

類似變換技法을 利用한 Galerkin-FEM모델 A Three-Dimensional Galerkin-FEM Model Using Similarity Transform Technique

姜官秀* · 蘇在貴** · 鄭景太**

Kwan Soo Kang*, Jae Kwi So** and Kyung Tae Jung**

要 旨 : 本 論文에서는 水平流速의 鉛直方向 變化 결정에 有限要素技法(FEM)을 이용하고 水平方向으로는 有限差分技法을 사용하는 複合형 Galerkin 연직함수 전개모델에 새로이 類似變換技法을 추가한 3차원 해수유동모델의 개발에 대하여 記述하였다. 基本方程式의 연직방향으로 선형보간함수를 기저함수로 사용하여 Galerkin 기법을 適用하여 구성되는 行列 方程式에 類似變換技法을 적용, 各 절점의 유속값을 해석적으로 구하였다. 類似變換技法을 적용하여 최종 얻어지는 모우드 shape 방정식은 비연계된 방정식으로 구성되므로 역행렬 계산이 필요없어 계산시간이 절약된다. 또한 수립된 모델은 고유벡터행렬로 구성되는 모우드 shape가 도입됨으로써 모우드 shape 몇개만 사용하여도 거의 수립된 값을 얻을 수 있어 계산시간을 절약할 수 있다. 등수심하 유한영역과 무한영역에서의 수치실험을 통하여 개발된 모델의 適用 可能性을 檢證하였다.

Abstract □ This paper presents a modal solution of linear three-dimensional hydrodynamic equations using similarity transform technique. The solution over the vertical space domain is obtained using the Galerkin method with linear shape functions (Galerkin-FEM model). Application of similarity transform to resulting tri-diagonal matrix equations gives rise to a set of uncoupled partial differential equations of which the unknowns are coefficients of mode shape vectors. The proposed method is computationally efficient because matrix inversion is no longer required and use of a small number of mode vectors guarantees fast convergence. To examine model performance the model is applied to oscillatory motion in infinite region as well as steady wind induced motion in finite and infinite regions of constant depth.

1. 緒 論

本 論文은 姜 等(1993a)의 후속 연구로서 等密度 海水에 형성되는 吹送 流速의 鉛直方向 變化를 基底 函數(basis function)로 線形補間函數를 사용하여 전개한 後 Galerkin 기법 적용에 따라 구성되는 연립 방정식에 類似變換技法을 도입하여 해를 구하는 類似變換技法 이용 Galerkin-FEM 모델 개발을 다룬다. 유사변환기법을 사용할 경우 흔히 구조해석 분야에서 모우드 shape로 불리우는 고유벡터 行列의 계수를 결정하는 비연계된 초기 및 경계치문제(initial and boundary value problem)로 간략화되어 물리적 이해

및 경제성 제고를 도모할 수 있다. 類似變換技法을 사용한 기존의 연구로는 비선형항을 포함하여 강 등 (1993b)이 기저함수로 Chebyshev 다항식 함수를 사용한 바 있다. 선형보간함수를 기저함수로 사용할 경우 Galerkin 해는 3중 대각행렬을 포함하는 行列 方程式 형태로 주어지며 各 절점의 유속값을 구하기 위해서는 잘 알려진 Thomas algorithm을 이용하거나 여타의 방법을 사용하여 역행렬을 구하고 行列方程式을 푸는 行列計算이 요구된다. 그러나 유사변환기법을 적용할 경우 역행렬 계산이 불필요하고 비연계된 방정식의 해를 해석적으로 구할 수 있다. 또한 주된 모우드 shape만 사용하여도 해에 수립하여 계산시간

*서울대학교 공과대학 토목공학과 (Department of Civil Engineering, Seoul National University, Seoul, Korea)

**한국해양연구소 해양공학연구부 (Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea)

이 절약된다.

모델의 검증과 적용성을 검토하기 위하여 유한영역과 무한영역에서의 수치실험을 수행하였다. 유한영역 수치실험은 1차원수로에서의 결과를 해석해와 비교하고 기존의 Davies와 Owen(1979), 강 등(1993a)의 연구와 동일한 조건(Heaps' basin)에 대해 수치실험을 수행, 비교하였으며 무한영역 수치실험은 1차원 무한수로에서의 결과를 해석해와 비교하고 점모델(point model) 실험을 수행, 수치반응을 검토하였다.

2. 3次元 流體運動方程式 및 鉛直函數 展開 技法에 의한 解

2.1 연직변환 좌표계하의 기본방정식

水平方向 擴散項, 비선형 移流項을 무시하고 靜水壓條件(hydrostatic approximation) 및 等海水密度(homogeneous water)를 가정하고 불규칙 수심영역에서의 적용을 용이하게 하기 위하여 $\sigma = (a-b)(z/h) + b$ 의 σ 변환을 도입하여 변환된 기본방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h}{a-b} \int_b^a u \, d\sigma \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{h}{a-b} \int_b^a v \, d\sigma \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma v = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{a-b}{h} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma u = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{a-b}{h} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \quad (3)$$

- 여기서, x, y : 平面上的 東向, 北向 直交座標系,
- σ : 平均海面下的 垂直座標,
- t : 時間,
- ξ : 平均海面上的 海水位,
- u, v : 水深 z 에서의 x, y 方向 流速 成分,
- ρ : 海水密度,
- γ : Coriolis 係數,
- g : 重力加速度

해수면과 해저면에서의 境界條件은 다음과 같다.

$$-\left(\frac{a-b}{h} \right) \left(\rho N \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_s = F_s, \quad -\left(\frac{a-b}{h} \right) \left(\rho N \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_s = G_s, \quad (4)$$

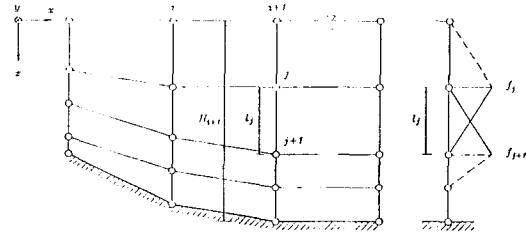


Fig. 1. Depth discretization and linear shape functions.

$$-\left(\frac{a-b}{h} \right) \left(\rho N \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_B = F_B, \quad -\left(\frac{a-b}{h} \right) \left(\rho N \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_B = G_B, \quad (5)$$

여기서 F_s, G_s 는 해수면상 바람응력의 x, y 방향성분을 나타내며 F_B, G_B 는 海底面 摩擦應力の x, y 방향성분을 나타낸다.

海底面 摩擦應力이 海底面 流速에 선형적으로 비례한다고 가정하는 경우

$$F_B = k\rho u_h, \quad G_B = k\rho v_h, \quad (6)$$

로 표현할 수 있으며, k 는 상수 또는 x, y 의 함수인 海底面 摩擦係數이고 u_h, v_h 는 x, y 방향 성분의 海底面 流速이다. 海底面 摩擦應力이 海底面 流速과 非線形關係를 가지는 경우는 다음과 같이된다.

$$F_B = K\rho u_h (u_h^2 + v_h^2)^{1/2}, \quad G_B = K\rho v_h (u_h^2 + v_h^2)^{1/2} \quad (7)$$

K 는 海底面 摩擦係數를 나타낸다.

