주어진다.

$$r_0 = b - Ax_0, \quad \hat{r}_0 = A^* r_0 = p_0 \quad (23)$$

식 (21)로 變換된 行列 \hat{A} 는 CGM을 사용할 수 있으나 그 대신 spectral norm으로 표시되는 condition number가 原行列 A 의 값보다 매우 커져 ill-conditioned matrix가 되며 收斂速度 또한 매우 느려진다(Jain 등, 1985). 따라서 식 (21)의 收斂速度를 빠르게 하기 위해 Preconditioner를 사용하는 技法이 필요하다. 이 技法을 PCGM이라 하며 제 3.2절에서 기술하고자 한다.

3.2 PCGM(Preconditioned Conjugate Gradient Method)

본 절에는 Bayliss 등(1983)의 演算技法과 Strikwerda(1989)의 技法을 記述하고 각 技法에 대해 두세 가지의 Preconditioner를 提示하기로 한다. 두 方法의 특징은 Bayliss 등은 行列 A 에 Preconditioner를 接木한 후 이를 自己隨伴行列로 만들어 CGM을 사용한 것이고 Strikwerda 方法은 行列 A 를 自己隨伴行列로 變換한 後 Preconditioner를 집목하여 CGM을 사용하였다.

3.2.1 Bayliss 등(1983)의 演算技法

식 (15)로 行列 A 에 대한 Preconditioning matrix 또는 Preconditioner $M(=QQ^T)$ 는 行列 A 에 가까운 近似行列이다. 行列 A 를 좀더 자세히 나타내면 對角成分이 零이고 成分이 實數로만 구성된 Lower triangular 行列 L 을 사용하여 $A=I-L-L^T+S$ 로 표시

한다. 여기서 行列 I 는 單位行列이며 行列 S 는 크기가 작은 補助行列이고 計算에는 직접 參與하지 않는다. 行列 Q 는 收斂速度를 빠르게 할 목적으로 사용되므로 行列 M^{-1} 이 쉽게 計算되어야 한다. 따라서 行列 Q 는 實數인 三角行列로 正해지며 이를 구하는 方法에는 여러가지가 있으나 本 論文에서는 S.S.O.R.(Symmetric Successive Over-Relaxation) 方法을 사용하고자 한다. 그러면 S.S.O.R.에 의한 行列 Q 는 식 (24)로 주어진다(Strikwerda, 1989).

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} (I - \omega L), \quad (24)$$

여기서 ω 는 relaxation 媒介變數이며 1보다 크거나 같고 2보다 작은 값을 갖는다.

對角成分이 1로 바뀐 連립방정식 (15)에 行列 Q^{-1} 을 앞에서 곱해주면

$$Q^{-1}Ax = Q^{-1}b, \quad (25)$$

식 (25)에 $Q^{-T}Q^T=I$ 를 이용하면 식 (26)을 얻는다.

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad (26)$$

여기서 $\tilde{A}=Q^{-1}AQ^{-T}$, $\tilde{x}=Q^T x$ 그리고 $\tilde{b}=Q^{-1}b$ 이다. 식 (26)의 行列 \tilde{A} 는 非自己隨伴行列이므로 隨伴行列 \tilde{A}^* 을 앞에서 곱해주면 앞 절에서 言及한 CG技法 식 (22)와 類似한 식으로 표시된다.

$$\tilde{u}_k = \tilde{A} \tilde{p}_k \quad (27a)$$

$$\alpha_k = \frac{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)}{(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)} \quad (27b)$$

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \alpha_k \tilde{p}_k \quad (27c)$$

$$\tilde{e}_{k+1} = \tilde{e}_k - \alpha_k \tilde{u}_k \quad (27d)$$

$$\hat{r}_{k+1} = \tilde{A}^* \tilde{e}_{k+1} \quad (27e)$$

$$\beta_k = \frac{(\hat{r}_{k+1}, \hat{r}_{k+1})}{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)} \quad (27f)$$

$$\tilde{p}_{k+1} = \hat{r}_{k+1} + \beta_k \tilde{p}_k \quad (27g)$$

식 (27)에서 差벡터를 \tilde{e} 로 定義하고 관계식 $M^{-1}=Q^{-T}Q^{-1}$ 을 이용하면 計算에 필요한 初期 값은 식 (28)로 주어진다.

