

緩傾斜 波浪式에 대한 PCGM 數值模型 A Numerical Model of PCGM for Mild Slope Equation

徐承男* · 延泳鎮**

Seung Nam Seo* and Young Jin Yeon**

要 旨 : 緩傾斜 波浪式을 PCGM 기법으로 計算하기 위한 數值模型을 제시하였다. 본 論文에서는 既存 Panchang 등(1991)의 模型과 달리 精確한 境界條件을 附與하였고 보다 향상된 Preconditioner가 사용되었다. 非線形波浪에 대한 計算過程을 重點적으로 다루었고 보다 精確한 數值模型을 開發하기 위해 發表된 문제들을 討議하였다. 數值模型의 結果를 球形 淺堆와 橢圓形 淺堆水理實驗 자료와 비교하였다. 波浪의 진폭에 대한 數值模型 結果는 水理實驗 자료와 잘 一致하였으며 본 數值模型은 복잡한 지형을 갖는 淺海域의 波浪變形을 計算하는데 유용한 모형임을 立證하였다.

Abstract □ A numerical model to solve mild slope equation is developed by use of a preconditioned conjugate gradient method (PCGM). In the present paper, accurate boundary conditions and a better preconditioner are employed which are improved from the existing method of Panchang *et al.* (1991). Computational procedures are focused on weakly nonlinear waves, and emerged problems to make a more accurate model are discussed. The results of model are tested against laboratory results of both circular and elliptic shoals. Model results of wave amplitude show excellent agreement with laboratory data and thus this model can be used as a powerful tool to calculate wave transformation in shallow waters with complex bathymetry.

1. 緒 論

港灣의 방파제에 대한 設計波 算定에는 精確한 數值解가 요구된다. 波浪運動을 지배하는 三次元 Laplace식을 수심적분하여 유도되는 緩傾斜 波浪式은 屈·回折 현상과 反射波浪을 적절히 나타냄으로 精確한 淺海 波浪計算에 매우 적합한 식으로 평가된다. 二次元 近似式인 緩傾斜 波浪式을 數值的으로 計算하는 기존의 방법은 이 식을 雙曲形 微分方程式으로 나누어 시간 단계별로 計算하는 방법과 有限要素法을 사용하여 구성된 行列의 逆行列을 구하는 방법 그리고 反射波浪이 적고 計算領域의 波向이 主 波向 方向에 가까울 경우 拋物形 微分 方程式으로 변형하여 計算하는 방법 등이 대표적인 방법이다.

橢圓形 偏微分 方程式인 緩傾斜 波浪式은 유한요

소법과 같은 數值模型으로 波浪 諸元(波高, 波向)을 구할 수 있다. 한편 대부분의 港灣 開發時 設計에 고려되는 지역은 비교적 넓으며(10 km×10 km) 回折 現象을 적절히 再現하기 위해서는 尙장당 최소 5개의 格子가 필요한 것으로 알려졌다(Panchang 등, 1991). 우리나라에 많이 出現하는 設計波浪의 週期를 12초라 하면 線形理論에 의해 計算한 深海波長은 225미터이고 水深 20미터 지점에서는 약 150미터로 볼 때 數值模型의 格子間隔은 30미터가 된다. 위에서 言及한 해역의 波浪諸元을 유한요소법으로 구할 때 未知數는 약 11만개로 이로부터 構成되는 行列을 direct method로 구할 경우 필요한 記憶容量이 너무 커서 대부분의 대형 컴퓨터로도 波浪諸元을 計算할 수 없다. 이러한 점을 補完하기 위해 拋物形 近似式과 雙曲形 波浪式을 이용한 數值技法들이 개발되었다.

*한국해양연구소 해양공학연구부 (Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan 425-600, Korea)

**성균관대학교·한국해양연구소 학연과정 (Sung Kyun Kwan University-KORDI joint graduate programs on Coastal and Oceanographic Engineering)

雙曲形 波浪式은 緩傾斜 波浪式으로부터 海面變位, x방향 流量 그리고 y방향 유량으로 분해한 雙曲形微分式을 시간에 따라 단계적으로 計算하는 기법으로 Warren 등(1985)에 의해 提案되었다. Copeland(1985)는 Warren 등의 模型과 類似한 방법을 사용하였으나 陽海法을 택하였다. 이 技法은 많은 기억용량이 필요하지 않으나 數值 安定性을 위해 時間間隔이 작아야 하며 定狀狀態에 도달하기 까지 많은 豫備 計算時間 (spin-up time)을 필요로 한다. 또한 이 기법의 開放 境界條件 설정에는 많은 어려움이 있는 것으로 알려졌다(Panchang 등, 1991). 韓國海洋研究所는 이 기법을 변형(modification)한 數值模型을 수립하여 Ito와 Tanimoto(1972)의 球形淺堆에 대한 水理實驗 結果와 비교하여 檢證한 후 포항 신항의 정온도 평가에 적용하였다(과학기술처, 1987; 1988).

拋物形 近似式은 波浪의 반사를 무시할 수 있는 경우에 사용할 수 있는 方法으로 Radder(1979)가 提示한 후 많은 研究가 進行되었다. 波浪 進行方向의 回折效果가 進行 直交方向의 회절效果에 비해 無視될 수 있는 경우 緩傾斜波浪式으로부터 拋物形 近似式이 유도되며 段階的 計算法(marching method)을 사용하는 拋物形 近似式은 비교적 넓은 지역에 대한 波浪推定에 적합하다. Radder의 拋物形 近似式은 波浪이 主進行方向에 대해 비교적 작은 각으로 進行하는 경우에는 상당히 높은 精密度를 보이거나 進行角이 증가할수록 誤差도 증가하므로 적용에 制限을 받는다. 이와 같은 制限을 줄이기 위한 方法의 하나로 高次 拋物形 近似式이 Kirby(1986)에 의해 제안되었다. Berkhoff 등(1982)의 橢圓形淺堆에 대한 수리실험 結果는 拋物形 近似式을 사용하는 數值模型의 검증에 널리 사용되고 있다. Kirby와 Dalrymple(1984)은 橢圓形淺堆에 대한 數值模型 比較研究를 통해 波浪의 非線形性이 포함되어야 함을 지적하였다. 한편 國內의 研究로는 Kirby(1986)의 高次 拋物形 近似式의 結果와 대등한 精밀도를 가지는 數值模型이 徐(1990)에 의해 개발되어 球形淺堆 및 橢圓形淺堆에 대한 수리실험과 비교하여 模型의 精密度를 立證하였다. 國內 用役會社에서 많이 사용하고 있는 RCPWAVE模型은 미육군 공병단의 Ebersole(1985)에 의해 개발된 模型으로 일반에게 공개되었다. 이 模型은 외형상 緩傾斜 波浪式을 사용하나 반사파를 무시함으로 拋物形 近似式으로 分類되며 模型의 支配方程式 자체에 平滑화