경우에 따라서 아래와 같은 비활동조건(no-slip condition)이 사용되기도 한다.

$$u_h = v_h = 0 \quad (8)$$

2.2 선형보간함수(linear interpolation function)를 이용한 Galerkin기법의 적용

본 절에서 Fig.1과 같이 일부 구간에서만 정의되는 선형보간함수를 이용하는 Galerkin 해법에 대하여 논한다. Fig.1에서 (x, y, z) 는 직교좌표계에서 위치를 나타내며, i 는 수평격자의 격자번호, H_{i+1} 는 $(i+1)$ 격자의 총수심, j 는 연직방향으로의 절점번호(node number), l_j 는 j 번째 요소의 길이를 나타낸다. 기저함수로 선형보간함수를 사용하였을 경우의 Galerkin 解法은 기저함수로 연속함수를 사용한 경우와 유사하며 각 要素별로 먼저 계산한 다음 조합(assemble)

하는 과정이 추가될 뿐이며 최종적으로 나타나는 방정식의 형태는 어떤 기저함수를 사용하더라도 결과는 같다. 따라서 여기에서는 선형보간함수를 사용하였을 경우 한 요소에 대하여 정리하고 조립(assemble)하는 과정을 중심으로 기술하고자 한다.

먼저 시간과 공간의 함수인流速 $u(x, y, \sigma, t)$, $v(x, y, \sigma, t)$ 을鉛直座標 σ 의 함수인 $f_j(\sigma)$ 와水平座標 및 시간의 함수인 계수 $u_j(x, y, t)$, $v_j(x, y, t)$ 를 사용하여 다음과 같이 전개한다.

$$u(x, y, \sigma, t) = \sum_{j=1}^m u_j(x, y, t) f_j(\sigma) \quad (9)$$

$$v(x, y, \sigma, t) = \sum_{j=1}^m v_j(x, y, t) f_j(\sigma) \quad (10)$$

여기서, m 은節點(node)갯수이고, $f_j(\sigma)$ 은 선형보간함수로 다음과 같이 정의된다.

$$f_1(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1} & \text{if } \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$f_j(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma - \sigma_{j-1}}{\sigma_j - \sigma_{j-1}} & \text{if } \sigma_{j-1} \leq \sigma \leq \sigma_j \\ \frac{\sigma_{j+1} - \sigma}{\sigma_{j+1} - \sigma_j} & \text{if } \sigma_j \leq \sigma \leq \sigma_{j+1} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (11)$$

$$f_m(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma - \sigma_{m-1}}{\sigma_m - \sigma_{m-1}} & \text{if } \sigma_{m-1} \leq \sigma \leq \sigma_m \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

여기서, $\sigma_j (j=1, 2, \dots, m)$ 는 절점좌표이다.

j 번째 요소내, 즉 $\sigma_j \leq \sigma \leq \sigma_{j+1}$ 의 유속을 u^e, v^e 로 표시하고, 즉

$$\begin{aligned} u^e &= f_j u_j + f_{j+1} u_{j+1} \text{ or } \{f_j^T\}^T \{u\}, \\ v^e &= f_j v_j + f_{j+1} v_{j+1} \text{ or } \{f_j^T\}^T \{v\}, \end{aligned} \quad (12)$$

j 번째 요소에서의 영역을 $\sigma_j \leq l_j \leq \sigma_{j+1}$ 라 정의하고 Galerkin기법의 첫 단계과정으로 x -방향 운동방정식에 기저함수로 선형보간함수 $f_j(\sigma)$ 을 곱하고 j 번째 요소에서 정리하면 다음 식으로 이루어진다.

$$\begin{aligned} \int_{l_j} \frac{\partial u^e}{\partial t} \{f\} d\sigma &= \gamma \int_{l_j} v^e \{f\} d\sigma - S_x \int_{l_j} \{f\} d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_{l_j} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial u^e}{\partial \sigma} \right) \{f\} d\sigma \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$$S_x = g \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (14)$$

식 (13)의 이차미분항은 다음과 같이 부분적분된다.

$$\begin{aligned} \int_{l_j} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial u^e}{\partial \sigma} \right) \{f\} d\sigma &= \left[N \frac{\partial u^e}{\partial \sigma} \cdot \{f\} \right]_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}} \\ &\quad - \int_{l_j} \left(N \frac{\partial u^e}{\partial \sigma} \right) \cdot \{f'\} d\sigma \end{aligned} \quad (15)$$

따라서 식 (13)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_{l_j} \{f\} \{f\}^T d\sigma \{\dot{u}\} = -\frac{1}{h} \int_{l_j} N \{f'\} \{f'\}^T d\sigma \{u\} - \{P_x^e\} \quad (16)$$

여기서,

$$\{\dot{u}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial t} \\ \frac{\partial u_{j+1}}{\partial t} \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix}, \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \{P_x^e\} &= \gamma \int_{l_j} \{f\} \{f\}^T d\sigma \{v\} - S_x \int_{l_j} \{f\} d\sigma \\ &\quad - \left[\frac{1}{h^2} N \{f\} \{f'\}^T \{u\} \right]_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}} \end{aligned} \quad (18)$$

이상과 같이 정리하면 j 번째요소에서 다음과 같은 방정식 형태로 표시할 수 있다.

$$\int_{l_j} \{f\} \{f\}^T d\sigma \{\dot{u}\} = \frac{1}{h^2} \int_{l_j} N \{f'\} \{f'\}^T d\sigma \{u\} - \{P_x^e\} \quad (19)$$

鉛直運動量擴散係數 N 은 j 번째 요소에서 다음과 같이 처리하여 두 절점사이의 관계식을 선형으로 처리하였다.

$$N_e = \{f\} \{\phi\}^T \quad (20)$$

여기서 $\{\phi\}^T = \{\phi_j, \phi_{j+1}\}$ 로서 절점에서의 상수값으로 주어진다.

$$[K^e]\{\dot{u}\} = -\frac{1}{H^2}[D^e]\{u\} + \{P_x^e\} \quad (21)$$

여기에서 행렬 K^e , D^e 다음과 같이 표현되는 2×2 행렬이다.

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_j} f f_j d\sigma & \int_{\Omega_j} f f_{j+1} d\sigma \\ \int_{\Omega_j} f_j f_j d\sigma & \int_{\Omega_j} f_j f_{j+1} d\sigma \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[D^e] = \begin{bmatrix} \Phi_j \int_{\Omega_j} f f_j' f_j' d\sigma & \Phi_j \int_{\Omega_j} f f_j' f_{j+1}' d\sigma \\ \Phi_{j+1} \int_{\Omega_j} f_j f_{j+1}' f_j' d\sigma & \Phi_{j+1} \int_{\Omega_j} f_j f_{j+1}' f_{j+1}' d\sigma \end{bmatrix} \quad (23)$$

각 요소들을 조합(assembly)하여 정리하면 전체(global)행렬은 다음과 같이 구성된다.

$$[K]\{\dot{u}\} = -\frac{1}{h^2}[D]\{u\} + \{P_x\} \quad (24)$$

여기서 $[K]$, $[D]$ 는 $(m \times m)$ 3중 대각행렬이 되고 $\{P_x\}$ 는 m 개의 요소를 갖는 행벡터이다. $\{P_x\}$ 는 전항력항, 해수면 구배항, 연직운동량확산계수와 관련된 항들의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$\{P_x\} = \{P_{xy}\} + \{P_{xs}\} + \{P_{xb}\} \quad (25)$$