$$\begin{aligned} r_0 &= b - Ax_0, \\ \tilde{e}_0 &= \tilde{b} - \tilde{A} \tilde{x}_0 = Q^{-1} r_0, \\ \tilde{r}_0 &= A^* M^{-1} r_0, \\ \hat{r}_0 &= A^* \tilde{e}_0 = Q^{-1} \tilde{r}_0 = \tilde{p}_0 \end{aligned} \quad (28)$$

식 (27)의 演算技法을 이용하여 연립방정식을 풀 수도 있으나 관련 關係式을 사용하여 가능하면 원래의 變數로 나타내는 것이 計算에 효율적이다. 따라서 식 (27)을 원래의 변수로 다시 쓰면 식 (29)을 얻게 된다.

$$w_k = A \hat{p}_k \quad (29a)$$

$$\tilde{u}_k = Q^{-1} w_k \quad (29b)$$

$$\alpha_k = \frac{(\hat{r}_k, \tilde{r}_k)}{(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)} \quad (29c)$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \hat{p}_k \quad (29d)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k w_k \quad (29e)$$

$$\tilde{r}_{k+1} = A^* M^{-1} r_{k+1} \quad (29f)$$

$$\hat{r}_{k+1} = Q^{-1} \tilde{r}_{k+1} \quad (29g)$$

$$\beta_k = \frac{(\hat{r}_{k+1}, \hat{r}_{k+1})}{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)} \quad (29h)$$

$$\hat{p}_{k+1} = M^{-1} \tilde{r}_{k+1} + \beta_k \hat{p}_k \quad (29i)$$

식 (29)에 必要한 初期 값은 식 (30)으로 주어진다.

$$\begin{aligned} r_0 &= b - Ax_0, \\ \tilde{r}_0 &= A^* M^{-1} r_0 \\ \hat{r}_0 &= Q^{-1} \tilde{r}_0, \\ \hat{p}_0 &= M^{-1} \tilde{r}_0 \end{aligned} \quad (30)$$

식 (29)에서 距離인 α_k, β_k 는 同一한 複素數 벡터의 內積이므로 항상 陽의 값을 가진다. 行列 M^{-1} 을 구하는 方法은 前方置換과 後方置換 두 번의 치환법으로 計算된다. 식 (30)의 마지막 식을 예를 들어 설명하기 위해 두 벡터 z 와 z^* 를 導入하여 \hat{p}_0 를 z 로 나타낸다. 그리고 行列 M 을 앞에서 곱하면 식 (31)이 된다.

$$Mz = QQ^T z = \tilde{r}_0 \quad (31)$$

식 (31)을 置換法으로 計算하기 위해 벡터 z 와 z^* 를 사용하여 두 段階로 나눈다.

$$\begin{aligned} Qz^* &= \tilde{r}_0, \\ Q^T z &= z^* \end{aligned} \quad (32)$$

行列 Q 는 對角成分이 1인 Lower triangular 行列이므로 식 (32)의 첫째식은 주어진 벡터 \tilde{r}_0 에 대해 前方置換法으로 計算할 수 있다. 반면에 行列 Q^T 는 Upper triangular 行列이므로 앞에서 計算된 벡터 z^* 에 대해 後方置換法으로 計算된다. 한편 식 (29b)와 식 (29g)는 前方置換法으로만 計算됨을 알 수 있다.

식 (29)를 計算하기 위해서는 최소 8개의 벡터 $r, \tilde{r}, w, z, z^*, x, \tilde{u}$ 그리고 \hat{p} 을 모든 격자점에서 記憶해야 한다. 식 (29g)의 벡터 \hat{r} 은 식 (29i)의 行列 M^{-1} 을 구하는 과정에서 計算되는 z^* 이므로 이를 記憶할 필요가 없다. 每 段階 計算마다 식 (29a)와 식 (29f)에서 두 번의 行列과 벡터 곱셈이 필요하며 두 번의 行列 M^{-1} 을 위한 치환법 演算은 식 (29f)와 식 (29i)에 要求된다. 그리고 한 번의 前方置換 演算이 식 (29b)에 필요하다.

