

## 漸近 近似法에 의한 波浪變位 계산 Computation of Free Surface Displacement for Water Waves by Asymptotic Approximations

徐 承 男\*  
Seung Nam Seo\*

**要 旨** : 外力에 의해 생성된 一定 水深 위를 전파하는 波浪變位の 시간변화를 漸近 近似法을 사용하여 분석하였다. Stationary Phase 방법, Steepest Descents 방법 그리고 先頭波浪 近似法을 사용하였다. 1차원 波浪과 2차원 波浪의 海面變位에 대한 近似式을 검증하기 위해 近似式과 數值積分으로 계산한 變位를 圖示하였다. 波高 減少率에 대한 既存의 結果인 1차원 先頭波浪의 減少率은  $t^{-1/3}$ , 後續波浪은  $t^{-1/2}$  그리고 2차원 後續波浪은  $t^{-1}$ 로 이들 近似式의 타당함을 立證하였다. 그러나 2차원 先頭波浪의 減少率은 既存 Kajiura의 結果인  $t^{-4/3}$ 과 다른  $t^{-5/6}$ 이 적합함을 나타내었다.

**Abstract** □ Time evolution of linear water waves on a constant depth generated by a disturbance is analyzed by asymptotic methods; stationary phase, steepest descents and leading wave approximation. In order to verify the derived formulae of surface displacements for 1-D and 2-D waves, surface displacements are calculated and plotted from both the formulae and a numerical integration. The existing results for surface displacements are verified in which the leading amplitude of 1-D waves during the evolution decays as  $t^{-1/3}$ , the rest of the wavetrain as  $t^{-1/2}$  and the rest of the wavetrain of 2-D waves as  $t^{-1}$ . But it is shown that the leading amplitude of 2-D waves decays as  $t^{-5/6}$  which is different from Kajiura's result,  $t^{-4/3}$ .

### 1. 緒 論

海水는 매질의 특성상 波浪을 분산시키며, 분산에 의해 波浪은 복잡하게 변화한다. 波浪의 시간에 따른 복잡한 변화를 계산하기 위해 우선 문제의 가장 뚜렷한 要因을 抽出하여 이를 단순화하여야 한다. 한편 해석적인 방법은 물리적 특성을 파악하는 데 유리하다. 이러한 점을 勘案하여 본 논문에서는 일정 수심 위를 지나는 線形 波浪의 分散現象만을 해석적인 방법을 사용하여 분석하고자 한다. 해석적인 방법중 하나인 漸近 近似法을 사용하여 波浪의 변화 특성을 시간의 함수로 나타내고 이 近似法의 정밀도를 또한 분석하였다.

발생 시각으로 부터 상당한 시간이 지난 후에 波浪변화를 예측하는 데 사용되는 漸近 近似法은 대부

분의 波浪역학에 관한 문헌에 記述되어 있으며 그 중요한 것은 다음과 같다: Jeffreys and Jeffreys(1956), Lighthill(1978), Mei(1989), Whitham(1974). 그러나 이들의 연구는 近似式과 誤差의 크기만 나타내었을 뿐 이들을 보다 정밀한 방법으로 計算한 結果와 직접 比較하여 나타내지는 않았다. 본 논문에서는 漸近 近似法인 Stationary Phase방법과 Steepest Descents방법의 誘導過程을 간략하게 정리하여 방법의 특성을 記述하였다. 그리고 初期條件으로 부터 波浪變位를 數值的으로 계산해 구한 값과 近似式에 의한 값을 比較하여 그 정밀도를 나타내었다.

先頭波浪은 파장이 매우 커서 波數가 0으로 접근하기 때문에 이에 대한 近似法은 앞의 두 방법과는 相異하다. 既存 연구결과에 따르면 1차원 波浪의 경우 先頭波浪의 시간에 따른 減少率은 그 後續波浪 減少

\*韓國海洋研究所 海洋工學研究部 (Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan 425-600, Korea)

率보다 작아 先頭波浪은 보다 서서히 크기가 작아진다. 그러나 Mei(1989)가 引用한 Kajiura(1963)의 결과에 의한 2차원 波浪의 경우 先頭波浪이 더 빨리 감소하는 것으로 나타났다. 즉 先頭波浪 減少率은  $t^{-4/3}$ 에 비례하는 반면 그 뒤를 따르는 後續波浪의 減少率은  $t^{-1}$ 에 비례한다.

