

有限水深에서의 不規則波의 波高 分布 Distribution of Irregular Wave Height in Finite Water Depth

安京模* · 마이클 오찌**

Kyung Mo Ahn* and Michel K. Ochi**

要 旨 : 有限水深에서의 불규칙파에 적용할 수 있는 波高의 확률분포함수를 2가지 해석적 방법으로 유도하였다. 첫번째 방법으로 새로이 유도된 확률분포함수는 Rayleigh 확률분포함수에 대한 直交 多項式을 유도함으로써 급수형태로 표시된다. 유도된 확률밀도함수를 비정규성이 강한 淺海에서 측정된 波浪資料와 비교하였다. 확률밀도함수가 자료의 막대그래프와 잘 일치하였으나, 확률밀도함수가 급수로 표시되어 있기 때문에 波高가 큰 부분에서 음의 확률값이 된다. 비록 음의 확률값의 크기가 작다 하더라도 波高의 極值分布函數를 구하기에 부적절하다고 판단된다. 두번째 방법은 최대 엔트로피 법(maximum entropy method)을 적용하여 파고 분포와 매우 잘 일치하며, 極值波高分布와 波高의 통계적인 특성 등을 추정하는 데 매우 유용함을 알 수 있다. 그러나 최대 엔트로피 법을 사용했을 경우, 비정규분포 특성을 나타내는 변위의 분포함수와 波高의 분포함수 사이의 함수관계를 구할 수 없었다.

Abstract □ This study is concerned with an analytic derivation of the probability density function applicable for wave heights in finite water depth using two different methods. As the first method of the study, a probability density function is developed by applying a series of polynomials which is orthogonal with respect to Rayleigh probability density function. The newly derived probability density function is compared with the histogram constructed from wave data obtained in finite water depth which indicate strong non-Gaussian characteristics. Although the probability density represents the histogram very well, it has negative density at large values. Although the magnitude of the negative density is small, it negates the use of the distribution function for estimating extreme values. As the second method of the study, a probability density function of wave height is developed by applying the maximum entropy method. The probability density function thusly derived agrees very well with the wave height distribution in shallow water, and appears to be useful in estimating extreme values and statistical properties of wave heights in finite water depth. However, a functional relationship between the probability distribution and the non-Gaussian characteristics of the data cannot be obtained by applying the maximum entropy method.

1. 緒 論

有限水深에서의 불규칙 波의 특성은 深海 불규칙 파의 특성과 상당히 다르다. 파형의 형태로서 볼 수 있는 차이는 有限水深에서의 波浪은 深海波와 비교하여 평균수면을 중심으로 파봉이 높고 뽀족하며 파곡은 낮고 편평하다. 따라서 有限水深에서는 파랑변위의 외도(skewness)가 현저해지며, 이는 波高가 커

질수록 더욱 현저해진다. 이는 각각의 파랑 주파수 사이의 파와 파의 비선형 상호작용(nonlinear wave-wave interaction)에 기인한다.

추계학적인 관점에서 보면, 深海 불규칙파의 수면 변위는 정규분포과정(Gaussian random process)을 따르며, 有限水深에서의 불규칙파는 비정규분포과정(non-Gaussian random process)으로 묘사될 수 있다. 비정규분포과정의 통계학적인 특성은 Gram-Charlier

*서울대학교 工科大学 土木工學科 博士後 課程 (Department of Civil Engineering, Seoul National University, Seoul, Korea)

**플로리다대학교 工科大学 海岸·海洋工學科 (Coastal and Oceanographic Engineering Department, University of Florida, Gainesville, FL 32611)

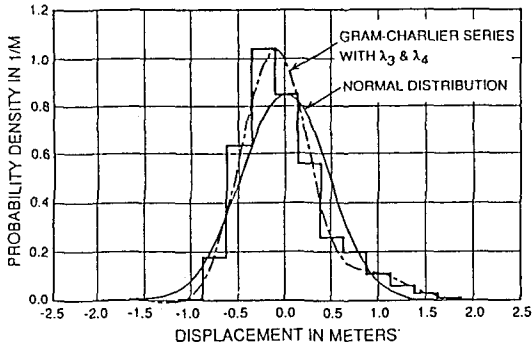


Fig. 1. Comparison between the Gram-Charlier series distribution and the histogram of deviations from the mean value constructed from wave data obtained in finite water depth.