3.2.2 Strikwerda(1989) 演算技法

식 (15)로 표시된 연립방정식의 行列 A 에 隨伴行列 A^* 를 앞에서 곱해주어 自己隨伴行列로 만들고 이 되고 行列 Q^{-1} 을 앞에서 곱해주면

$$Q^{-1} A^* A x = Q^{-1} A^* b, \quad (33)$$

식 (33)에 $Q^{-T} Q^T = I$ 를 이용하면 식 (34)을 얻는다.

$$\tilde{A} \tilde{x} = \tilde{b} \quad (34)$$

여기서 $\tilde{A} = Q^{-1} A^* A Q^{-T}$, $\tilde{x} = Q^T x$ 그리고 $\tilde{b} = Q^{-1} b$ 이다.

원래의 變數로 다시 쓰면 식 (35)를 얻게 된다.

$$u_k = A \hat{p}_k \quad (35a)$$

$$\alpha_k = \frac{(Q^{-1} \tilde{r}_k, Q^{-1} \tilde{r}_k)}{(u_k, u_k)} \quad (35b)$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \hat{p}_k \quad (35c)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k u_k \quad (35d)$$

$$\tilde{r}_{k+1} = A^* r_{k+1} \quad (35e)$$

$$\beta_k = \frac{(Q^{-1} \tilde{r}_{k+1}, Q^{-1} \tilde{r}_{k+1})}{(Q^{-1} \tilde{r}_k, Q^{-1} \tilde{r}_k)} \quad (35f)$$

$$p_{k+1} = M^{-1} \tilde{r}_{k+1} + \beta_k p_k \quad (35g)$$

식 (35)에 必要한 초기 값은 식 (36)으로 주어진다.

$$\begin{aligned} r_0 &= b - Ax_0 \\ \tilde{r}_0 &= A^* r_0, \\ p_0 &= M^{-1} \tilde{r}_0 \end{aligned} \quad (36)$$

식 (35)를 計算하기 위해서는 최소 7개의 벡터 r , \tilde{r} , z , z^* , x , u 그리고 p 를 모든 格子點에서 기억해야 함으로 Bayliss 등(1983)의 演算技法 (29)보다 한 개 벡터의 기억용량이 줄어든다. 매 단계 計算마다 식 (35a)와 식 (35e)에서 두 번의 行列과 벡터 곱셈이 필요하며 한 번의 行列 M^{-1} 을 위한 置换법에 의한 演算은 식 (35g)에 요구되며 行列 Q^{-1} 과 벡터 \tilde{r} 의 곱은 行列 M^{-1} 과 벡터 \tilde{r} 의 곱(35g)의 計算과정중에 얻어짐으로 별도의 計算이 필요치 않게 된다. 따라서 이 技法은 Bayliss 등의 演算技法보다 計算量과 기억용량이 적은 잇점이 있다.

4. 結果 比較

본 절에서는 제 3절에서 유도된 演算技法의 同一한 條件에서 收斂速度를 檢討하기 위해 一定 水深 위를 지나는 波浪의 解析解와 數值解를 比較하였다. 제 3.2.1절의 Bayliss 등의 技法과 Strikwerda의 技法의 잔차벡터 식 (29e)와 식 (35d)는 數值에 차이가 있으므로 동일한 基準値를 이용하기 위해 식 (37)로 定義된 잔차벡터의 최대거리(maximum norm)을 오차(rmax)로 사용하였다.

$$rmax = \max |b_{ij} - Ax_{ij}|, \quad \text{for } i=0, M \text{ and } j=0, N \quad (37)$$

許容誤差(allowable error) ε 은 10^{-3} 으로 정했으며 檢證에 사용된 各種 變數는 表 1과 같다. 그리고 rmax는 解 벡터 x_k 가 計算된 후 每 段階에서 檢査하였고, 이 값이 허용오차보다 작아질 때까지 反復하였다.

表 1에 변수 이외에도 波浪 入射角 θ_0 (x 축의 양의 方向으로부터의 각)은 0, 20, 45 그리고 75를 사용하여 斜角 入射波浪의 경우를 檢討하였다. 數值模型의 結果는 線形波浪 分散式을 사용한 線形模型이며 表 1에 주어진 값을 사용하여 計算된 波長은 약 71미터로 波長當 약 14개의 格子 點을 포함 海면변위는

Table 1. Parameters used for method comparison

Water depth (m)	10
Wave period (sec)	8
Wave height (m)	1
Grid size (m)	5
Grid number	61×61
Relaxation parameter, ω	1.5
Allowable error, ε	0.001

線形 動力學的 境界條件으로부터 計算되고 數值結果는 식 (38)로 解析解(η_e)는 식 (39)로 각각 주어진다.