後續波浪과 先頭波浪의 減少率들이 次元에 따라 달라지는 이유는 무엇일까? 상당히 어려워 보이는 이 質問에 대한 답을 구하려 하는 것은 이미 既存의 연구 결과가 옳다고 前提하고 이 문제를 接近하는 것이 된다. 그러나 앞에서 指摘한 바와 같이 既存 近似式에 대한 檢證이 이루어지지 않았기 때문에 이 문제를 다루기 앞서 구체적인 例題에 대해 既存의 연구결과를 검증하고자 한다.

본 논문에서는 數值積分으로 구한 시간별 海面 變位로부터 先頭波浪의 減少率을 最小 自乘法으로 近似시켜 Kajiura의 결과와 비교하였다. 2차원 先頭波浪에 대한 既存 연구결과와는 달리 본 논문의 결과에 따르면 先頭波浪의 減少率은 2차원 波浪에서도 작은 것으로 나타났다. 數衍하여 설명하면 最小自乘法에 의한 減少率은 1次元 波浪의 경우  $t^{-1/3}$ 로 주어져 既存 결과와 一致하나 2次元 波浪은  $t^{-5/6}$ 로 Kajiura의 결과와 다르다.

波浪 變位를 계산할 때 적합한 漸近 近似法을 각 경우에 따라 나타내고 이에 대한 誘導과정을 제 2절에 정리하였다. 제 3절에서는 앞 절에서 誘導한 近似式을 검증하고자 1차원과 2차원 波浪에 대해 각각 變位를 계산하는 數值 계산법을 기술하고 그 결과를 圖示하였다. 그리고 數值 계산값과 近似式의 값을 비교하여 近似式의 精밀도를 分析하고 시간에 대한 波浪 減少率을 기술하였다.

## 2. 漸近 近似法

線形 波浪에서는 海面 變位  $\zeta$ 를 여러 成分의 波浪의 疊으로 나타낼 수 있다. 계산상의 편리함을 위해 複素 函數의 積分 형태를 사용하고 물리적 의미를 갖는 實數部만 취해 海面 變位를 나타낸다.

$$\zeta(x, t) = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk, \quad (1)$$

여기서  $\omega(k) = \sqrt{gk \tanh kh}$ ,  $g$ 는 중력 가속도이다.

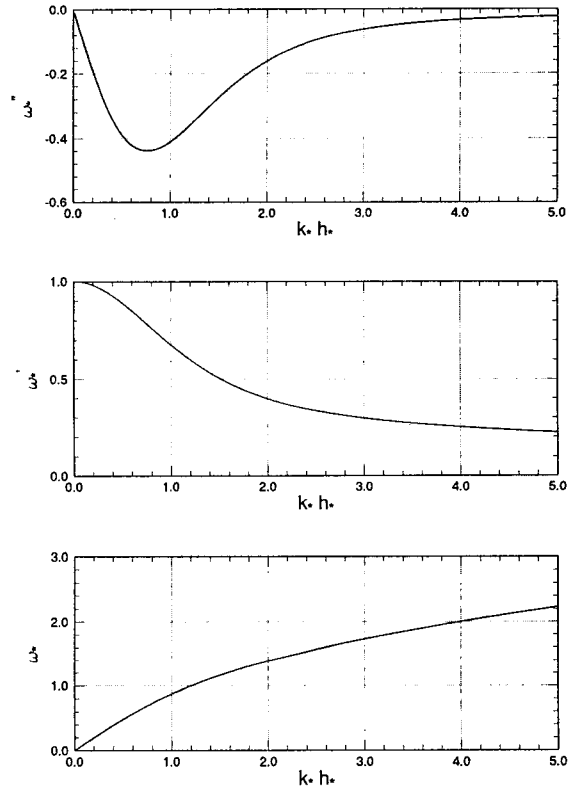


Fig. 1a. Derivatives of dispersion relationship with respect to k.