급수분포로 알려져 있는 확률밀도함수로 흔히 표현된다. Fig. 1은 有限水深의 불규칙파의 평균수면으로부터의 변위의 막대그림과 Gram-Charlier 급수분포와의 비교를 보여주고 있으며, 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

그러나, 파봉, 파곡 또는 파봉-파곡간의 연직거리(지금부터 파고라고 정의함)의 크기에 대한 통계적인 정보가 해안 또는 해양구조물의 안전한 설계를 위해 훨씬 중요하다. 그 이유는 구조물설계시 반드시 필요한 극치파고(extreme wave height) 분포가 파고의 확률분포함수로부터 유도될 수 있기 때문이다.

비정규분포과정의 波高에 적용할 수 있는 분포함수의 해석학적인 유도는 정규분포과정의 파고의 경우와는 달리 간단하지가 않다. 따라서, 현재까지 극히 제한된 수의 연구만이 행해져왔으며, Tayfun(1984), Ochi and Wang(1984), 그리고 Ochi(1986) 등이 이에 속한다. 하지만 해석적인 유도의 어려움 때문에 근사적인 확률밀도함수만이 유도되었으며, 실제의 적용시 많은 제약조건들이 있다.

본 연구에서는 비정규분포과정에 적용할 수 있는 波高의 확률밀도함수를 해석적으로 폐합형(closed form)으로 유도하였다. 2가지의 방법으로 유도된 확률밀도함수를 비정규과정인 천해 불규칙파에 적용하여 비교하였다.

2. 直交 多項式을 이용한 확률밀도함수

비정규 분포 특성을 갖는 불규칙파의 파곡으로부터

파봉까지의 확률분포함수를 유도하는 한 방법은 Rayleigh 확률밀도함수에 대해 直交하는 多項式을 적용하는 것이다. 이러한 개념은 비정규분포과정의 변위 분포함수인 Gram-Charlier 급수 확률밀도함수를 유도할 때 Hermite 多項式이 정규분포함수에 대해 직교함을 이용하는 것과 유사하다. Rayleigh 분포에 직교인 多項式은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$L_n^{(\alpha)}(z)$ 로 표시된 Laguerre 多項式은 다음과 같이 정의된다.

$$L_n^{(\alpha)} = \frac{e^z z^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+\alpha}) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n+\alpha}{n-r} \frac{z^r}{r!} \quad (1)$$

이 다항식은 함수 $e^{-z} z^\alpha$ 에 직교하며 다음과 같이 정의된다.

$$\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(z) L_n^{(\alpha)}(z) e^{-z} z^\alpha dz = \begin{cases} \Gamma(n+\alpha+1)/n! & \text{for } m=n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

Laguerre 다항식의 직교성에 의해, 변수 Z 의 확률 밀도함수가 다음과 같은 급수형태로 표시될 수 있다.

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-z} z^\alpha L_n^{(\alpha)}(z) \quad (3)$$

여기서

$$a_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(z) f(z) dz \quad (4)$$

Laguerre 多項式을 Rayleigh 확률밀도함수에 직교인 多項式으로 변환하기 위해, 먼저 $\alpha=0$ 으로 놓고 $L_n^{(0)}(z)$ 를 $L_n(z)$ 로 표시하자. 또한 변수 Z 와 X 는 $X = \sqrt{RZ}$ 라는 함수관계를 만족하며, 여기서 R 은 양의 상수이다. 변수 Z 를 X 로 변환하면 식 3과 4로부터 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$f(x) = \left(\frac{2x}{R} e^{-x^2/R} \right) \sum_{n=0}^\infty a_n L_n(x^2/R) \quad (5)$$

여기서

$$a_n = \int_0^\infty f(x) L_n(x^2/R) dx \quad (6)$$

식 (5)에서 볼 수 있듯이, Rayleigh 확률밀도함수를

Laguerre 多項式을 포함한 급수형태로 일반화 할 수 있으며, 여기서 R 은 확률과정 $X(t)$ 의 2차 모멘트이다.