이들 각 벡터는 각 요소벡터의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \{P_{xy}\} &= \sum_e \{P_{xy}^e\} \\ &= \sum_e \gamma \int_{\Omega_j} f f^T d\sigma \{v\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \{P_{xs}\} &= \sum_e \{P_{xs}^e\} \\ &= \sum_e S_x \int_{\Omega_j} f d\sigma \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \{P_{xb}\} &= \sum_e \{P_{xb}^e\} \\ &= \sum_e \left[-\frac{1}{h} N f f^T \{u\} \Big|_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

여기서, $\{P_{xb}\}$ 는 경계조건에 의해 결정되는 항으로 조합하는 과정에서 첫번째 절점값과 마지막 절점값을 제외하고는 서로 상쇄되며 첫번째와 마지막 절점에서

다음과 같이 주어진다.
해수면 경계조건 :

$$\frac{1}{h} N f'(\sigma_1) f(\sigma_1) u(\sigma_1) = \frac{F_s}{\rho} \quad (29)$$

해저면 경계조건 :

$$\frac{1}{h} N f'(\sigma_m) f(\sigma_m) u(\sigma_m) = \frac{F_b}{\rho} \quad (30)$$

y 방향 운동방정식은 비슷한 형태로 다음과 같은 행렬방정식이 구성된다.

$$[K]\{\dot{v}\} = -\frac{1}{h^2}[D]\{v\} + \{P_y\} \quad (31)$$

여기서,

$$\{P_y\} = \{P_{yy}\} + \{P_{ys}\} + \{P_{yb}\} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \{P_{yy}\} &= \sum_e \{P_{yy}^e\} \\ &= \sum_e \gamma \int_{\Omega_j} f f^T d\sigma \{u\} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \{P_{ys}\} &= \sum_e \{P_{ys}^e\} \\ &= \sum_e S_y \int_{\Omega_j} f d\sigma \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \{P_{yb}\} &= \sum_e \{P_{yb}^e\} \\ &= \sum_e \left[-\frac{1}{h} N f f^T \{v\} \Big|_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

2.3 類似變換技法을 利用한 각 절점별 流速 計算

x 방향 Galerkin해인 식 (24)에 類似變換技法을 적용한다. 편의상 식 (24)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$[K]\{\dot{u}\} = -\frac{1}{h^2}[D]\{u\} + \{P_x\} \quad (24)$$

$[K]^{-1}[D]$ 의 고유벡터, $\{\gamma\}$ 와 固有值, λ 는 다음 식으로부터 결정될 수 있다.

$$(\lambda[K] - [D])\{\gamma\} = \{0\} \quad (36)$$

m 개의 절점을 사용할 경우 식 (36)으로부터 m 개의

고유치, $\lambda_n, n=1, \dots, m$ 과 고유벡터, $[\{\gamma_n\}], n=1, \dots, m$ 을 구할 수 있다. 실제 수치계산에서는 SSP 패키지를 사용하였다(SSP Programmer's Manual, 1970).

식 (24)에 類似變換技法를 적용하기 위하여 $\{u\}$ 를 다음 식과 같이 變換한다.

$$\{u\} = [\Gamma]\{\Psi\} \quad (37)$$

여기에서, $[\Gamma]$ 는 앞서 표현된 고유벡터의 行列 형태이고, $\{\Psi\}$ 는 일반좌표계의 行벡터이다.

식 (24)에 $[\Gamma]^T$ 를 곱하면 다음 식과 같이 표현될 수 있다.

$$[\Gamma]^T[K][\Gamma]\{\dot{\Psi}\} = -\frac{1}{H^2}[\Gamma]^T[D][\Gamma]\{\Psi\} + \{P'_x\} \quad (38)$$

여기에서, $\{P'_x\} = [\Gamma]^T\{P_x\}$ 이고, 고유벡터 行列인 $[\Gamma]$ 는 $[K], [D]$ 行列에 대해서 직교성을 가지므로 $[\Gamma]^T[K][\Gamma], [\Gamma]^T[D][\Gamma]$ 는 대각성분만이 존재하며, 각각의 대각성분을 α_n, β_n 라 하면 식 (38)은 다음과 같은 독립적인 方程式 형태로 표시할 수 있다.

$$\dot{\Psi}_n = \lambda_n \Psi_n + \frac{P'_{xn}}{\alpha_n} \quad (n=1, \dots, m) \quad (39)$$

여기에서, $\lambda_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}$ 이다.

그런데 식 (39)는 고유치 즉 λ_n 가 특정 상수 값을 가질 경우 解析解를 구할 수 있는 데 고유치가 0일 경우 식 (39)는 다음 식과 같이 표현된다.

$$\dot{\Psi}_n = \frac{P'_{xn}}{\alpha_n} \quad (n=1, \dots, m) \quad (40)$$

따라서 식 (39)과 (40)은 초기치를 알 수 있을 경우 解析解를 구할 수 있다. 초기치를 $t=0$ 일 때 $\Psi_n = \Psi_n^0$ 이라고 하면 解析解는 다음과 같다.

i) λ_n 가 0이 아닐 경우,

$$\Psi'_n = (\Psi_n^0 - \Lambda_n)e^{\lambda_n t} + \Lambda_n \quad (n=1, \dots, m) \quad (41)$$

여기에서, $\Lambda_n = -\frac{1}{h^2} \lambda_n, \Lambda_n = \frac{P'_{xn}}{\alpha_n}$ 이며,

ii) λ_n 가 0일 경우,

$$\Psi'_n = \Psi_n^0 + \frac{P'_{xn}}{\alpha_n} t \quad (n=1, \dots, m) \quad (42)$$

식 (41), (42)를 이용하여 일정 시간에서의 Ψ'_n 를 구하면 식 (37)를 이용 각 절점의 유속을 구할 수 있다. y 방향의 해는 식 (31)에 유사변환기법을 적용 유사하게 구할 수 있다.

실제 수치계산에 사용되는 모우드 shape는 유사변환기법을 사용해서 나타나는 식 (37)의 고유벡터행렬 $[\Gamma]$ 의 行벡터로 나타나는 데 절점수를 11개 사용하였을 경우 모우드 shape, 즉 고유벡터 행렬은 바닥 경계조건과 연직운동량확산계수의 연직분포에 따라 달리 나타난다. 鉛直運動量擴散係數의 연직분포가 균일한 분포를 가질 경우 활동조건에 따른 모우드 shape는 Fig. 2와 같고 비활동조건에 따른 모우드 shape는 Fig. 3과 같다. 각 모우드 shape의 번호는 $[\Gamma]$ 의 行벡터의 차례이다. 즉 모우드 shape 번호가 1인 경우는 고유벡터 행렬 $[\Gamma]$ 의 첫번째 行벡터이다. Fig. 2~3에서 보면 알 수 있지만 모우드 shape 번호가 증가할수록 zero-crossing이 정확히 하나씩 증가하는 것을 알 수 있고 모우드 shape 모양이 매끄럽지 않은 것은 선형보간함수를 사용하였기 때문이다. B-spline 함수를 사용할 경우는 보다 매끄럽게 표현된다. 모우드 shape의 형태로써 물리적현상을 설명할 수 있는데 Fig. 2인 경우 첫번째 모우드 shape는 수심평균 유속, 두번째 모우드 shape는 상하층 유속이 다른 성분을 의미하며 모우드 shape가 증가할수록 기여도가 작게된다. 또한 구하고자 하는 유속의 절점값은 모우드 shape로 분리되어 계산시간을 절약할 위해 지배적인 모우드 shape 몇개만 사용해도 만족할 만한 精度(accuracy)를 얻을 수 있다. 이상과 같은 방법으로 구한 유속은 앞서도 논의하였지만 일정시간 단계에서 해를 해석적으로 구할 수 있어 $[K]$ 行列의 역행렬을 구하지 않아도 되기 때문에 行列 계산시간을 절약할 수 있다.