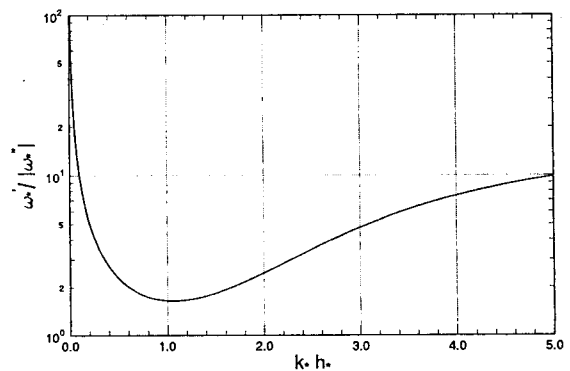


Fig. 1b. Ratio of  $\omega'$  to  $|\omega''|$  with  $k \cdot h$ .

이 후의 海面變位 식에서는 Re를 생략하였으나 實數部만이 의미를 갖는 것으로 한다. 식 (1)과 같은 積分은 초기조건에 따라 주어지는 성분 波浪의 진폭과 波浪 分散式의 함수형태 때문에(그림 1a 참조) 積分 값을 解析的으로 구할 수 없는 경우가 많다. 따라서

이런 경우에 數值積分 방법을 사용하여 그 값을 구하게 된다. 그러나 때로는 徐(1993b)가 지적한 바와 같이 積分區間에서의 積分函數의 振動이 매우 빨라 시간에 따른 海面의 변화를 數值積分法으로 계산하기에는 不適合할 때가 생긴다. 이런 경우 漸近 近似法을 사용하며 이로부터 概略적으로나마 波浪 變化의 물리적 특성을 把握할 수 있다.

본 절에서는 波浪의 變化를 豫測하는 데 사용되는 漸近 近似法인 Stationary Phase방법, Steepest Descents방법 그리고 先頭波浪의 近似法에 각각에 대해 Jeffreys와 Jeffreys(1956)의 방법을 基礎로 하여 近似式을 誘導하였다. 이들 近似法은 전 積分 구간에서 均等하게 成立하는 것이 아니라 特異點 附近에서만 成立하므로 local analysis로 분류된다(Bender와 Orszag, 1978).

### 2.1 Stationary Phase방법

外力에 의해 생성된 波浪이 발생지역으로부터 傳播할 때 시간에 따른 海面 變位를 나타내고자 한다. 우선 대상이 되는 波浪은 發生 區域으로부터 멀리 떨어진 즉 시간  $t$ 가 상당히 큰 값을 갖는 경우를 대상으로 한다. 식 (1)을 다음 식 (2)로 나타내고 여기서  $A$ 와  $f$ 는 微分 가능한 函數로 假定한다.

$$\zeta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{itf(k)} dk, \quad (2)$$

$$\text{여기서 } f(k) = k \frac{x}{t} - \omega(k)$$

시간  $t$ 는 상당히 큰 값으로 가정했기 때문에 積分 구간내의 微小區間에서 位相函數  $f$ 가 조금만 변화해도 積分函數 가운데 삼각함수는 매우 빠른 振動을 보이게 된다. 이로 인해 이 微小區間에서의 積分값은 相殺되어 無視할 수 있게 되며 Stationary Phase방법은 이 점을 이용한다. 그러므로 식 (2)의 積分값은 位相函數  $f$ 의 特異點인 극점(stationary point) 주위에서 대부분 정해진다.

特異點을  $k_0$ 이라 하고 이 점에 대해 位相函數를 Taylor級數 展開하면 식 (3)이 된다.

$$f(k) = f(k_0) + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 f''(k_0) + \dots, \quad (3)$$

$$\text{여기서 } f'(k_0) = 0$$

식 (3)을 식 (2)에 代入하고 미소거리를  $\epsilon$ 이라 하면 식 (2)는 앞에서 설명한 바에 따라 다음과 같은 近似式으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &\simeq e^{itf(k_0)} A(k_0) \int_{k_0 - \epsilon}^{k_0 + \epsilon} \exp\left\{i \frac{(k - k_0)^2}{2} f''(k_0)\right\} dk \\ &= e^{itf(k_0)} A(k_0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \exp\left\{i \frac{tf''(k_0)}{2} u^2\right\} du \quad (4) \\ &\simeq e^{itf(k_0)} A(k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i \frac{tf''(k_0)}{2} u^2\right\} du \end{aligned}$$