식 (5)에 있는 Laguerre 다항식 $L_n(x)$ 는 식 1로부터 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \frac{x^r}{r!} \quad (7)$$

이를 몇개의 항을 풀어서 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= 1 - x \\ L_2(x) &= 1 - 2x + \frac{x^2}{2} \\ L_3(x) &= 1 - 3x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \\ L_4(x) &= 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{24} \\ L_5(x) &= 1 - 5x + 5x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} - \frac{x^5}{120} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (6)과 (8)에서, 상수 a_n 은 표본집단의 자료의 모멘트로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{1}{2!} \left(2m_0 - \frac{4m_2}{R} + \frac{m_4}{R^2} \right) \\ a_3 &= \frac{1}{3!} \left(6m_0 - \frac{18m_2}{R} + \frac{9m_4}{R^2} - \frac{m_6}{R^3} \right) \\ a_4 &= \frac{1}{4!} \left(24m_0 - \frac{96m_2}{R} + \frac{72m_4}{R^2} - \frac{16m_6}{R^3} + \frac{m_8}{R^4} \right) \\ a_5 &= \frac{1}{5!} \left(120m_0 - \frac{600m_2}{R} + \frac{600m_4}{R^2} - \frac{200m_6}{R^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{25m_8}{R^4} - \frac{m_{10}}{R^5} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

따라서 비정규확률과정을 따르는 有限水深에서의 波高의 확률밀도함수를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{R} e^{-x^2/R} \left[1 + a_2 L_2(x^2/R) + a_3 L_3(x^2/R) \right. \\ &\quad \left. + a_4 L_4(x^2/R) + a_5 L_5(x^2/R) + \dots \right] \end{aligned} \quad (10)$$

위에 유도된 식 (10)의 확률밀도함수를 실측한 자료의 막대그래프 비교하였다. Fig. 2는 미국 North

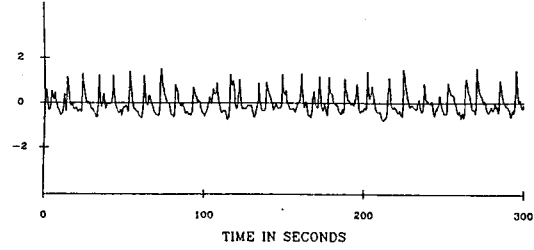


Fig. 2. Portion of wave records measured during the ARS-LOE project at location D615 where mean water depth is 2.1 meters.

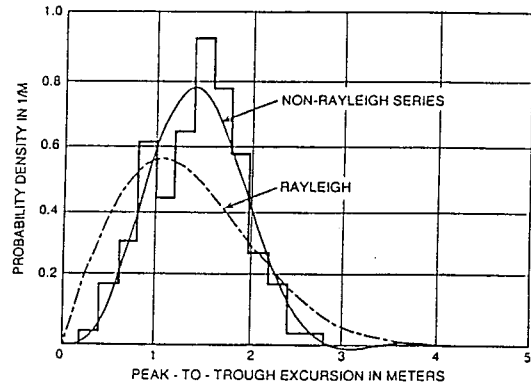


Fig. 3. Comparison between the non-Rayleigh series distribution and the histogram of peak to trough excursions of wave data obtained in finite water depth.

Carolina에 있는 미육군 공병단의 Field Research Facility에서 ARSLOE (Atlantic Ocean Remote Sensing Land-Ocean Experiment) project 중에 행해진 광범위한 파랑관측 자료중의 일부이다. 폭풍이 관측지점을 통과할 때, 수심 2.1m의 천해에서 측정된 자료이므로 Fig. 1과 2에서 볼 수 있듯이 비정규 특성이 매우 강한 전형적인 천해 불규칙파이다. Fig. 3은 새로이 유도된 확률밀도함수 식 (10)과 Fig. 2의 비정규과정의 파고분포의 막대그래프를 비교한 것이다. 여기서 확률밀도함수는 식 (10)에서 $L_5(x^2/R)$ 항까지를 취했다. Fig. 3에 점선으로 표시된 것은 Rayleigh 확률밀도함수이며 식 (10)의 첫째항을 나타내며, 이는 협대역(narrow-band) 정규분포과정의 파고분포 확률밀도함수를 나타낸다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 Rayleigh 확률밀도함수는 막대그래프로부터 현저하게 벗어남을 알 수 있으며, 만약 Rayleigh 분포로 가정하고 有意波高를 구하면 실제 有意波高보다 과소평가를 하게

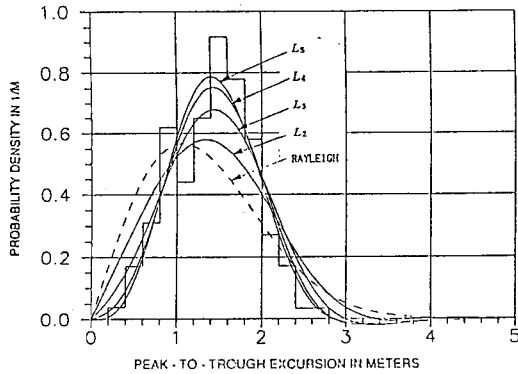


Fig. 4. Comparison of the non-Rayleigh series distributions including up to $L_2(x^2/R)$, $L_3(x^2/R)$, $L_4(x^2/R)$, $L_5(x^2/R)$ terms, respectively, and the histogram of wave data.