3. 數值實驗 및 結果

3.1 等水深 有限領域에서의 實驗

3.1.1 一次元 有限水路에서의 實驗

數值計算時 가상한 1차원 수로는 Fig. 4와 같다. 수로의 길이는 150 km이며, 格子間隔은 $\Delta x = \Delta y =$

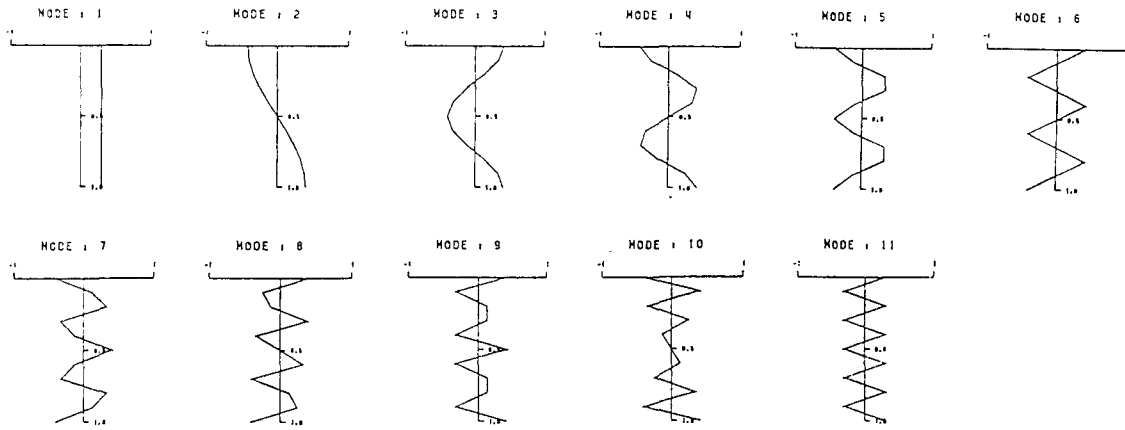


Fig. 2. Mode shapes computed using a slip condition with 11 nodes.

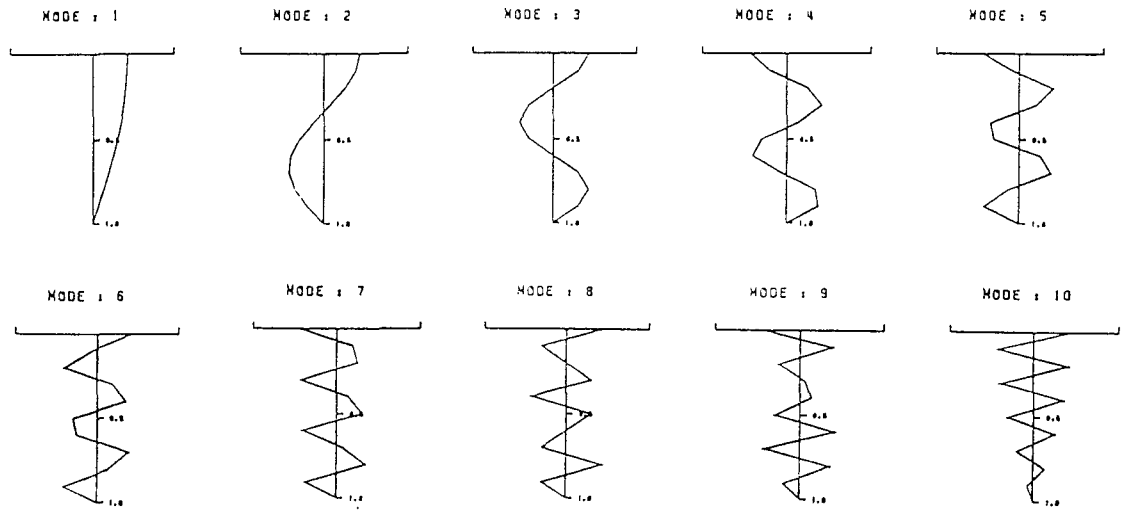


Fig. 3. Mode shapes computed using a no-slip condition with 11 nodes.

500m, 수심은 20m, 수로의 격자수는 x방향 300개로 하였다. 바람은 Fig. 4와 같이 +x방향으로 定常均一風 (steady, uniform wind field)이 가해지도록 하였으며, y방향의 모든 계산을 무시했기 때문에 지구전향력 효과 또한 무시되었다. 모델계산에서는 양쪽 끝을 폐쇄경계로 하였으며, 시간 간격을 30초로 하여 정상상태에 다다른 6000단계의 계산후에 수로 中間地點의 연직유속분포를 해석해(소 등, 1992)와 비교하였다.

기저함수로 Chebyshev 다항식함수를 사용할 경우 연직변환상수 a, b 는 활동 조건일 때 $a = -1, b = 1,$

비활동조건일 때 $a = -1, b = 0$ 으로 주어지며 해저면조건을 만족시키는 홀수번호의 함수가 사용된다. 이 경우 Chebyshev 다항식함수는 홀수번호의 함수 5개를 사용한 결과와 절점수 3, 6, 11개의 선형보간함수를 사용하였을 경우를 비교하였다. 모델계산 연직유속분포 Fig. 5에 나타난 바와 같이 基底函數로 Chebyshev 다항식함수를 5개 사용한 경우 海水面 流速은 解析解와 거의 일치하였으나 전반적인 연직유속분포의 재현에 있어서 약간의 차이가 있음을 알 수 있고 절점수를 3개 사용하였을 경우 해석해와의 차이가 많이 나고 6개를 사용하였을 경우 전반적인 연직유속분포

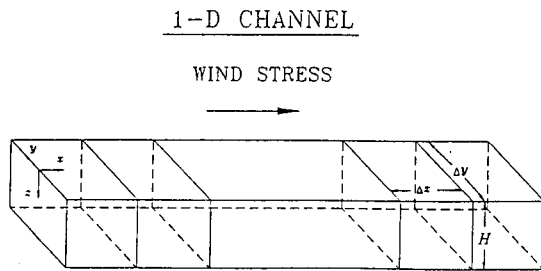


Fig. 4. Definition sketch of one-dimensional channel.

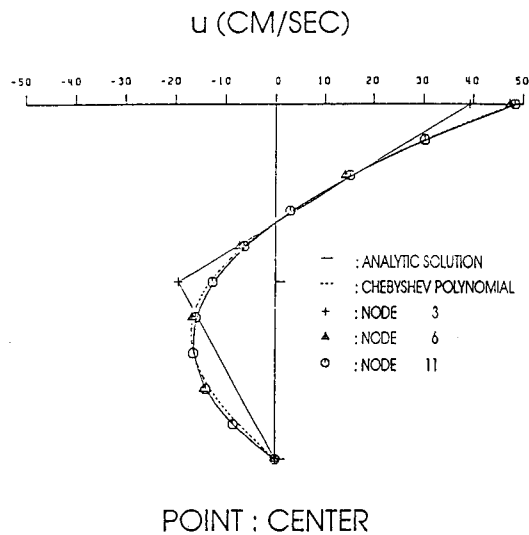


Fig. 5. Comparison of steady velocity profiles for 1-D closed channel with constant eddy viscosity.