한편  $\epsilon$ 로 부터 無限大까지의 구간에서는 特異點이 없으므로 積分區間을 무한대까지 확장함에 따른 誤차는 식(4)의 첫 식에 허용한 오차와 같게 된다. 미소거리  $\epsilon$ 을 導入하지 않으면 식 (4)에서 처럼 常係數를 積分記號 밖으로 끌어낼 수 없는 경우가 생기므로 이 과정은 반드시 필요하다. 또한 積分區間을 擴張하면 解析인 방법으로 積分할 수 있는 이점이 있다. 즉 식 (4)는 식 (5)가 된다.

$$\zeta(x, t) \simeq e^{itf(k_0)} A(k_0) \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(k_0)|}} e^{-im/4 \operatorname{sgn} f''(k_0)}, \quad (5)$$

여기서  $\operatorname{sgn} f''(k_0)$ 은  $f''(k_0)$ 의 부호를 의미한다. 특이점  $k_0$ 는  $\omega'(k_0) = x/t$ 를 만족하므로 일정한 속도로 움직이는 관측자는 항상 일정한 波數(또는 파장)의 波浪만을 보게 된다. 이 速度는 波浪의 群速度가 된다. 그림 1a에 圖示된 것과 같이 특이점  $k_0$ 가 存在하기 위해서는 觀測者는 淺海波의 群速度보다 빠르게 움직여서는 안된다. 그림에서 無次元 變數들은 添字 \*를 가지며 파수  $k$ 와 수심  $h$ 는 뒤에서 설명할 대표 길이로 무차원화하였고  $\omega$ 는 무차원 파수와 수심의 함수이다. 그러나 이 일정한 波數를 갖는 波浪의 振幅(또는 파고)는  $t^{-1/2}$ 에 比例함으로 時間에 따라 減少한다.

### 2.2 Steepest Descents방법

近似法인 Steepest Descents방법도 주어진 積分을 직접 계산하는 대신에 積分에 가장 크게 影響을 주는 구간들을 찾아 그 區間에서 解析적으로 積分하는 것으로 앞 절의 Stationary Phase방법과 같다. 그러나 두 방법의 差異點은 Stationary Phase 방법의 積分 變數  $k$ 는 實數이나 Steepest Descents방법에서는 이를 複素數로 擴張하여 取扱한다. 식 (2)에서 시간  $t$ 는

陽의 整數이고  $A$ 와  $f$ 는 微分可能한 複素函數로 가정한다.

積分函數가 미분가능하기 때문에 Cauchy정리에 의해 積分값이 같은 특수한 曲線  $C_s$ 을 택할 수 있다. 이 曲線은 Saddle점이라는 특이점  $k_0$ 을 지나도록 정하여지며 이 점에서는  $f'(k_0)=0$ 이 된다. 또한 이 점 부근에서는  $if(k)$ 의 實數部分은 極大가 되고 虛數部分은 一定하게 된다(Jeffreys와 Jeffreys, 1956). 즉 곡선  $C_s$ 상 점  $k_0$  부근에서

$$\text{Im } if(k) = \text{Im } if(k_0), \quad (6)$$

函數  $if(k)$ 를 點  $k_0$ 周邊에 대해 Taylor級數 전개하면

$$if(k) = if(k_0) + \frac{i(k-k_0)^2}{2} f''(k_0) + \dots \quad (7)$$

점  $k$ 가 점  $k_0$ 에 가까우면 식 (7)의 오른쪽 둘째항까지만 취해 생기는 誤差는 無視할 수 있고 식 (6)을 이용하면 식 (8)을 얻게 된다.