$$\eta_{i,j} = \frac{\sigma \text{Re}(\phi_{i,j})}{g \sqrt{CC_g}} \quad (38)$$

$$\eta_e = a \cos(k_x x + k_y y) \quad (39)$$

차분화식 (11)~(15)와 식 (38)의 添字는 外形上 배열(array)로 보이나 實際로는 벡터이다. 이는 計算 展開上 편리하며 k 段階에서 行列 A 와 벡터 p 의 곱인 벡터 u 는 식 (40)으로 표시된다.

$$u_{i,j} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{(i,j),(m,n)} p_{m,n} \quad (40)$$

여기서 첨자를 갖는 변수는 該當 行列 또는 벡터의 成分이다. 그러나 식 (40)을 模型에 그대로 이용하는 것은 프로그램하기에는 편하나 反復技術의 長點인 기억용량을 효율적으로 사용하는 점과 對峙됨으로 이를 피해야 한다. 그리고 行列 A 의 대부분의 成分이 零이므로 식 (40)으로 計算하는 것은 필요치 않은 곱셈을 하기 때문에 計算速度가 매우 늦게 되는 不利함도 있다. 따라서 본 論文에서는 零이 아닌 해당 成分만을 취해 프로그램하였다. 이 方法은 기억용량의 효율을 極大化하고 計算速度를 加速시키는 長點이 있는 반면에 模型에서 이를 具體적으로 표시해야 하는 어려움이 있다. 특히 行列 A^* 와 벡터와의 곱인 식 (29 f) 또는 (35e)의 경우를 例로 證明하면 行列 A 로부터 구해지는 行列 A^* 를 나타내고 零이 아닌 成分에 대한 곱으로 表示하는 過程은 복잡하며 어렵다. 이러한 경우는 行列 M^{-1} 와 벡터와의 곱에서도 行列 Q^T 로 인해 생긴다.

다음에서는 Preconditioner M 을 구성하는 行列 Q 를 구하는 方法을 기술하였다. 行列 Q 에 따라 收斂速度가 영향을 받으며 본 論文에서는 既存의 方法인

Table 2. Comparisons of iteration No., CPU time and L₂-error

θ ₀	Method 1			Method 2			Method 3			Method 4		
	Iteration No.	CPU time	L ₂ -error	Iteration No.	CPU time	L ₂ -error	Iteration No.	CPU time	L ₂ -error	Iteration No.	CPU time	L ₂ -error
0	956	145.2	5.95	1047	158.5	5.95	2010	234.5	5.95	2011	230.6	5.95
20	1055	159.1	1.09	1244	189.6	1.09	2651	313.4	1.09	2845	335.0	1.09
45	2535	392.8	1.47	2724	408.5	1.47	6600	772.1	1.47	6635	747.7	1.47
70	4351	679.7	3.49	4941	735.3	3.49	12579	1441.2	3.44	12753	1450.6	3.41

Bayliss 등의 方法을 包含하여 대역폭 종류의 技法을 比較하였다. Bayliss 등의 方法은 對角成分인 차분화식 (10)의 左邊 셋째항의 括弧안의 첫째항을 무시하고 식 (13), (14)의 實數部分만을 취해 行列 Q를 구성하였고 본 論文에서는 이를 方法 2(Method 2)라 指稱한다. 한편 方法 1(Method 1)은 境界條件式 (13), (14)의 對角成分을 該當 式에 나누어 對角成分이 1인 식으로 만든 후 對角成分보다 적은 점차를 갖는 左邊 첫째, 둘째항의 값중 실수부분을 취해 만들었다. 이는 境界에서 行列 Q가 行列 A의 情報를 보다 많이 사용한 것이다. 方法 3과 4는 行列 Q의 구성시 方法 1과 2와 같은 技法을 각각 사용하였으나 演算方式이 제 3.2.2절의 Strikwerda의 技法을 사용한 점이 다르다.