는 잘 재현하고 있으나 해석해와 비교해 볼 때 값이 약간 작게 계산됨을 알 수 있다. 절점수를 11개를 사용한 결과는 전반적인 유속 경향이 해석해와 거의 일치하게 나타남을 알 수 있다. 이 결과로 볼 때 Galerkin-FEM모형을 사용할 경우 사용한 절점수에 따라 해의 정확성에 영향을 미친다는 것을 알 수 있어 실제 유속 재현시 원하는 정도에 따라 절점수의 선택이 요구된다 하겠다.

3.1.2 長方形 領域(Heaps' Basin)에서의 實驗

기존연구(Heaps, 1972; Davies and Owen, 1979; 강 등, 1993a)와 동일한 조건하에서 수치실험을 수행하여 기존의 연구 결과와 비교 검토하고 Galerkin-spectral모형과 Galerkin-FEM 모형의 반응을 검토하였다. Galerkin-FEM 모형의 경우 절점수와 고유벡터 행렬로 나타나는 모우드 shape수의 차이에 의한 해의

정확성에 대해서도 논의된다.

計算 領域 400 km×800 km에 9×17개의 格子網을 구성하였으며 전향력상수는 0.44 h⁻¹로 주었다. 陸地 境界條件은 閉境界條件을 사용하였다. 계산에 사용된 격자체계는 Staggered 격자체계(grid system)인 Arakawa-C 형태의 격자체계를 사용하였으며 격자망은 기존연구(소 등, 1992; 강 등, 1993)와 동일하다. 연 직변환상수 α, β는 기저함수로 Chebyshev 다항식함수를 사용한 경우 활동조건에 따라 a=-1, b=1, a=-1, b=0를 사용하였으며 선형보간함수를 사용할 경우에 a=0, b=1를 사용하였다. 水深은 일정 수심 65 m를 주었으며 북풍에 의한 취송류 실험시 바람응력 -1.5 N/m²를 전 영역에 일정하게 주었다.

본 연구에서 수행한 數值實驗은 다음과 같다.

1) 實驗 1 : 鉛直 運動量擴散係數의 鉛直分布를 常數 N=0.065 m²/s, 海底面 摩擦應力의 계산시 線形 摩擦關係式(linear friction law)을 사용하였고(海底面 摩擦係數는 k=0.002 m/sec) Davies모형과 Galerkin-spectral모형, Galerkin-FEM모형의 절점수 차이에 따른 결과 비교 실험.

2) 實驗 2 : 실험 1과 동일한 조건하에서 Galerkin-FEM모형의 절점수를 11개를 사용하여 모우드 shape수에 따른 반응 실험.

수치실험에서 계산시간 간격은 Galerkin-FEM모형과 Galerkin-spectral모형의 경우 360초로 하였고 Davies모형의 경우는 기저함수로 Chebyshev 다항식함수 6개를 사용하고 계산시간 간격은 100초로 주었다. 30시간 후의 영역 중앙점(기존 연구 강 등(1993)의 A점)의 결과를 제시한다.

實驗 1 :

30시간 경과 후의 실험 1의 유속연직분포는 Fig. 6과 같다. Davies모형과 Galerkin-spectral모형의 결과는 기저함수로 Chebyshev 다항식함수 6개를 사용한 결과이다. 그림에서도 알 수 있듯이 Davies모형과 Galerkin-spectral모형의 결과는 같으며 절점을 3개 사용하였을 경우에 Chebyshev 다항식함수 6개를 사용한 결과와 비교하여 볼 때 약간 값이 차이가 있음을 알 수 있고 6, 11개를 사용하였을 경우 거의 유사하게 재현함을 알 수 있다. Davies and Owen(1979)은 취송류 실험을 통해 기저함수로 Legendre, Chebyshev 다항식함수를 사용할 경우에 수렴성에 있어서 뛰어난 결과를 보인다고 보고한 바 있는 데 본 실험의 결과로

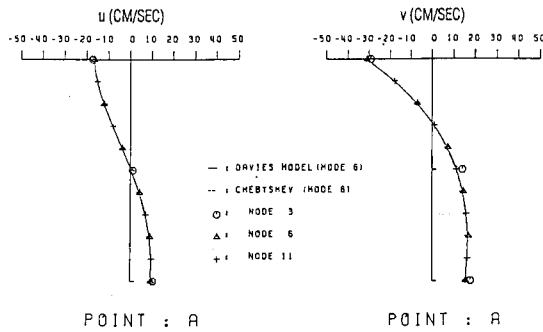


Fig. 6. Velocity profiles at the central point A computed using linear Davies model, linear Galerkin-spectral (with six Chebyshev polynomials) and linear Galerkin-FEM model for various node numbers.

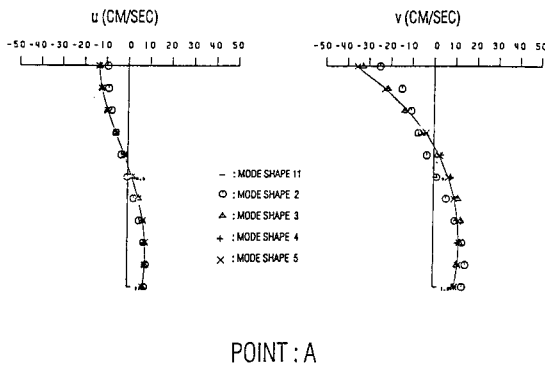


Fig. 7. Velocity profiles at the central point A computed using the Galerkin-FEM model for various mode shape numbers.

불 때 취송류 재현시 Galerkin-FEM모델을 사용하더라도 수렴성에 있어서 Chebyshev 다항식함수를 사용한 경우보다 결코 뒤떨어지지 않는 결과를 보여준다고 하겠다.

實驗 2 :

Fig. 7은 절점수로 11개를 사용한 경우 모두드 shape수를 2, 3, 4, 5개를 사용하고 시간단계 100번째마다 모두드 shape 전부를 사용하여 모두드 shape수를 차이에 따른 결과를 비교한 그림이다. 그림에서도 알 수 있듯이 모두드 shape수를 2개 사용하였을 경우에 11개 전부를 사용한 결과와 차이가 많이 보임을 볼 수 있고 모두드 shape수를 4개 이상 사용하였을 경우에 모두드를 전부 사용한 경우와 거의 같음을 알 수 있다. 이는 계산시간의 절약을 위하여 모두드 shape를 몇개만 사용하더라도 精度를 유지할 수

Table 1. Vertical positions of knots in σ coordinate used with a linear basis set

Positions of knots (σ coordinates)						
0.0	0.001	0.002	0.003	0.005	0.007	0.009
0.012	0.020	0.050	0.08	0.100	0.12	0.18
0.286	0.571	0.857	0.957	0.971	0.986	1.0

있음을 보여준다.