$$\text{Re } [if(k) - if(k_0)] = \frac{i(k-k_0)^2}{2} f''(k_0) < 0 \quad (8)$$

식 (8)의 오른쪽 항을 다음 식 (9)를 써서 나타내고

$$k - k_0 = re^{i\theta}, \quad f''(k_0) = |f''(k_0)| e^{i\alpha}, \quad dk = e^{i\theta} dr \quad (9)$$

이제 식 (9)를 식 (8)에 대입한다. 그러면  $\alpha$ 는 주어진 값이므로  $\theta$ 만을 定하면 되며 식 (10)으로 주어진다.

$$\begin{aligned} if(k) &\simeq if(k_0) + \frac{r^2}{2} |f''(k_0)| e^{i(2\theta + \alpha + \pi/2)} \\ &= if(k_0) - \frac{r^2}{2} |f''(k_0)|, \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 조건  $2\theta + \alpha + \pi/2 = \pi$ 가 부여되었다.

曲線  $C_s$ 상의 點  $k_0$ 로 부터의 미소거리  $\epsilon$ 을 導入하고 식 (9)과 (10)을 식 (2)에 대입한다. 그리고 식 (10)의 條件을 利用하여 정리하면 近似式 (11)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \zeta(x,t) &\simeq e^{if(k_0)} A(k_0) e^{i\theta} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \exp\left\{-\frac{r^2}{2} |f''(k_0)| t\right\} dr \\ &\simeq e^{if(k_0)} A(k_0) e^{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{r^2}{2} |f''(k_0)| t\right\} dr \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(k_0)|}} e^{if(k_0)} A(k_0) e^{i(\pi/4 - \alpha/2)} \end{aligned} \quad (11)$$

시간  $t$ 는 상당히 큰 값으로 가정했기 때문에 위 둘째식의 積分區間 확장에 따른 오차는 첫 식의 오차 크기와 같음을 보일 수 있다(Jeffreys와 Jeffreys, 1956).

두개의 相異한 漸近 近似法에 의한 近似式 (5)와 (11)은 마지막 指數函數 部分을 除外하면 같다. 그러나 이 부분도 마땅히 같아야 하며 제3절에서 이를 증명하기로 한다.

### 2.3 先頭波浪의 近似法

先頭波浪의 波數는 0으로 接近하기 때문에 이에 대한 近似法은 앞 두절의 방법과는 상이하다. 近似式 (5) 또는 (11)의 自乘根號 내의 값은 식 (1), (2) 그리고 特異點에 대한 식으로 부터  $\omega'(k_0)/|\omega''(k_0)|$ 에 비례함을 보일 수 있어 파수가 0으로 접근하면 그림 1b에 圖示한 것과 같이 그 값이 매우 커져서 近似式의 精密度가 떨어진다. 그러므로 앞 두절에서 誘導한 방법을 사용할 수 없다.

波數가 0에 접근할 만큼 작으면 位相函數  $f$ 는 식 (12)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} f(k) &= k \frac{x}{t} - k\sqrt{gh} \left(1 - \frac{(kh)^2}{3} + \frac{2(kh)^4}{15} - \frac{17(kh)^6}{315} + \dots\right)^{1/2} \\ &\simeq k \left(\frac{x}{t} - \sqrt{gh}\right) + \frac{k\sqrt{gh}}{6} (kh)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

다음 海面 變位에 식 (12)을 대입하면 先頭波浪은 식 (13)으로 近似시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \zeta(x,t) &= \int_0^{\infty} A(k) \cos(kx - \omega t) dk \\ &\simeq A(k_t) \int_0^{\infty} \cos\left\{x - \sqrt{gh} t\right\} k + \frac{\sqrt{gh} h^2 t}{6} k^3 \Big\} dk \\ &= A(k_t) \left(\frac{2}{\sqrt{gh} h^2 t}\right)^{1/3} \pi \text{Ai}\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{gh} h^2 t}\right)^{1/3} (x - \sqrt{gh} t)\right\} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 Ai는 Airy函數이고  $k_t$ 은 식 (12)가 성립하는 0에 가까운 작은 수이나 이에 대한 자세한 설명은 제3절에서 記述하기로 한다.