하는 效果를 가지고 있어 수치결과에 이러한 점이 나타나며 특히 橢圓形淺堆에 대한 數值結果中 회절 效果가 뚜렷한 지점에서는 水理實驗 結果와 큰 差異를 보인다. 拋物形 近似式에 의한 數值模型의 특징을 종합하면 波浪이 構造物에 의해 反射되는 경우에는 사용할 수 없고 地形에 의한 散亂波가 적어 主波向과 거의 일치하는 경우 計算 시간이 적게 소요됨으로 비교적 넓은 해역의 波浪諸元을 計算하는 데 적합한 模型이다.

최근 컴퓨터의 計算 性能이 빨라지고 기억용량이 커짐에 따라 전에는 현실성이 없는 計算도 可能하게 되었다. 緩傾斜 波浪式을 有限差分法으로 差分하면 간단한 行列이 구성되며 이를 반복기법으로 計算하는 경우 많은 記憶容量이 필요치 않게 된다. 이 模型은 構造物에 의한 反射波를 考慮할 수 있으며 開放 境界條件과 非線形性을 模型에 接木하는 데 큰 어려움이 없다(Panchang 등, 1991). Panchang 등은 模型結果를 橢圓形 淺堆 수리실험 結果와 비교하여 高次 拋物形 近似式의 結果보다 우수한 精밀도를 얻었다. 이 模型은 反復計算法(Preconditioned Conjugate Gradient Method)을 사용하기 때문에 收斂速度가 增加된다.

본 論文에서는 有限差分法을 사용하고 차분법으로부터 만들어진 聯立方程式의 해를 반복기법으로 구하는 PCGM을 사용하였다. 緩傾斜 波浪式에 대해 PCGM을 사용한 數值模型은 Panchang 등(1991)에 의해 처음 試圖되었고 이 數值模型은 緩傾斜 波浪式을 유한차분하여 Bayliss 등(1983)의 演算方式을 그대로 사용한 것이다. 聯立方程式의 解를 반복기법으로 푸는 PCGM에는 여러 가지 方法이 존재할 수 있으며 徐(1994)는 연산기법들의 수치 結果를 일정수십 위를 지나는 波浪의 解析解와 비교하여 最適技法을 제시하였으며 본 論文에서는 이 기법을 사용하였다.

제2절에서는 支配方程式과 차분식을 記述하여 聯立方程式을 구성하였다. Panchang 등이 附與한 境界條件은 일정 수심의 直交 入射波浪에만 적용되는 것임을 指摘하였고 올바른 境界條件을 附與하였다. 제3절에서 非自己隨伴(Non-Hermite) 行列의 聯立方程式을 計算하는 연산기법과 最適 Preconditioner를 接木하여 收斂速度를 가속시키는 方法을 간략히 기술하였다. 제4절에 본 數值模型을 Ito와 Tanimoto(1972)의 球形淺堆에 대한 수리실험 結果 및 Berkhoff 등(1982, '橢圓形淺堆에 대한 수리실험 結果와 비교

하여 精密度를 分析하고 非線形 效果에 대해 言及하였다. 마지막으로 제5절에 본 數值模型의 特性을 分析 · 評價하였다.

2. 支配方程式과 差分式

2.1 支配方程式

非壓縮性 流體와 非回轉性 흐름에는 속도포텐셜이 存在하고 流體의 運動은 Laplace식에 의해 지배된다. 單週期波浪의 경우 속도포텐셜의 時間成分을 分離하기 위해 속도포텐셜을 $\tilde{\phi}(x,y,z) \exp(-i\sigma t)$ 로 定義한다. 여기서 복소수 $i = \sqrt{-1}$ 이고 角周波數는 $\sigma = 2\pi/T$ 이며 T 는 波浪의 주기이다. 평균수면 상에 x, y 축을 놓고 z 축의 陽의 方向을 수면 위로 향하게 座標系를 정하며 入射波浪은 x 축의 양의 方向으로 進行한다. 3차원 Laplace식을 2차원 平面 波浪의 식으로 變換하기 위해 속도포텐셜의 수심성분 $f(z)$ 을 Laplace식에 곱해 水深에 대해 積分하고 관련된 境界條件을 적용한다. 水深成分 $f(z)$ 은 식 (1)로 정의되며 k 는 波數($=2\pi/L$, L =파장)이며 波浪分散式으로부터 구해진다.

$$f(z) = \frac{\cosh k(z \times h)}{\cosh kh}, \quad \sigma^2 = gk \tanh kh, \quad g = \text{중력 가속도.} \quad (1)$$

수심이 완만하게 변할 때 즉, 水深 傾斜率이 작은 경우에 적분한 식에 나타난 수심 경사율의 제곱항과 2차 경사율을 무시하면 緩傾斜 波浪式이 유도된다 (Berkhoff, 1972; Mei, 1989).