표 2에 각 方法의 最終 反復횟수, CPU 時間 그리고 식 (41)로 定義된 L₂-error을 나타내었다. 본 結果의 計算에는 486 DX2 66MHz 기종이 사용되었다.

$$L_2\text{-error} = \sqrt{\frac{1}{(M+1)(N+1)} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \left(\frac{\eta_{i,j} - \eta_e}{\eta_e} \right)^2} \quad (41)$$

表 2에 제시된 結果는 同一한 入射波向에서는 동일한 許容誤差에 도달한 L₂-error는 각 方法에 따라 달라 변하지 않고 거의 일치하므로 計算의 각 方法의 精密度는 同一한 것으로 判斷된다. 直交入射의 경우에 L₂-error가 가장 큰 이유는 그림 2에서 보인 바와 같이 數值解는 y축에 따라 一定하며 解析解가 零에 가깝고 두 解의 次異가 상당한 값을 가질 때는 L₂-error의 값도 상당한 값을 갖기 때문인 것으로 추정된다. 한편 Strikwerda의 技法인 方法 3과 4의 行列 Q의 구성시 行列 A*A에 대한 行列 Q를 만들면 표 2에 제시된 收斂速度보다 빠른 結果를 얻을 것으로 推定한다. 行列 A*A는 行列 A보다 成分이 많고 行列 Q로 나

타내는 데 많은 노력과 어려움이 豫想된다. 또한 이 方法의 가장 큰 弱點은 防波堤와 같은 不規則한 境界에서는 이 점이 더욱 어려울 것으로 생각됨으로 본 論文에서는 이를 다루지 않았다.

收斂速度는 方法 1이 모든 入射波向에 대해 빠르므로 方法 1이 最適의 技法인 것으로 判斷된다. 따라서 以後부터는 方法 1을 사용한 數值模型의 結果 및 行列 Q의 構成 技法을 좀더 세밀히 검토하였다.

그림 2에는 方法 1로 구한 해면변위의 數值解는 實線으로 解析解는 點線으로 세 개의 선정된 斷面 i=30, i=60 그리고 j=30에서 주어진 4개의 入射波浪에 대해 比較하였다. 方法 1을 사용한 數值模型은 入射角이 커질수록 x축의 값이 增加할 수록 精密度가 떨어지는 것으로 나타났다. 따라서 入射角에 영향을 덜 받도록 數值模型(徐, 1990)을 改善할 必要가 있다. 그러나 入射角이 협각인 경우 數值解는 만족할 만한 精密度를 보이는 것으로 판단된다.

그림 3에는 方法 1로 주어진 入射角에 대해 計算한 rmax를 反復횟수에 대해 나타내었다. 計算된 rmax는 빠른 振動을 보이기 때문에 10段階마다 平均한 값을 사용하였으나 여기에서도 反復횟수에 따른 振動이 생기는 것으로 나타났다. 주어진 許容誤差에 入射角이 작을 수록 收斂速度가 빠르다. 그림의 結果를 해석할 때 주의할 점은 종축은 log₁₀로 표시되었으므로 PCGM의 誤差는 初期에는 매우 急速히 減少하나 점차 減少率이 緩慢해짐을 指摘하고자 한다.

그림 4는 行列 Q를 구성할 때 위에서 언급한 方法 1과 같은 方法을 境界에서 사용하되 差分化式 (10)의 對角成分을 모두 사용한 것을 方法 1a(Method 1a)로 나타낸 반면에 方法 1b는 식 (10)의 對角成分의 둘째와 셋째항의 부호를 바꾸어 사용하였다. 그림에서 알 수 있듯이 方法 1의 收斂速度가 제일 좋은 것으로