### 3. 波浪에 대한 適用

제2절에서 비교적 一般的인 境遇를 대상으로 近

似式을 誘導하였으나, 본 절에서는 具體的인 例題에 대해 海面 變位를 數值的으로 구하고 이를 近似式과 比較하여 그 精密度를 분석한다. 우선 앞 절에서 미루었던 近似式 (5)와 (11)이 같음을 證明하자. 본 논문에서는 進行파만을 대상으로 하고 마찰 감쇠 또한 고려하지 않기 때문에 관측자의 속도로 같이 進行하는 波浪의 파수  $k_0$ 는 식 (1)로부터 實數가 된다. 따라서  $f''(k_0)$ 도 實數이며 식 (10)으로부터  $\alpha=0$ 이 된다. 이를 식 (11)에 代入하면 식 (14)를 얻는다.

$$\zeta(x,t) \simeq A(k_0) \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(k_0)|}} e^{i\pi/4} e^{if(k_0)} \quad (14)$$

한편 식 (5)에서  $f''(k_0)$ 는 陰數이므로 식 (14)와 같게 된다. 이로써 두개의 相異한 方法인 Stationary Phase方法和 Steepest Descents方法에 의해 誘導된 近似式은 同一한 式임을 보였다.

한걸음 더 나아가 특이점  $k_0$ 에 대한 관계식  $t=x/\omega'(k_0)$ 을 식 (14)에 代入하면 식 (15)를 얻는다.

$$\zeta(x,t) \simeq A(k_0) \sqrt{\frac{2\pi \omega'(k_0)}{x|\omega''(k_0)|}} e^{i\pi/4} e^{if(k_0)} \quad (15)$$

波浪 分散式의 미분값의 比인  $\omega'(k_0)/|\omega''(k_0)|$ 는 波高 減少率에 영향을 주며  $kh=1.06$ 에서 1.645의 最小값을 보인다.  $kh$ 가 이 점에서 멀어짐에 따라 比의 값이 增加하나 0으로 接近할 때 더욱 急速히 增加한다 (그림 1b 참조). 따라서 同一한 條件에서는 1附近的  $kh$ 값을 갖는 波浪成分의 振幅은 다른 파장의 振幅보다 상대적으로 작다.

주어진 초기조건으로부터 시간에 따른 波浪의 進行 방향은 1次元 波浪의 경우 兩側으로 퍼져 나가나 2次元 波浪은 發生地로부터 單쪽인 한 방향으로만 퍼져 나간다(그림 2 참조). 그림은  $t=30$ 에서  $h_*=0$ .

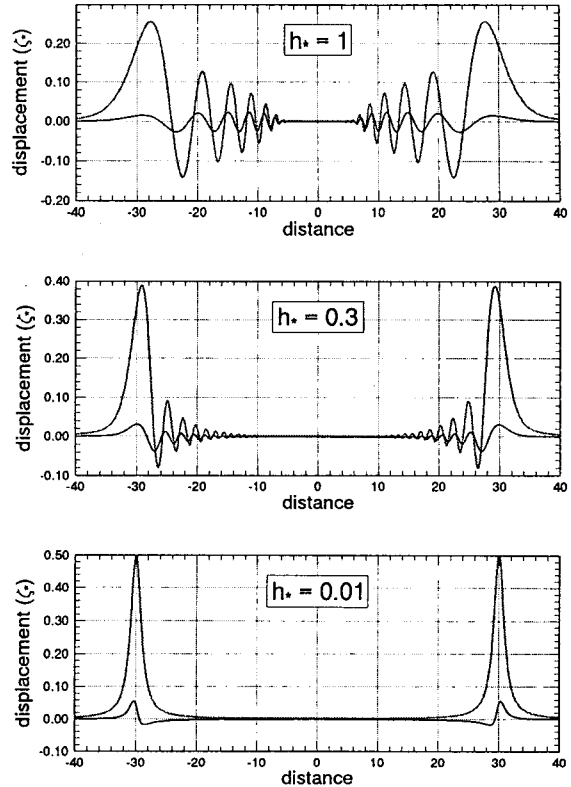


Fig. 2. Surface displacements at different depths;  $h_*=0.01, 0.3$  and 1. —, 1-D wave; - - -, 2-D wave.