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \tilde{\phi}) + k^2 CC_g \tilde{\phi} = 0, \quad (2)$$

여기서

$$\text{波速 } C = \frac{\sigma}{k} \text{ 이고, 群速度 } C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

이다. 식 (2)를 직접 차분하는 것보다 $\phi(x,y) = \tilde{\phi} \sqrt{CC_g}$ 를 使用하여 Helmholtz 식 (3)으로 變換하는 것이 곱셈의 수가 적어져 計算速度가 빨라지게 된다.

$$\nabla^2 \phi + \kappa^2 \phi = 0, \quad (3)$$

여기서 $\kappa^2 = k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}}$ 이다.

식 (2)에 부여될 境界條件을 검토하기 위해 우선 緩傾斜 波浪式의 一般的인 海의 形態를 표시하면 식 (4)로 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\phi}(x,y) = -\frac{iga(x,y)}{\sigma} e^{i(k_x x + k_y y)} \equiv -\frac{iga(x,y)}{\sigma} e^{is(x,y)} \quad (4)$$

여기서 $a(x,y)$ 는 波浪의 振幅이며 k_x, k_y 는 각각 波數의 x, y 성분, $s(x,y)$ 는 位相函數이다. 따라서 y 축과 平行한 任意의 線 $x=x_0$ 에서의 境界條件은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \ln a}{\partial x} + ik_x \right) \tilde{\phi} \quad (5)$$

波高의 變化는 일차적으로 수심의 變化에 의해 생성되며 境界線의 수심변화율이 비교적 작고 수심의 變化가 심한 淺堆와 같은 지형으로부터 상당한 거리에 있으면 식 (5) 右邊의 첫항은 無視할 수 있다. 그러나 모형의 支配方程式은 變換 포텐셜 ϕ 로 표시되어 있어 이에 대한 식으로 나타내기 위해 식 (5)에 $\sqrt{CC_g}$ 를 곱한다. 여기서 중요한 점은 $\sqrt{CC_g}$ 가 水深의 函數이므로 이를 고려한 올바른 變換座標系의 境界條件은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \simeq \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial x} + ik_x \right) \phi \quad (6)$$

따라서 Panchang 등의 境界條件은 식 (5)의 近似條件을 變換좌표계에서 직접 사용한 것으로 추정되며 變換座標系는 앞에서 지적한 것과 같이 計算의 效率을 增大시키기 위해 任意로 導入한 것이므로 식 (6)의 條件이 올바른 條件이 된다. 이와 비슷한 방법으로 4개의 境界線에서 境界條件을 부여한다. 다만 입사파의 諸元이 附與되는 $x=0$ 에서의 境界條件은 반사파를 勘案하여 식 (7)로 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2ik_x \phi^{in} + \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial x} - ik_x \right) \phi, \quad x=0 \text{에서,} \quad (7)$$

여기서 入射포텐셜 $\phi^{in} = -\frac{iga \sqrt{CC_g}}{\sigma} e^{ik_y y}$ 이다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial x} + ik_x \right) \phi, \quad x=M \text{에서,} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial y} + ik_y \right) \phi, \quad x=0 \text{에서,} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \ln \sqrt{CC_g}}{\partial y} + ik_y \right) \phi, \quad y=N. \quad (10)$$

2.2 差分式

計算區域을 x 축으로 0에서 M 까지 그리고 y 축으로 0에서 N 까지 $(M+1) \times (N+1)$ 개의 格子點으로 구성하였다. 각 격자점에서 식 (3)과 식 (7)~(10)에 대해 有限差分法을 사용하여 精密度를 微小格子 $\Delta x, \Delta y$ 의 2차까지 고려한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \left(\kappa_{ij}^2 \Delta x^2 - 2 - 2 \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} \right) \\ \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} (\phi_{i,j-1} + \xi_{i,j+1}) = 0, \\ i=1, \dots, M-1 \text{ and } j=1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{2} - \Delta x \frac{\partial \ln \sqrt{CC_{g0j}}}{\partial x} + ik_x \Delta x \right) \phi_{0j} + 2\phi_{1j} \\ - \frac{1}{2} \phi_{2j} = 2ik_x \Delta x \phi_j^{\text{in}}, \quad j=0, \dots, N \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} + \Delta y \frac{\partial \ln \sqrt{CC_{gi0}}}{\partial y} + ik_y \Delta y \right) \phi_{i0} - 2\phi_{i,1} \\ + \frac{1}{2} \phi_{i,2} = 0, \quad i=1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi_{i,N-2} - 2\phi_{i,N-1} + \left(\frac{3}{2} - \Delta y \frac{\partial \ln \sqrt{CC_{gin}}}{\partial y} \right. \\ \left. - ik_y \Delta y \right) \phi_{i,N} = 0, \quad i=1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi_{M-2,j} - 2\phi_{M-1,j} + \left(\frac{3}{2} - \Delta x \frac{\partial \ln \sqrt{CC_{gMj}}}{\partial x} \right. \\ \left. - ik_x \Delta x \right) \phi_{M,j} = 0, \quad j=0, \dots, N \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} \kappa_{ij}^2 \Delta x^2 = (k_{ij} \Delta x)^2 - \frac{1}{\sqrt{CC_{gi,j}}} \left[\sqrt{CC_{gi+1,j}} + \sqrt{CC_{gi-1,j}} \right. \\ \left. + (\sqrt{CC_{gij-1}} + \sqrt{CC_{gij+1}}) \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right. \\ \left. - \sqrt{CC_{gij}} 2 \left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta y \frac{\partial \ln \sqrt{CC_{gi0}}}{\partial y} = -\frac{3}{2} \ln \sqrt{CC_{gi0}} \\ + 2 \ln \sqrt{CC_{gi1}} - \frac{1}{2} \ln \sqrt{CC_{gi2}} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta y \frac{\partial \ln \sqrt{CC_{gin}}}{\partial y} = \frac{1}{2} \ln \sqrt{CC_{gin-2}} \\ - 2 \ln \sqrt{CC_{gin-1}} + \frac{3}{2} \ln \sqrt{CC_{gin}} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (17)~(18)과 같은 방법으로 $\partial \ln \sqrt{CC_g} / \partial x$ 의 값을 計算한다.