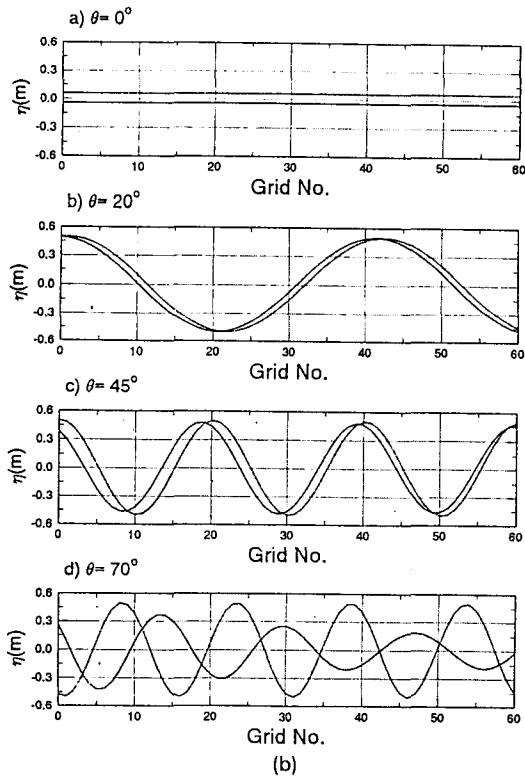
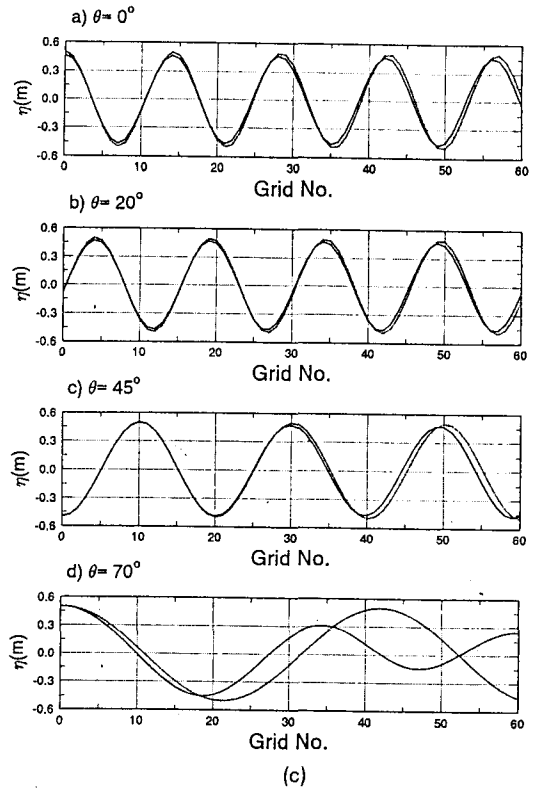
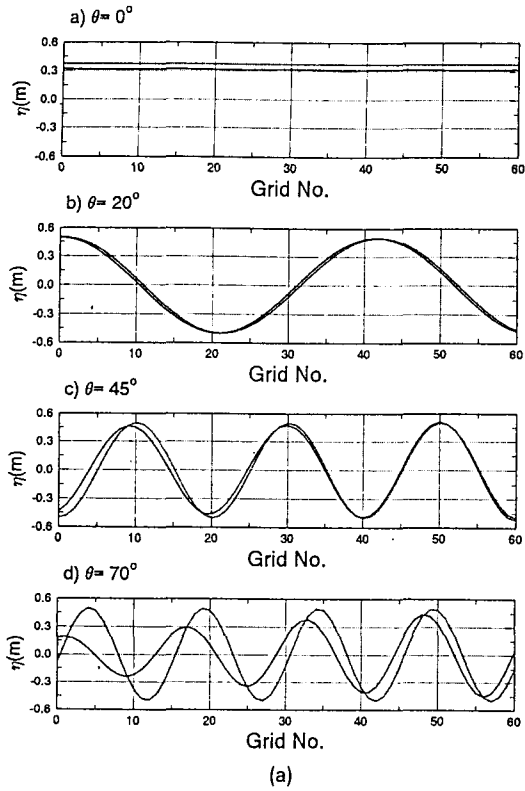


Fig. 2. (a) Comparison of surface displacement for Section $i=30$, (b) Comparison of surface displacement for Section $i=60$, (c) Comparison of surface displacement for Section $i=75$: — Numerical; ---- Exact.

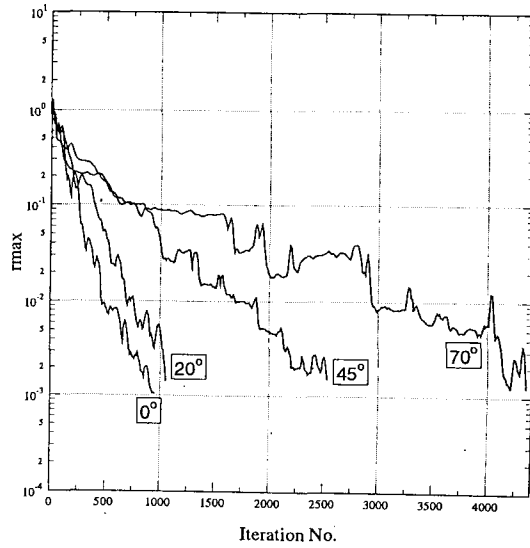


Fig. 3. Maximum norm of residual vectors by Method 1.