됨을 알 수 있다. 반면에 Fig. 3에서 볼 수 있듯이 식 (10)으로 유도된 급수형의 확률밀도함수는 막대그림과 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 波高가 클 때의 확률밀도가 음의 값을 갖는다. 음의 확률값의 크기가 작아서 파고의 확률분포의 산정엔 별 지장이 없으나, 파고의 극치분포와 같은 설계파고의 산정은 큰 波高의 값에 민감하게 변하므로 식 (10)과 같은 급수형태의 확률밀도함수를 사용하여 극치 확률분포를 추정하기엔 적절하지 않다. Fig. 4에서 볼 수 있는 바와 같이, 식 (10)의 확률밀도함수에서 급수의 수를 증가할수록 Rayleigh 분포로부터 막대그래프에 수렴하는 것을 알 수 있다. 하지만 급수의 수를 증가시키더라도 음의 값이 감소하는 속도는 상당히 느림을 알 수 있다.

3. 最大 엔트로피 法(MAXIMUM ENTROPY METHOD)의 적용

最大 엔트로피 法의 개념을 사용하여 유도된 확률 밀도함수를 비정규분포과정의 파고의 분포에 적용하여 파고의 극치분포함수를 구하였다. 最大 엔트로피 法은 통계분포에 대한 정보가 부족한 자료로부터 확률변수의 확률밀도함수를 구하는데 자주 이용되고 있다. 이 방법의 원리는 확률 모멘트의 제약조건하에서 엔트로피 함수를 최대화 하는 확률밀도함수가 자료의 不偏奇(unbiased)된 정보를 최소화 한다는 것이다(Jaynes(1968), Dowson and Wragg(1973), 그리고 Sobczyk and Trebicki(1990)). S로 표기되는 연

속확률변수의 엔트로피는 다음과 같이 정의된다.

$$S = - \int f(x) \ln f(x) dx \quad (11)$$

여기서 적분은 확률변수의 표본공간에 걸쳐 수행된다. 확률모멘트의 제약조건은 확률밀도함수 $f(x)$ 의 수학적 확률 모멘트와 자료의 확률 모멘트가 같다는 것을 의미한다.

모멘트 제약조건하에서 구하고자 하는 확률밀도함수는 Lagrange 乘數방법을 적용해서 유도할 수 있다. 즉 Lagrange 乘數 L 은 다음과 같이 표시되며,

$$L = - \int f(x) \left\{ \ln f(x) + \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k \right\} dx + \lambda_k m_k \quad (12)$$

$\partial L / \partial f = 0$ 를 취함으로 $f(x)$ 에 대하여 L 을 최대화함으로써 다음과 같은 확률밀도함수를 구할 수 있다.

$$f(x) = \exp \left\{ -1 - \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k \right\} \quad (13)$$

여기서 λ_k 는 $\partial L / \partial \lambda_k = 0$ 을 만족시키는

$$\int x^j \exp \left\{ -1 - \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k \right\} dx = m_j, \quad j=0,1,2,\dots \quad (14)$$

로부터 구할 수 있다. 여기서 $m_0=1$ 이며 $m_j(j \neq 0)$ 는 자료로부터 구한 표본의 모멘트이다.

표본공간의 확률변수가 $(0, \infty)$ 를 취하며, 자료로부터 모멘트 m_1 및 m_2 가 주어졌을 경우를 고려해 보자. 이 경우, 엔트로피 함수를 최대화하는 확률밀도함수가 존재하며, 추가조건 $m_1^2 < m_2 < 2m_1^2$ 를 만족하면 확률밀도함수가 유일하다는 것이 Dowson and Wragg(1973)에 의해 증명되었다. 식 (13)과 (14)로부터 확률밀도함수가 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$f(x) = \exp \{ -(1 + \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2) \} \quad (15)$$