그러면 식 (11)~(15)로 구성되는 聯立方程式은 다음과 같은 형태로 表示할 수 있다.

$$Ax = b \quad (19)$$

行列 A 는 성분이 대부분 零인 sparse matrix가 되고 미지수 $\{x\}$ 는 $\{\phi\}$ 로 개수는 格子點의 개수와 같은 $(M+1) \times (N+1)$ 이 된다. 數式 展開의 편의상 식 (19)의 대각성분을 1로 조정된 連립방정식 (19)를 이후 부터 사용하기로 한다.

3. 演算方式

본 論文에서 다루고자 하는 식 (19)의 行列 A 는 非自己隨伴行列이므로 이 경우에는 곧 바로 CG 방법을 사용할 수 없다. 따라서 식 (19)로 표시된 聯立方程式의 行列을 自己隨伴行列로 變換시키기 위해 隨伴行列 $A^*(=A^T)$ 를 앞에서 곱해준다. 여기서 bar는 공액복소수를 첨자 T는 轉置行列을 각각 의미한다. 그러면 變換된 行列은 自己隨伴行列이 되나 收斂速度가 늦어 Preconditioner $M(=QQ^T)$ 를 사용하여 收斂速度를 加速시킬 必要가 있다. 본 論文에서는 Bayliss 등(1983)의 技法과 같이 行列 A 에 行列 Q^{-1} 를 곱한 후 이에 相應하는 隨伴行列을 곱해 自己隨伴行列을 구성하여 CG방법을 사용하였다. 즉,

$$Q^{-1}Ax = Q^{-1}b, \quad (20)$$

식 (20)에 $Q^{-T}Q^T = I$, 行列 I 는 單位行列이며 이를 이용하면 식 (21)을 얻는다.

$$\bar{A} \bar{x} = \bar{b} \quad (21)$$

여기서 $\bar{A} = Q^{-1}AQ^{-T}$, $\bar{x} = Q^T x$ 그리고 $\bar{b} = Q^{-1}b$ 이다. 식 (21)의 行列 \bar{A} 는 非自己隨伴行列이므로 隨伴行列 \bar{A}^* 을 앞에서 곱해주어 CG기법을 사용한다.

Preconditioner를 構成하는 行列 Q 는 收斂速度를 빠르게 할 目的으로 사용되므로 行列 M^{-1} 이 쉽게

計算되어야 한다. Preconditioner를 좀 더 자세히 나타내면 行列 \$A\$로부터 구성되며 對角成分이 零이고 성분은 실수로만 구성된 Lower triangular 行列 \$L\$을 사용하여 \$A=I-L-L^T+S\$로 表示한다. 여기서 行列 \$S\$는 크기가 작은 補助行列이고 計算에는 직접 參與하지 않는다. 行列 \$Q\$는 實數인 三角行列로 정해지며 이를 구하는 방법에는 여러가지가 있으나 본 論文에서는 S.S.O.R.(Symmetric Successive Over-Relaxation)방법을 사용하고자 한다. 그러면 S.S.O.R.에 의한 行列 \$Q\$는 다음과 같이 주어진다.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} (I - \omega L), \tag{22}$$

여기서 \$\omega\$는 relaxation 매개변수이며 1보다 크거나 같고 2보다 작은 값을 갖는다.

원래의 變數로 나타내는 것이 計算에 효율적이며 이 과정에 의한 연산기법은 식 (24)가 된다. 보다 자세한 誘導 課程은 徐(1994)에 記述되어 있다.

$$w_k = A \hat{p}_k \tag{23a}$$

$$\tilde{u}_k = Q^{-1} w_k \tag{23b}$$

$$\alpha_k = \frac{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)}{(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k)} \tag{23c}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \hat{p}_k \tag{23d}$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k w_k \tag{23e}$$

$$\tilde{r}_{k+1} = A^* M^{-1} r_{k+1} \tag{23f}$$

$$\hat{r}_{k+1} = Q^{-1} r_{k+1} \tag{23g}$$

$$\beta_k = \frac{(\hat{r}_{k+1}, \hat{r}_{k+1})}{(\hat{r}_k, \hat{r}_k)} \tag{23h}$$

$$\hat{p}_{k+1} = M^{-1} \tilde{r}_{k+1} + \beta_k \hat{p}_k \tag{23i}$$

식 (23)에 필요한 初期값은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} r_0 &= b - Ax_0, \\ \tilde{r} &= A^* M^{-1} r_0, \\ \hat{r}_0 &= Q^{-1} \tilde{r}_0, \\ \hat{p}_0 &= M^{-1} \tilde{r}_0 \end{aligned} \tag{24}$$

一定 水深 위를 지나는 波浪의 解析解와 비교하여 收斂速度가 가장 빠른 行列 \$Q\$ (식 (24))가 제

시하였고 본 論文에서는 이를 사용하였다. 行列 \$Q\$는 内部格子點의 식 (11)에서는 \$\kappa_{ij}=0\$로 정해 既存 方法 (Bayliss 등과 Panchang 등)과 같으나 식 (12)~(15)의 境界條件에서는 對角成分을 나눈 값의 實數部分을 취해 行列 \$A\$의 정보를 보다 많이 사용한 점에서 Panchang 등의 行列과는 다르다.

行列 \$M^{-1}\$을 구하는 방법은 전방치환과 후방치환 두번의 置換法으로 計算된다. 식 (24)의 마지막 식을 예로 들어 說明하기 위해 두 벡터 \$z\$와 \$z^*\$를 도입하여 \$\hat{p}_0\$를 \$z\$로 나타낸다. 그리고 行列 \$M\$을 앞에서 곱하면 다음과 같다.

$$Mz = QQ^T z = \tilde{r}_0 \tag{25}$$

식 (25)를 치환법으로 計算하기 위해 벡터 \$z\$와 \$z^*\$를 사용하여 두 段階로 나눈다.

$$\begin{aligned} Qz^* &= \tilde{r}_0, \\ Q^T z &= z^* \end{aligned} \tag{26}$$

行列 \$Q\$는 對角成分이 1인 Lower triangular 行列이므로 식 (26)의 첫째식은 주어진 벡터 \$\tilde{r}_0\$에 대해 前方置換法으로 計算할 수 있다. 반면에 行列 \$Q^T\$는 Upper triangular 行列이므로 앞에서 計算된 벡터 \$z^*\$에 대해 後方置換法으로 計算된다. 한편 식 (23b)와 식 (23g)는 전방치환법으로만 計算됨을 알 수 있다.