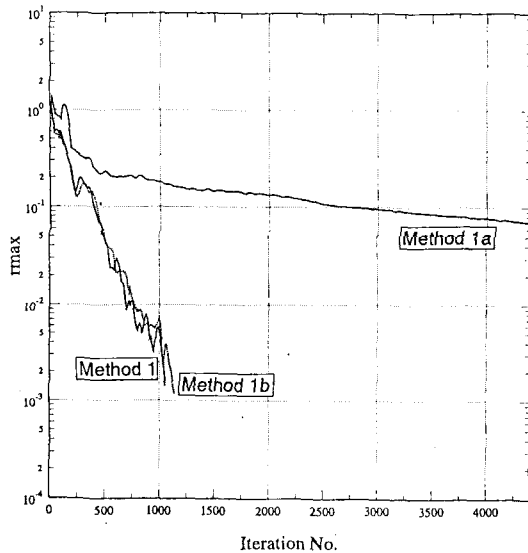


Fig. 4. Maximum norm of residual vectors from various preconditioners based on Method 1, $\theta_0=20^\circ$.

나타났다.

결론적으로 方法 1에 의한 數值技法이 緩傾斜 波浪式을 PCGM으로 計算하는 데 收斂速度 및 精密度가 가장 좋은 技法으로 判斷된다.

5. 結 論

緩傾斜 波浪式을 反復技法인 PCGM으로 計算하는 方法을 記述하고 그 特性을 分析하였다. 주어진 精密度에 이르는 收斂速度를 比較하여 最適인 演算技法을 提示하였다. 數值解의 精密度를 比較하기 위해 一定 水深 위를 지나는 斜角入射의 線形 平面波의 解析解와 比較하였고 本 論文에서 提示된 最適技法인 方法 1은 入射角이 狹角인 경우 매우 優秀한 技法이나 入射角이 커질수록 精密度가 減少함으로 이를 補完하는 研究가 필요한 것으로 判斷된다.

따라서 入射波向과 거의 같은 方向으로 격자망을 구성하고 方法 1을 사용한 數值模型은 淺海波 算定 및 港灣 靜穩度 分析에 이용할 수 있는 緩傾斜 波浪

式의 數值解析에 効果적인 演算方法으로 判斷된다.

감사의 글

本 研究는 1994년 韓國海洋研究所에서 실시한 出捐研 研究開發事業(PN00261)의 中間 研究結果이며 研究費 支援에 感謝를 드립니다.

參考文獻

徐承男, 1990. 拋物形 近似式에 의한 淺海波 算定모델, 韓國海岸·海洋工學會誌, 2(3): 134-142.
 尹鍾台, 1993. CGM을 이용한 緩傾斜方程式의 數值解析, 韓國海岸·海洋工學會誌, 5(2): 84-90.
 Bayliss, A., Goldstein, C.I. and Turkel, E., 1983. An iteration method for the Helmholtz equation, *J. Comput. Phys.*, 49: 443-467.
 Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, *Proc. 13th Conf. Coastal Engng.*, ASCE, 1: 471-490.
 Berkhoff, J.C.W., Booij, N. and Radder, A.C., 1982. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear waves, *Coastal Engng.*, 6: 255-279.
 Ito, Y. and Tanimoto, K., 1972. A method of numerical analysis of wave propagation - Application to wave diffraction and refraction, *Proc. 13th Conf. Coastal Engng.*, ASCE, 1: 503-522.
 Jain, M.K., Iyengar, S.R.K. and Jain, R.K., 1985. *Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation*, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, India.
 Jennings, A. and McKeown, J.J., 1992. *Matrix Computation*, 2nd ed., John Wiley and Sons, Chichester, England.
 Lee, J.J., 1971. Wave induced oscillations in harbours of arbitrary geometry, *J. Fluid Mech.*, 45: 375-394.
 Mei, C.C., 1989. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific Publishing Co., Singapore.
 Panchang, V.J., Pearce, B.R., Wei, G. and Cushman-Roisin, B., 1991. Solution of the mild-slope wave equation by iteration, *Applied Ocean Res.*, 13: 187-199.
 Strikwerda, J.C., 1989. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Wadsworth, Inc., Belmont, Calif.
 Watanabe, A. and Maruyama, K., 1986. Numerical modeling of nearshore wave field under combined refraction, diffraction and breaking, *Coastal Engng. in Japan*, 29: 19-39.