여기서 매개변수 λ_0, λ_1 , 그리고 λ_2 는 다음과 같은 方程式組로부터 구해진다(Dowson and Wragg, 1973):

$$B \left(\frac{1 - 2\lambda_2 m_2}{m_1 \sqrt{2\lambda_2}} \right) = \frac{2\lambda_2 (m_1^2 - m_2) + 1}{m_1 \sqrt{2\lambda_2}} \quad (16)$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - 2\lambda_2 m_2}{m_1} \quad (17)$$

$$\lambda_0 = -\ln(\lambda_1 + 2\lambda_2 m_1) - 1, \quad (18)$$

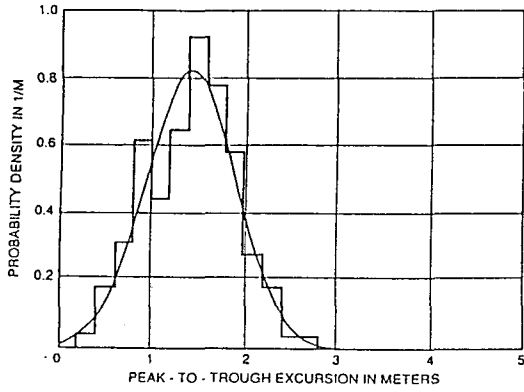


Fig. 5. Comparison between the probability density function derived by applying the maximum entropy method and the histogram of peak-to-trough excursions of wave data obtained in finite water depth.

여기서

$$B(z) = \frac{\phi(z)}{1 - \phi(z)} \quad (19)$$

여기서 $\phi(z)$ 는 각각 표준화된 정규확률밀도함수와 분포함수이다. 먼저 식 (16)으로부터 반복법으로 λ_2 를 구하고, 식 (17)과 (18)로부터 λ_1 과 λ_0 를 각각 구한다. 만약 $m_1^2 < m_2 < 2m_1^2$ 의 조건이 만족되지 않으면, 식 (14)로부터 m_3, m_4 등의 고차 모멘트를 고려해서 확률밀도함수를 유도할 수 있다.

위의 방법을 Fig. 2의 실측자료에 적용해보자. 자료로부터 계산된 모멘트는 $m_1 = 1.438$ 과 $m_2 = 2.292$ 이다. 따라서 $m_1^2 < m_2 < 2m_1^2$ 의 조건을 만족한다. 식 (16)부터 (19)로부터 $\lambda_0 = 3.717, \lambda_1 = -6.324$, 그리고 $\lambda_2 = 2.202$ 를 구할 수 있다. 막대그래프와 최대 엔트로피법으로 구한 확률밀도함수의 비교를 Fig. 5에서 볼 수 있다. 그림에서 볼 수 있듯이, 최대 엔트로피 법으로 유도된 확률밀도함수는 모든 x 값에 대해서 양수이며 막대그래프와도 매우 잘 일치한다.

식 (15)로 주어진 확률밀도함수에 순위통계(order statistics)를 적용하여 극치분포를 추정할 수 있다. n 개의 순위치가 定常的(stationary)이고 각 관측치가 서로 독립적(independent)이면, n 번 관측시의 극치의 확률밀도함수는 다음과 같이 표시된다.

$$g(y_n) = n[f(x) \{F(x)\}^{n-1}]_{x=y_n} \quad (20)$$

여기서

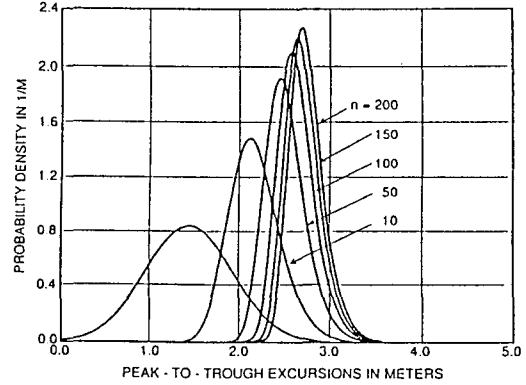


Fig. 6. Probability density function of extreme values in n -observations.