식 (23)를 計算하기 위해서는 최소 8개의 벡터 \$r, \tilde{r}, w, z, z^*, x, \tilde{u}\$ 그리고 \$\hat{p}\$을 모든 格子點에서 기억해야 한다. 식 (23g)의 벡터 \$\hat{r}\$은 식 (23i)의 行列 \$M^{-1}\$을 구하는 과정에서 計算되는 \$z^*\$이므로 이를 記憶할 필요가 없다.

4. 模型實驗 分析 및 結果 比較

본 절에서는 Ito와 Tanimoto(1972)의 球形淺堆에 대한 水理實驗 結果 및 Berkhoff 등(1982)의 橢圓形淺堆에 대한 수리실험 결과와 比較를 통해 數值模型을 檢證하였고 數值實驗과정을 기술하고 그 特性을 분석하였다.

4.1 模型實驗 分析

식 (1)로 표시되는 線形模型은 수심이 주어지면 波數가 일의적으로 決定되며 식 (23)로 표시된 연산 기법 과정에서 波數의 값이 변하지 않으므로 주어진

許容誤差에 이를 때까지 反復計算한다. 본 論文에서 사용한 誤差(rmax)는 식 (23e)으로 표시된 잔차벡터의 최대거리(maximum norm)로 나타냈다.

$$rmax = \max |x_{ij}|, \text{ for } i=0, M \text{ and } j=0, N \quad (27)$$

誤差의 檢査는 식 (23e)의 計算이 완료된 후 每 段階마다 실시하였다. 속도포텐셜의 初期條件으로는 y 축의 方向에 대해 水深을 平均한 값으로부터 구한 평균수심에 대해 屈折理論으로부터 구한 속도포텐셜을 사용하였고 식 (27)로 구한 첫번 오차의 5×10^{-4} 배를 허용오차 ϵ 으로 정했다. 그리고 relaxation 媒介變數의 값은 1.5를 사용하였다.

選定된 두개의 수리모형 실험은 直交入射에 대한 것이고 波浪進行 方向과 수직한 側面에는 水理實驗裝置의 벽이 존재함으로 該當 境界條件의 y방향 波數는 零으로 정했다. 한편 波浪進行 方向 끝단에 위치한 境界에서는 淺堆에 의해 波峯線이 변하는 것으로

나타났으나(Beerkhoff 등, 1982) 본 論文에서는 이를 고려하지 않았다. 기존의 研究들도 이에 대한 條件을 사용한 경우를 발견할 수 없었고 이를 考慮하는 경우 每 段階別 計算量이 많아질 뿐 아니라 때로는 rmax가 局地的으로 증가함으로 收斂速度에 영향을 받는 것으로 나타났다. 그러나 이 問題를 후에 보다 심도있게 다루고자 한다.

球形淺堆의 計算格子網圖는 Fig. 1에, 橢圓形 淺堆의 計算格子網圖는 Fig. 2에 각각 나타내었다. 각 수리실험에 사용된 入射波浪 諸元 및 格子間隔 그리고 격자점수를 Table 1에 나타내었다.

線形模型으로 計算된 rmax는 減少率이 처음에는 급하게 減少하나 반복횟수가 증가하면 감소율이 緩慢히 변하는 특성을 보였다. Table 2에 처음 101번 까지 매 10번 마다의 rmax를 나타내었다.

非線形模型은 波數가 파고의 함수로 표시됨으로 속도포텐셜로부터 計算된 波高를 이용하여 反復的으

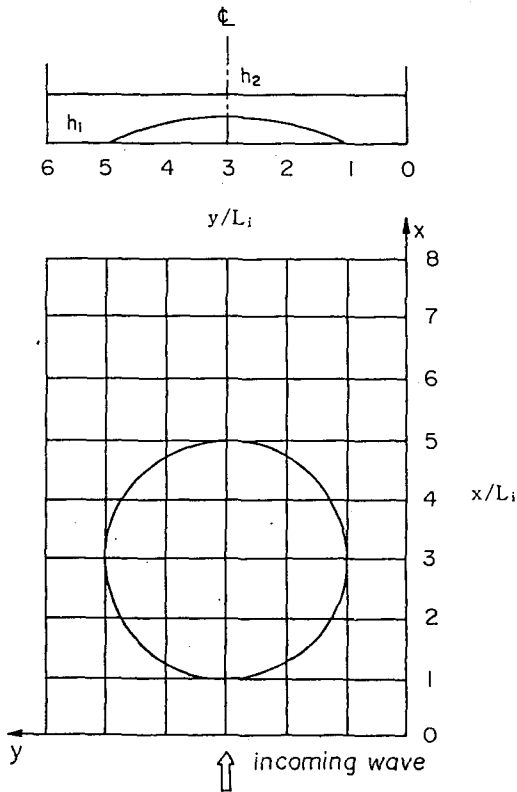


Fig. 1. Topography for Ito and Tanimoto's experiment (1972).