3.2 等水深 無限領域에서의 實驗

수립된 모델의 實際現像에 대한 모델반응을 검토하기 위하여 점모델을 이용, 無限領域에서의 吹送流 실험을 수행하였다. 점모델실험에서는 한 격자점에서 계산을 하며 주위의 격자점의 유속 및 모든 변수값을 계산한 격자점의 값과 같이 둔다. 바람응력은 15 dyne/cm²으로 일정하게 北風을 주었는데 이는 22 m/s의 강한 바람이다. 전향력계수는 0.00012 s⁻¹로 일정하게 주었다. 수행한 數值實驗은 深海와 淺海의 경우를 수행하였는데 鉛直運動量擴散係數의 차이에 따른 수치실험도 수행하였다. 시간간격은 모두 100 초로 하였고 正常狀態에 도달한 30000단계에서의 결과를 검토하였다. 취송류 재현에 있어서 기저함수로 Legendre 다항식함수나 Chebyshev 다항식함수를 사용하는 것이 여현함수를 사용하는 것보다 수렴성에서 나은 결과를 보인다고 알려져 있다(Davies and Owen, 1979). 본 연구에서는 기저함수로 Chebyshev 다항식함수를 사용한 경우와 선형보간함수를 사용한 경우를 비교한다. Davies(1987)는 이산함수인 B-spline함수를 기저함수로 사용할 경우에 취송류 재현시 海面境界層에 많은 수의 절점을 분포시키는 방법으로 정확성에서 나은 결과를 보일 수 있다고 언급하였다. 따라서 본 연구에서는 Galerkin-spectral모델인 경우 기저함수의 갯수를 6개를 사용하고 FEM모델의 경우 절점의 갯수를 다양하게 사용하고 해수면에 절점을 집중시켰을 경우의 차이도 언급한다. Table 1은 해수면에 해상도를 높게하기 위하여 위치시킨 절점의 좌표를 나타낸다.

深海의 境遇(水深 : 260 m) :

鉛直運動量擴散係數의 鉛直變化를 따른 유속의 반응을 검토하기 위하여 N_w, N_T, h' 를 변화시키면서 실험을 수행하였다. N_w, N_T, h' 의 변화는 기존의 Davies(1987) 연구와 같이 $N_w=50, 500, 2000, 4000$ cm²

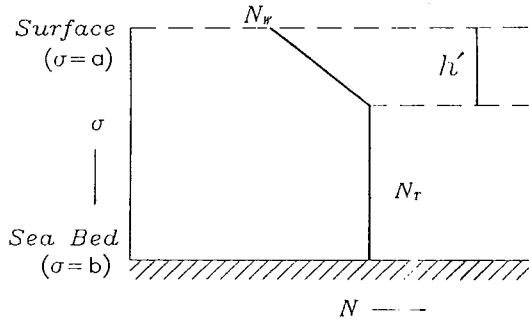


Fig. 8. Schematic variation of eddy viscosity through the vertical profile.

/sec, $N_T=500, 2000, 4000 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 로 주면서 수치 실험을 수행하였으며 마찰수심 h' 은 25m, 100m를 고려하였다. N_w, N_T, h' 의 연직방향의 변화는 Fig. 8과 같이 주어 海面境界層 변화를 선형적으로 표현하였다. 해저면 마찰식은 선형마찰식을 사용하였으며 海底面摩擦係數는 0.002 m/s을 사용하였다. Table 2는 연직운동량확산계수와 해수면 경계층을 달리하면서 수치실험한 결과이다. 기저함수로 Chebyshev 다항식 함수를 사용한 Galerkin-spectral모델인 경우 연직운동량확산계수가 상수인 경우만 수치실험하였다. Galerkin-spectral모델의 결과는 Table 2에서 ()안에 제시하였다.

표에서 θ 는 유속과 바람방향간의 각 크기로서 $\theta = \tan^{-1}(u/v)$ 이다. Table 2는 기존의 Davies(1987)의 연구 결과와 거의 유사함을 알 수 있다. 유속의 세기는 해수면 운동량확산계수 N_w 가 작을수록 커짐을 알 수 있고, 운동량확산계수 N_T 의 효과는 커질수록 유속이 감소함을 알 수 있다. 海面境界層 h' 의 효과는 N_w 가 N_T 보다 클때 h' 이 커질수록 해수면 유속이 감소하고 N_w 가 N_T 보다 작을때 h' 이 커질수록 해수면 유속이 증가함을 알 수 있다. 해수면 경계층 두께 h' 이 증가할 때 N_w 가 N_T 보다 작으면 평균 운동량확산계수의 값이 감소하고 N_w 가 N_T 보다 크면 평균 운동량확산계수의 값이 증가한다. N_w, N_T 의 변화에 의한 해수면 유속의 변화는 海面流速의 크기는 해수면 운동량확산계수 N_w 의 변화에 영향을 받는 것이 아니라 평균 운동량擴散係數의 값과鉛直分布에 따라 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 이는 實際吹送流 재현시鉛直運動量擴散係數의 평균값과 연직분포의 결정에 세심한 주의를 요한다고 하겠다.

해수면유속과 바람방향과의 각 θ 는 N_w, N_T, h' 의 크기에 영향을 받음을 알 수 있고 N_w 와 N_T 가 같을 때는 거의 45°와 같음을 알 수 있다. 이는 Ekman의 해와 일치함을 보여준다. 해저면 마찰을 무시할 경우 유도되는 Ekman 해와 본 실험(수심 260m, 해저마찰력 포함)에서 나온 결과가 거의 일치하는 이유는

Table 2. Computed u and v components of surface current and angle θ between surface current and surface wind, for a range of eddy viscosity values N_w, N_T and the thickness h' of the surface layer using Galerkin-FEM model (values in () computed using Galerkin-spectral model)

N_w, N_T (cm^2/s)	$h'=25 \text{ m}$			$h'=100 \text{ m}$		
	$u(\text{cm/s})$	$v(\text{cm/s})$	$\theta(^{\circ})$	$u(\text{cm/s})$	$v(\text{cm/s})$	$\theta(^{\circ})$
50, 500	-68.3	-109.7	31.9	-103.6	-127.5	39.1
500, 500	-42.3	-42.2	45.1	-42.3	-42.2	45.1
	(43.8)	(43.9)	(45.1)	(43.9)	(43.8)	(45.1)
2000, 500	-33.2	-23.2	55.1	-23.5	-21.1	48.1
4000, 500	-30.6	-18.2	55.1	-17.9	-14.4	51.2
50, 2000	-27.7	-63.2	23.7	-61.6	-108.8	29.5
500, 2000	-23.5	-32.8	35.6	-29.5	-41.4	35.5
2000, 2000	-20.8	-21.1	44.6	-20.8	-21.1	44.6
	(-20.9)	(-20.9)	(45.0)	(-20.9)	(-20.9)	(45.0)
4000, 2000	-19.7	-17.1	49.0	-16.5	-14.8	48.1
50, 4000	-17.5	-42.6	22.3	-37.9	-88.8	23.1
500, 4000	-16.3	-25.4	32.7	-26.9	-38.3	35.1
2000, 4000	-15.3	-17.7	40.8	-18.1	-20.1	42.0
4000, 4000	-14.8	-14.8	45.0	-14.8	-14.8	45.0

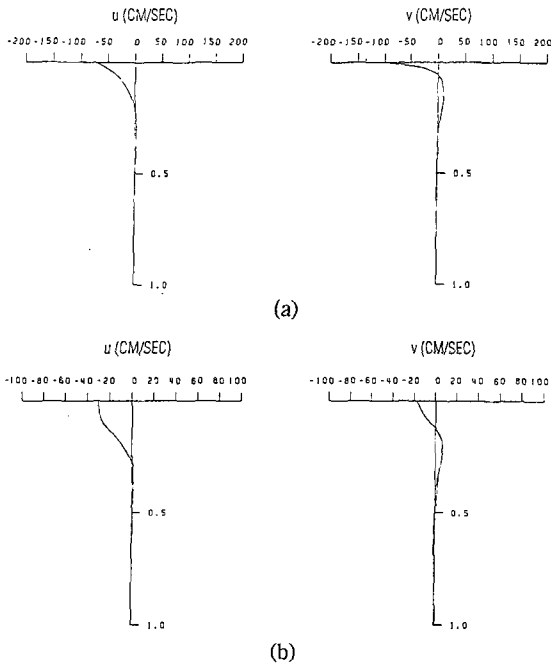


Fig. 9. Near steady state profiles of u and v current profiles in a water depth $h=260\text{m}$ computed using the viscosity distribution given in Fig. 8, with (a) $N_w=50\text{ cm}^2/\text{s}$, $N_T=500\text{ cm}^2/\text{s}$, $h'=100\text{m}$, (b) $N_w=4000\text{ cm}^2/\text{s}$, $N_T=500\text{ cm}^2/\text{s}$, $h'=25\text{m}$.