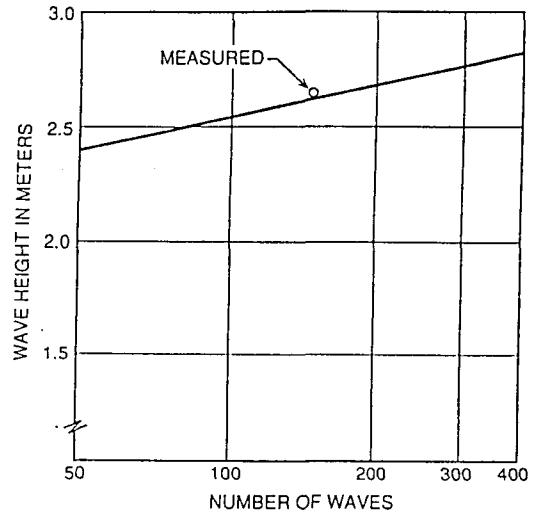


Fig. 7. Probable extreme peak-to-trough excursions (wave heights) as a function of number of waves.

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (21)$$

Fig. 6은 n 값의 변화에 따른 파고의 극치 확률분포함수를 보여주고 있다.

\bar{y}_n 으로 표시된 可能數值값(probable extreme value)은 극치 확률밀도함수 $g(y_n)$ 이 최대가 되는 y_n 값을 나타낸다. Fig. 7은 Fig. 2의 시계열 자료로부터 구한 確率極值값(°로 표시된 값)과 極值確率밀도함수로부터 確率極值값을 변수 n 의 함수로 표시한 것이다. 식 (20)으로부터 예측된 極限波高 값과 측정된 極限波高 값이 잘 일치함을 알 수 있다. 따라서 최대 엔트로피 법으로부터 구한 波高의 확률밀도함수가 자료의 波高

및 極值 등의 통계학적인 특성을 추정에 매우 유용함을 알 수 있다. 그러나 波高의 분포함수와 파랑자료의 비정규특성의 함수적인 관계는 본 연구에서는 밝혀낼 수 없었다. 그 이유는 波高 분포함수의 매개변수들이 波浪의 비정규분포과정의 원리를 고려함이 없이 波高의 모멘트로부터 결정되기 때문이다.

4. 結 論

直交 多項式의 級數를 적용하여 波高의 확률밀도함수를 유도하였다. 새로이 유도된 확률밀도함수를 강한 비정규분포 특성을 보여주는 淺海 불규칙파 자료의 막대그래프와 비교하여 서로 잘 일치함을 알 수 있었으나, 확률밀도함수가 급수로 표시되어 있기 때문에 파고가 큰 부분에서 확률밀도가 음의 값을 가지므로 極值 波高값을 추정하는 데 사용하기에는 부적절함이 밝혀졌다.

最大 엔트로피 法을 적용하여 유도된 波高의 확률밀도함수는 자료의 막대그래프와 매우 잘 일치했으며 또한 波高分布와 極值波高 등의 통계학적 특성의 추정에 매우 유용할 것으로 밝혀졌다. 深海 불규칙파의 경우 정규분포과정을 따르기 때문에 波高分布의 매개변수가 변위의 분산으로 표시되므로, 波高의 분포함수와 변위의 분포함수가 함수적인 상관관계를 갖

는다. 그러나, 最大 엔트로피 法을 적용한 확률밀도함수의 매개변수들은 波高의 모멘트로부터 구해지기 때문에, 변위의 分散이나 歪道(skewness) 등과 같은 매개변수와의 함수적인 상관관계를 구할 수 없었다.

비정규분포과정에서 변위의 분포함수와 波高의 분포함수가 함수적인 상관관계를 갖는 일반화된 이론의 수립을 위한 연구가 진행중임을 밝혀둔다.

參考文獻

- Dowson, D.C. and Wragg, A., 1973. Maximum-Entropy distributions having prescribed first and second moments, *IEEE Trans. Information Theory*, IT-19, pp. 689-693.
- Jaynes, E.T., 1968. Prior Probabilities, *IEEE Trans. System Science and Cybernetics*, SSC-4(3), pp. 227-241.
- Ochi, M.K., 1986. Non-Gaussian random processes in ocean engineering, *Jour. Probabilistic Eng. Mech.*, 5(3), pp. 28-39.
- Ochi, M.K. and Wang, W.C., 1984. Non-Gaussian characteristic of coastal waves. *Proc. 18th I.C.C.E.*, 1, pp. 516-531.
- Sobczyk, K. and Trebicki, J., 1990. Maximum entropy principle in stochastic dynamics, *Jour. Probabilistic Eng. Mech.*, 5(3), pp. 102-110.
- Tayfun, M.A., 1984. Nonlinear effects of the distribution of amplitudes of sea waves, *Ocean Engr.*, 11(3), pp. 245-264.