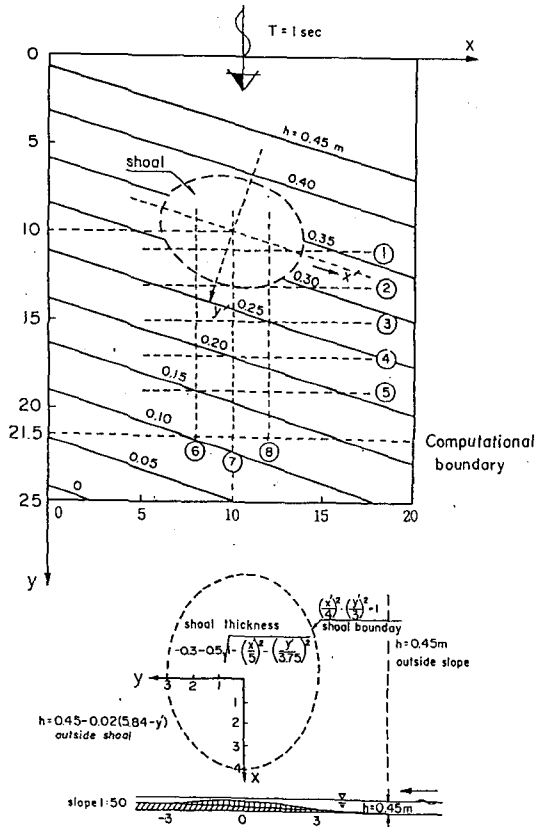


Fig. 2. Topography for Beerkhoff et al.'s experiment (1982)

Table 1. Parameters of incident waves, grid sizes and numbers

	Circular Shoal	Elliptic Shoal
wave period (sec)	0.5107	1.
wave height (cm)	1.04	4.64
wave angle (degree)	0	0
grid size (cm)	2.5	10
grid number	129×97	216×201

로 計算할 수 있다. 이러한 특성은 반복법의 특성과 일치함으로 反復技法의 장점으로 지적되었다(Panchang 등, 1991). 非線形分散式 Kirby와 Dalrymple (1986)이 제시한 淺海와 深海에서 均等하게 성립되는 混成 波浪分散式(28)을 사용하였다.

$$\sigma^2 = gk[1 + (ak)^2 F_1 \tanh^5 kh] \tanh[kh + akF_2]$$

$$F_1 = \frac{\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh}{8 \sinh^5 kh} \quad (28)$$

$$F_2 = \left(\frac{4kh}{\sinh kh} \right)^2$$

計算된 속도포텐셜로부터 振幅을 구하는 식은 동력학적 境界條件으로부터 計算되며 엄밀한 의미에서는 非線形 境界條件을 사용하여야 한다. 그러나 非線形성이 波數 計算에 포함되어 있어 振幅 計算에 線形 관계식과 유사한 식 (29)를 사용하여 近似的으로 計算하였다.

$$a_{ij} \approx \frac{\sigma |\phi_{ij}|}{g \sqrt{CC_{gij}}} \quad (29)$$

식 (29)로부터 計算된 振幅은 전 단계의 진폭과 波數이므로 식 (28)을 써서 새로운 波數를 구할 때 반복적으로 구하는 것이 더욱 바람직한 방법이나 모든 格子點에서 波數를 구하는 시간이 計算時間에 상당 부분을 차지할 뿐만 아니라 反復技法에서는 解를 반복적으로 점차 收斂시키게 됨으로 본 論文에서는 波數를 구할 때 反復計算 방법을 사용하지 않았다.

특히 非線形模型에서 중요한 점은 波數가 바뀌므로 식 (19)로 표시되는 聯立方程式이 바뀌게 됨을 알 수 있다. 따라서 새로 計算한 波數로부터 형성된 聯立方程式을 PCGM으로 計算할 때 식 (24)로 주어진 演算技法의 초기치를 구하고 이를 이용하여 연산기법의 식 (24)를 써서 反復해야만이 PCGM의 서로

Table 2. Maximum norm of residual vectors from linear model

Iteration No.	Circular Shoal	Elliptic Shoal
1	0.32420E-03	0.24797
11	0.14511E-03	0.36231E-01
21	0.13980E-03	0.12947E-01
31	0.97438E-04	0.75776E-02
41	0.67318E-04	0.64595E-02
51	0.69019E-04	0.44243E-02
61	0.93706E-04	0.30167E-02
71	0.72835E-04	0.22194E-02
81	0.58295E-04	0.18699E-02
91	0.57900E-04	0.14698E-02
101	0.54756E-04	0.12673E-02

相異한 잔차벡터들이 서로 直交하는 性質을 維持하게 된다(徐, 1994). 非線形모형의 또 다른 특이점은 새로운 波數를 구하기 위해 몇 번의 반복횟수가 適合한가에 관한 것이다. 표 2에 提示한 結果로부터 본 PCGM으로 計算된 rmax의 減少率은 처음 상당히 急速히 減少하나 반복횟수가 증가하면 감소율이 떨어진다. Panchang 등은 5번 마다 새로운 波數를 구하는 방법을 제시하였으나 본 數值模型을 실험한 結果 너무 빨리 波數를 새로운 값으로 대치하면 計算된 값이 충분히 收斂되지 않은 값을 가져 收斂速度가 늦어짐을 알았고 너무 많은 수의 反復計算 횟수를 사용하면(예를 들면 100회 이상) 計算된 값은 充分히 收斂되어 안정한 값을 가지나 새로 計算된 波數가 前 波數와 차이가 크게 되어 이 또한 만족스럽지 못한 結果를 나타내었다. 따라서 본 論文에서는 새로운 波數를 구하기 위해 30번씩의 反復 計算을 하여 波數를 구하였다. 마지막으로 새로운 波數가 정해지면 식 (19)의 聯立方程式의 右邊 forcing항도 바뀌게 된다. 그러나 반복기법이 급격히 收斂하여 단번에 안정한 값을 가지면 forcing항도 크게 변하지 않을 것으로 判斷되나 모형실험 結果 상당한 횟수가 要求되며 計算結果가 만족스럽지 못해 forcing項의 변화도 상당히 큰 것으로 추정된다. 또한 이 문제는 수리실험의 入射波浪을 지속적으로 보내 定狀狀態에 도달한 후 실험값을 구한 것으로 판단되기 때문에 forcing항이 일정한 값을 가지는 것이 物理現象에 보다 近接한 것으로 판단된다. 따라서 본 論文에서는 初期 forcing항을 계속 사용하였다.