수심 260m에서의 해저면의 마찰영향이 미세한 것에 의한 것으로 사료된다. 실제 계산에서도 대부분의 경우 해저면 유속은 대략 0.1 m/s로 상당히 작게 계산되었다. 또한 계산결과는 h' 를 고정시키고 N_w 가 N_T 보다 아주 작을 때 즉, $N_w/N_T \rightarrow 0$ 으로 가면 θ 는 0° 로 근접할 것이라 예상할 수 있고 N_w 가 N_T 보다 아주 커지면 즉, $N_w/N_T \rightarrow \infty$ 로 가면 θ 는 90° 로 근접할 것이라 예상할 수 있다.

N_w , N_T , h' 를 변화시키면서 절점을 균일하게 41개를 분포시킨 경우와 Table 1과 같이 해수면에 절점을 집중시켜 21개를 사용한 결과를 비교하였다. Fig. 9는 연직운동량확산계수 N_T 를 $500\text{ cm}^2/\text{s}$ 로 고정시키고 N_w 의 영향을 보는 그림인데 N_w 를 증가시키기에 따라 해수면 근처의 shear가 줄어들음을 볼 수 있다. 절점 차이에 의한 결과는 거의 유사하게 재현함을 알 수 있다.

이상의 경우에서 살펴본 바와 같이 취송류 재현시 유속의 연직분포는 N_w , N_T , h' 의 결정에 따라 영향을 받음을 알 수 있다. 따라서 취송류의 실제 재현시

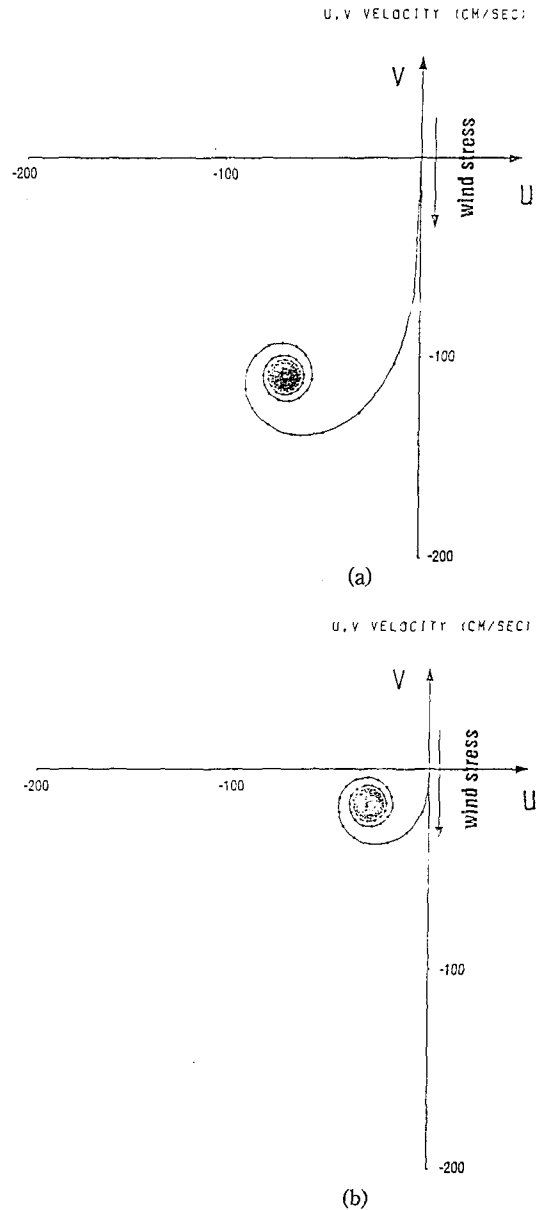


Fig. 10. Hodographs, with dots denoting hourly values, of the u and v components of surface current computed using the viscosity profile shown in Fig. 8, in a water depth of $h=260\text{m}$, with (a) $N_w=50\text{ cm}^2/\text{s}$, $N_T=500\text{ cm}^2/\text{s}$, $h'=25\text{m}$, (b) $N_w=4000\text{ cm}^2/\text{s}$, $N_T=500\text{ cm}^2/\text{s}$, $h'=25\text{m}$.

관측에 의한 검증을 거친 연직운동량확산계수 분포의 정확한 결정이 필요하다.

Fig. 10(a)는 $N_w=50\text{ cm}^2/\text{s}$, $N_T=500\text{ cm}^2/\text{s}$, $h'=25\text{ m}$ 의 조건을 주었을 경우 시간의 변화에 따른 유속의

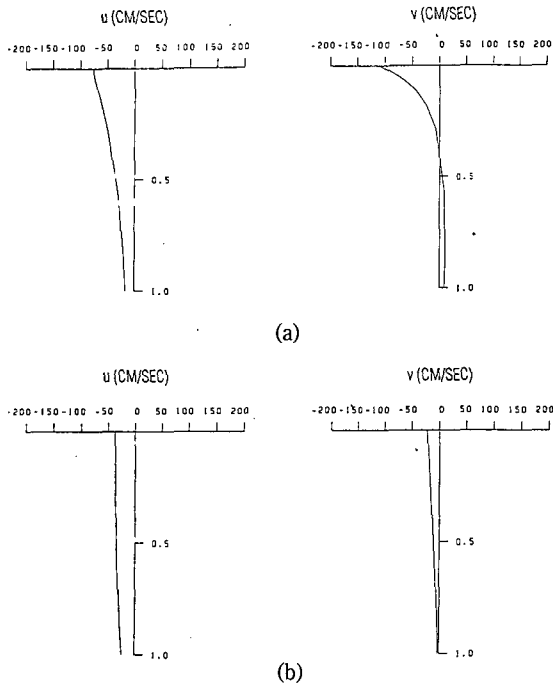


Fig. 11. Near steady state profiles of u and v current in a water depth $h=35$ m computed using the viscosity distribution given in Fig. 8, with (a) $N_w=50$ cm^2/s , $N_t=500$ cm^2/s , $h'=30$ m, (b) $N_w=2000$ cm^2/s , $N_t=500$ cm^2/s , $h'=30$ m.

시간에 따른 궤적도(hodograph)이고 Fig. 10(b)는 $N_w=4000$ cm^2/s , $N_t=500$ cm^2/s , $h'=25$ m의 조건을 주었을 경우 시간의 변화에 따른 유속의 궤적도이다. 두 그림에서 바람이 불기 시작하여 1시간까지는 바람의 방향에 따른 유속이 생기고 3시간 30분이 경과 하면서 회전효과에 의해 유속의 방향이 오른쪽으로 편향되고 있음을 알 수 있다. 또 $N_w=4000$ cm^2/s 로 주었을 때 바람에 의한 운동량의 수심에 따른 전파가 급속히 이루어 짐을 알 수 있다.