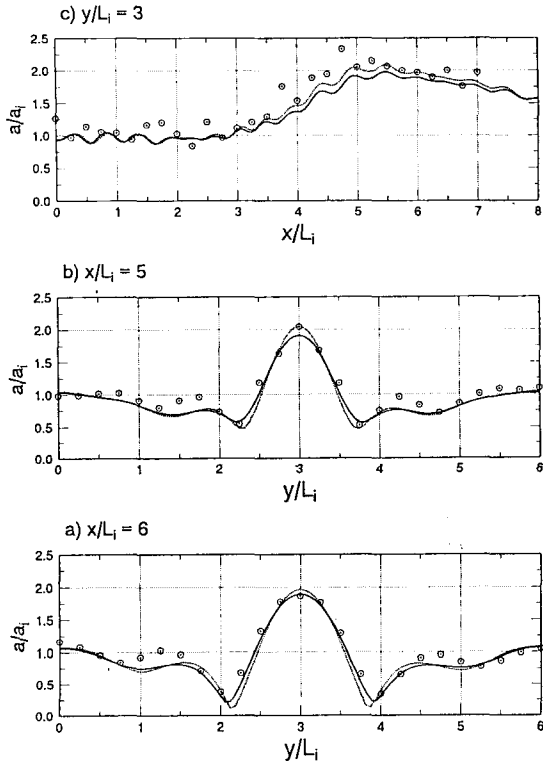


Fig. 3. Comparison of laboratory data and numerical results for circular shoal: \odot Data; \cdots Linear; $-$ Nonlinear

4.2 結果 比較

球形 淺堆와 橢圓形 淺堆에 대한 數值模型의 結果는 Fig. 3과 Fig. 4에 각각 圖示하였다.

그림에서 符號는 水理實驗 結果值이며 點線은 線形模型의 結果, 實線은 非線形의 結果이다. 數值結果는 實驗結果와 아주 잘 一致하며 既存의 高次 拋物形近似式의 結果(Kirby, 1986과 徐, 1990)보다 回折에 의한 細部의인 特性을 잘 나타낸 것으로 판단된다. 물론 拋物形 近似式의 橢圓形 淺堆의 격자크기는 25 cm로 본 PCGM의 크기 10 cm보다 크므로 동일한 해상력(resolution)을 갖지 않는다. 그러나 拋物形 近似式은 反射波의 영향을 고려할 수 없는 점을 指摘하고자 하며 동일한 해상력의 條件에서 두 모형의 상호 비교에 대한 研究가 進行중이다.

한편 Panchang 등의 橢圓形 淺堆 結果와 比較하면 本 模型의 結果가 약간 작은 값을 보인다. 그러나 제2 절에서 言及한 바와 같이 Panchang 등의 境界條件은 올바른 식이 아니며 Preconditioner를 구성하는 行列

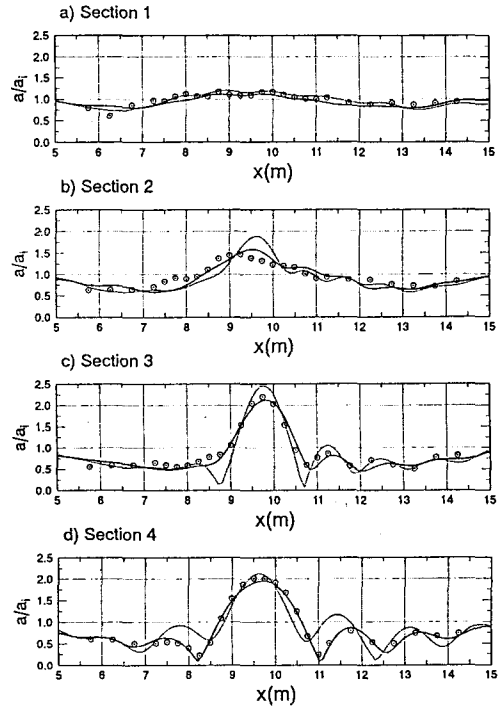


Fig. 4a. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: \odot Data; \cdots Linear; $-$ Nonlinear

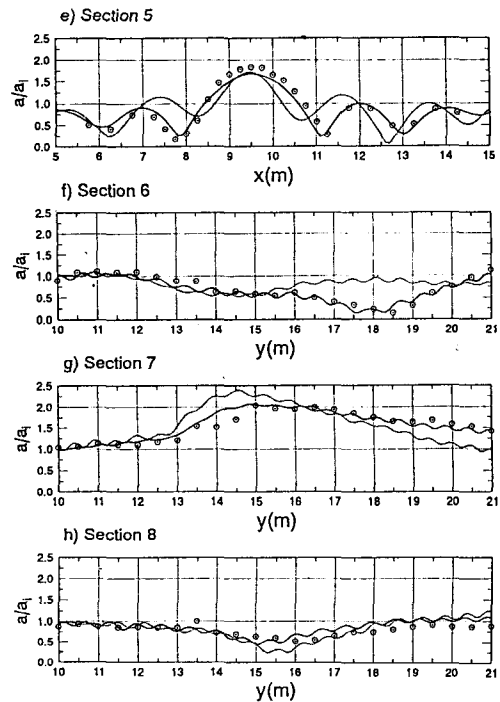


Fig. 4b. Comparison of laboratory data and numerical results for elliptic shoal: \odot Data; \cdots Linear; $-$ Nonlinear

Table 3. Total iteration numbers and CPU times

	Circular Shoal		Elliptic Shoal	
	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear
Iteration number	1,204	10,764	596	5,284
CPU time (sec)	598	7,255	1,132	13,367

Q에도 차이가 있다. 두 결과의 허용오차를 정한 방법이 달라 상대적인 비교라 할 수 있으며 본 모형의 Section 3, 4, 5에서는 수치결과가 실험값보다 약간 작고 또한 Panchang 등의 결과보다 작다. 그러나 Section 2, 6, 7, 8에서는 본 모형의 결과가 더 좋은 것으로 판단된다.