淺海의 境遇($h=35$ m) :

비교적 천해로 간주될 수 있는 35m의 모델영역에서 바람에 의한 유속의 연직분포의 특성을 살펴보기로 한다. 바람이 22 m/s로 강하게 불 때 앞서 계산한 것처럼 바람응력 τ 는 15 dyne/cm^2 로 계산이 되고 해수면 경계층 h' 는 100m로 계산된다. 해수면 경계층 두께가 수심을 넘어서기 때문에 이 경우에는 해저면 경계층을 고려하기로 한다. Davies(1987)가 제시한 바에 의하면 해저면 경계층 두께 h'' 은 0.14 h 로 대략

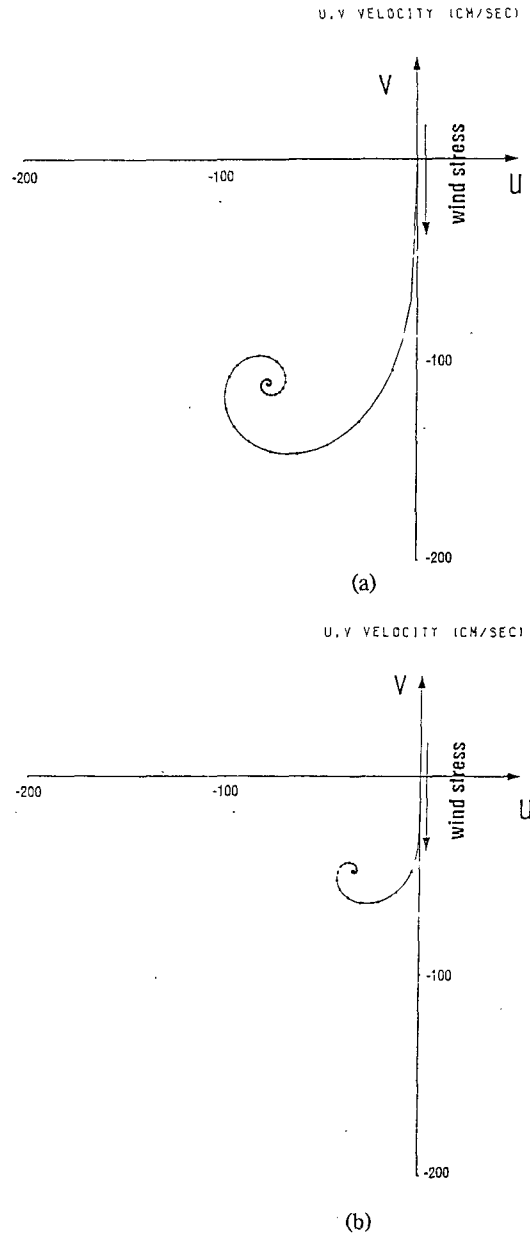


Fig. 12. Hodographs, with dots denoting hourly values, of the u and v components of surface current computed using the viscosity profile shown in Fig. 8, in a water depth of $h=35$ m, with (a) $N_w=50$ cm^2/s , $N_t=500$ cm^2/s , $h'=30$ m, (b) $N_w=50$ cm^2/s , $N_t=4000$ cm^2/s , $h'=30$ m.

5m로 계산된다. 따라서 $h'=30$ m로 결정하고 해저면 마찰조건은 선형마찰관계식을 사용하고 해저면 마찰계수는 0.002 m/s를 사용한다.

Fig. 11은 각각 $N_w, N_T=50, 500$ 과 $2000, 500$ 을 주고 $h'=30\text{m}$ 의 조건을 주었을 경우鉛直流速分布를 나타낸 그림이다. 深海에서와 마찬가지로海面運動量擴散係數 N_w 가 작을 때 해수면의 shear가 크게 나타남을 알 수 있고 바람 에너지의 효과가淺海인 관계로海底面까지 전달되어 해저면 유속이 심해인 경우보다 크게 나타남을 알 수 있다.

Fig. 12는 $N_w, N_T=50, 500, N_w, N_T=50, 4000, h'=30\text{m}$ 의 조건을 주었을 경우 시간의 변화에 따른 유속양상을 꺾적도 형식으로 나타낸 그림이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 수렴하는 경향은 심해의 경우와 비슷하나減衰가 빨리 일어나서 수렴하는 속도가 빠름을 알 수 있다. Davies(1987)가 논한 것처럼 감쇠되는 효과는 수심의 제곱에 반비례한다. 수심의 제곱의 비는 $(260/35)^2=55$ 로서 수심이 35m인 경우 260m인 경우보다 55배 정도 빨리 감쇠된다.

5. 結論 및 討議

本 研究는 類似變換技法을 사용한 3차원 Galerkin-FEM 모델 開發에 대하여 논하였다. 開發된 類似變換技法 모델의 長點은 기존의 고유함수 방법(eigenfunction-Galerkin method) 사용시 基底函數가 Sturm-Liouville system의 해를 만족해야 하는 제약을 받지 않아 어떤 基底函數에도 적용이 가능하고 Galerkin해를 解析的으로 구할 수 있으며 모우드분리 개념이 도입됨으로써 모우드분리가 가능해져서 3차원 모델 數值實驗시 항상 제약조건으로 따르는 경계성의 제고를 도모할 수 있다. 또한 類似變換技法 모델은 海底面摩擦係數가 비선형 관계일 때도 적용이 가능하다. 모델의 檢證을 위해 1차원 수로에서의 해석해와 비교하고 기존의 연구자들이 적용한 一定水深 長方形

領域에 適用하여 그 結果를 강 등(1993)의 연구 결과와 比較, 檢討하였다. 검토 결과 開發된 모델은 기존의 연구 결과와 상당히 유사하여 실제 지형에 적용 가능하리라 판단된다. 그러나, 본 모델을 실제 지형에 적용함에 있어서는 不規則 水深, 實際의 岸線, 조간대 및 外海境界를 처리할 수 있게 확장해야 하며 現在 研究가 進行中에 있다.

謝 辭

本 研究는 한국해양연구소의 1993년도 기본연구사업비에 의하여 수행된 연구결과의 일부이다.

參考文獻

- 姜官秀, 蘇在貴, 鄭景太, 鮮于仲皓, 1993a. 類似變換技法을 이용한 3次元 모델의 開發. 韓國海岸·海洋工學會誌, 5(2), pp. 107-120.
- 姜官秀, 鄭景太, 蘇在貴, 1993b. 類似變換技法을 이용한 비선형 3次元 모델의 開發. 韓國海岸·海洋工學會 발표 논문 초록집, pp. 178-182.
- 蘇在貴, 鄭景太, 李光秀, 承永鎬, 1992. 吹送流 再現을 위한 3次元 스펙트럴모형 開發. 韓國海岸·海洋工學會誌, 4(2), pp. 91-107.
- Davies, A.M., 1987. Spectral models in continental shelf sea oceanography. *Three-Dimensional Coastal Ocean Models*, N.S. Heaps, ed., Coastal and Estuarine Sciences 4, AGU, Washington, D.C., pp. 71-106.
- Davies, A.M. and Owen, A., 1979. Three dimensional numerical sea model using the Galerkin method with a polynomial basis set. *Appl. Math. Modelling*, V3, December, pp. 421-428.
- Heaps, N.S., 1972. On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges. *Memoires Societe Royale des Sciences de Liege*, 6 serie, tome II, pp. 143-180.
- IBM application program, *System/360 Scientific Subroutine Package(SSP)*, Version III, Programmer's Manual, 1970. International Business Machines Corporation.