본 계산 결과를 구하는데 사용한 전산기는 486 DX2 66MHz 기종으로 표 3에 주어진 허용오차에 도달된 최종 반복횟수와 CPU 시간을 명시하였다.

非線形模型에 걸린 시간은 線形模型에 비해 계산 시간 약 12배 정도 더 소요되는 것으로 나타났다. 그러나 이렇게 많은 계산 시간이 필요함에도 불구하고 非線形模型의 결과는 매우 유용한 것이며 특히 정밀한 설계가가 요구되는 實施 設計에는 線形模型을 사용한 결과를 이용함으로써 막대한 豫算을 浪費하는 현실적인 요인도看過되어서는 안된다. 또한 非線形模型의 결과는 실제 波浪變形的 물리적 특성을 잘再現함으로써 학문적 가치도 매우 높다. 특히 非線形 結果는 굴절로 인해 淺堆 뒤에서 集中되는 波浪을 波高의 공간적 변화율로 인한 回折現象으로 과정을 재편하여 집중되는 倣(side-lobes)을 넓히는 작용을 한다. Fig. 3과 Fig. 4의 線形模型과 非線形模型 결과를 비교하면 쉽게 발견할 수 있다. 球形 淺堆의 결과는 이 현상이 상대적으로 뚜렷하지 않으며 따라서 주어진 入射波浪에 대한 球形 淺堆의 실험은 非線形效果가 상대적으로 적은 것으로 판단된다. 또한 Fig. 2의 Section 2는 橢圓形 淺堆의 끝단에 위치한 선으로 선형결과는 과도하게 波浪을 집중시키나 非線形결과는 과도한 波浪의 집중을 減少시켜 淺堆를 지난 波浪을 실제 현상에 가까운 形態로 初期부터 變化시킨다.

結局 水深이 複雜하게 變하여 水深에 의한 波高의 空間的 變化가 큰 淺海域의 波浪 推定에는 非線形模型을 使用하여야 할 것으로 判斷된다.

5. 結 論

淺海域의 波浪變形을 가장 적절히 지배하는 緩傾斜 波浪式을 有限差分法으로 차분화하여 PCGM의 演算 技法을 이용한 數值模型을 開發하여 球形 淺堆와 橢圓形 淺堆의 水理實驗과 비교하였다. 數值模型의 결과는 수리실험 결과와 아주 잘 一致함을 보여 數值模型의 優秀한 精密度를 立證하였다.

비슷한 數值模型인 Panchang 등(1991)의 模型과의 차이점인 境界條件과 Preconditioner를 構成하는 行列 Q에도 差異를 記述하고 두 模型의 結果를 分析하였다. 특히 非線形模型 실험에 나타난 새로운 波數를 구하는 反復횟수를 明確히 檢討하였고 波高 計算과 波向 計算에 대한 問題點을 整理하였다.

非線形性이 비교적 뚜렷한 橢圓形 淺堆實驗의 결과를 分析하여 波高의 空間的 變化로 인한 回折現象의 重要性을 浮刻시켜 水深이 複雜하게 變하는 淺海域의 波浪 推定에는 非線形模型이 適合함을 재확인하였다.

謝 辭

本 研究는 1994년 韓國海洋研究所에서 실시한 出損研 研究開發事業(PN00261)의 中間 研究 結果이며 研究費 支援에 感謝를 드립니다.

參考文獻

- 과학기술처, 1987. 해안구조물 適正設計條件 결정기법의 體系化研究, BSPE 00043-157-2.
- 과학기술처, 1988. 해안구조물 適正設計條件 결정기법의 體系化研究(II), BSPG 00064-195-2.
- 徐承男, 1990. 拋物形 近似式에 의한 淺海波 算定모델, 韓國海岸·海洋工學會誌, 2(3): 134-142.
- 徐承男, 1994. 緩傾斜 波浪式에 대한 PCGM 演算方式 比較, 韓國海岸·海洋工學會誌, 6(2): 186-195.
- Bayliss, A., Goldstein, C.I. and Turkel, E., 1983. An iteration method for the Helmholtz equation, *J. Comput. Phys.*, 49: 443-457.
- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, *Proc. of the 13th Coastal Eng. Conf.*, ASCE, 471-490.
- Berkhoff, J.C.W., Booy, N. and Radder, A.C., 1982. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, *Coastal Eng.*, 6: 219-232.
- Copeland, G.J.M., 1985. A practical alternative to the "mild-slope" wave equation, *Coastal Eng.*, 9: 125-149.

- Ebersole, B.A., 1985. Refraction-diffraction model for linear water waves, *J. Waterways, Harbours, Coastal Eng.*, ASCE, **111**(6): 939-953.
- Ito, T. and Tanimoto, K., 1972. A method of numerical analysis of wave propagation-application to wave diffraction and refraction, *Proc. of the 13th Coastal Eng. Conf.*, ASCE, 503-522.
- Kirby, J.T., 1986. Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves, *J. Geo. Phys. Res.* **91**(C1): 933-952.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A., 1984. Verification of parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves, *Coastal Eng.*, **8**: 219-232.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A., 1986. An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models, *Coastal Eng.*, **9**: 545-561.
- Mei, C.C., 1989. *The Applied Dynamics of Oceans Surface Waves*, World Scientific Publishing Co., Singapore.
- Panchang, V.J., Pearce, B.R., Wei, G. and Cushman-Roisin, B., 1991. Solution of the mild-slope wave equation by iteration, *Applied Ocean Res.*, **13**: 187-199.
- Radder, A.C., 1979. On the parabolic equation method or water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, **95**: 159-176.
- Warren, R., Larsen, J. and Madsen, P.A., 1985. Application of short wave numerical models to harbour design and future development of the model, In *Int. Conf. Numerical and Hydraulic Modelling of Ports and Harbours*, BHRA, Birmingham, U.K.