01, 0.3 그리고 1인 경우에 대한 표 1의 海面 變位를 나타낸다. 특히 천해인  $h_*=0.01$ 인 경우 1次元 波浪은 初期海面 形態가 둘로 나누어져 形態가 바뀌지 않고 傳播되는 D'Alembert解(Greenberg, 1978)를 나타내나 2次元 波浪은 初期海面 形態와 다른 陰의 海面이 나타나 形態가 바뀌어진다. 따라서 1次元 波浪과 2次元 波浪의 特性이 다르므로 본 절에서는 이를 區別하여 다루었다. 각 경우에 대한 초기 조건식들과 海面 變

Table 1. Initial conditions and corresponding surface displacements for 1-D and 2-D waves

	1次元 파랑(1-D wave)	2次元 파랑(2-D wave)
초기조건식	$\frac{Aa^2}{x^2+a^2}$	$A\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-3/2}$
해면변위식	$A \int_0^\infty ae^{-ka} \cos kx \cos \omega t \, dk$	$A \int_0^\infty kae^{-ka} J_0(kr) \cos \omega t \, dk$
무차원 $\zeta$	$\int_0^\infty e^{-kx} \cos kx \cos \omega t \, dk$	$\int_0^\infty k e^{-kr} J_0(kr) \cos \omega t \, dk$

位식을 표 1에 정리하였고 무차원한 初期海面은 둔덕 형태로 陽의 값만을 갖는다(徐, 1993b 참조).

길이 단위를 무차원화하기 위해 대표길이  $a$ , 海面變位에는 初期 最大變位  $A$ 를 이용하여 만든 무차원 변수는 식 (16)과 같이 定義한다.

$$x^* = \frac{x}{a}, r^* = \frac{r}{a}, h^* = \frac{h}{a}, \zeta^* = \frac{\zeta}{A}, k^* = ka, t^* = \frac{\sqrt{gh}}{a} t, \omega^* = \frac{\sqrt{k \cdot h \cdot \tanh k \cdot h}}{h^*} \quad (16)$$

表 1의 海面變位式에서 삼각함수와 Bessel함수는 그 크기가 1보다 작거나 같으므로 積分값은 指數函數에 의해 左右되며 積分區間을 비교적 작게 잡아도 그 정밀도에는 큰 영향을 주지 않는다( $k^*=20$ 이 사용됨). 數值積分의 step size는 0.001으로 정해 막대積分法(rectangular rule)을 사용하였다.

이 후의 海面變位式을 포함한 모든 식의 변수에 편의상 첨자를 明記하지 않으나 무차원 변수이고 무차원 변수가 아닌 경우에만 이를 밝히기로 한다.

### 3.1 1차원 波浪

표 1에 주어진 1차원 波浪은 Mei(1989)가 사용한 예제이며 이에 대한 近似式과 數值結果를 비교하자. 주어진 海面變位式으로 부터  $t=0$ 을 대입하여 Gradshcheyn와 Ryzhik(1980)의 식(3.893.2)를 사용하면 쉽게 초기 조건식을 얻을 수 있다. 무차원화한 海面變位式의 삼각함수를 지수함수 형태로 표시하고  $x$ 축의 陽의 方向으로 一定한 速度로 進行하는 觀測者가 볼 수 있는 波浪에 대한 近似式은 식 (17)로 주어진다.

$$\zeta = \text{Re} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^k (e^{i(kx - \omega t)} + e^{i(kx + \omega t)}) dk \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{t|\omega''|}} e^{-k_0 x} \cos(k_0 x - \omega_0 + \pi/4) \quad (17)$$

여기서  $\omega$ 와  $\omega''$ 의 添字  $o$ 는 특이점  $k_0$ 에서 구한 값을 의미한다.

그림 3에 수심  $h^*=1$ 의 시간별 海面變位를 나타냈다. 그림에서 實線은 表 1의 式을 數值積分에 의해 구한 값을 나타내며 a, b, c는 각각 파수  $k^*$ 의 값이 0.3, 1, 3인 波浪의 시간별 位置를 나타낸다. 시간이 흐를수록 보다 많은 수의 波浪성분이 나타나며 일정한

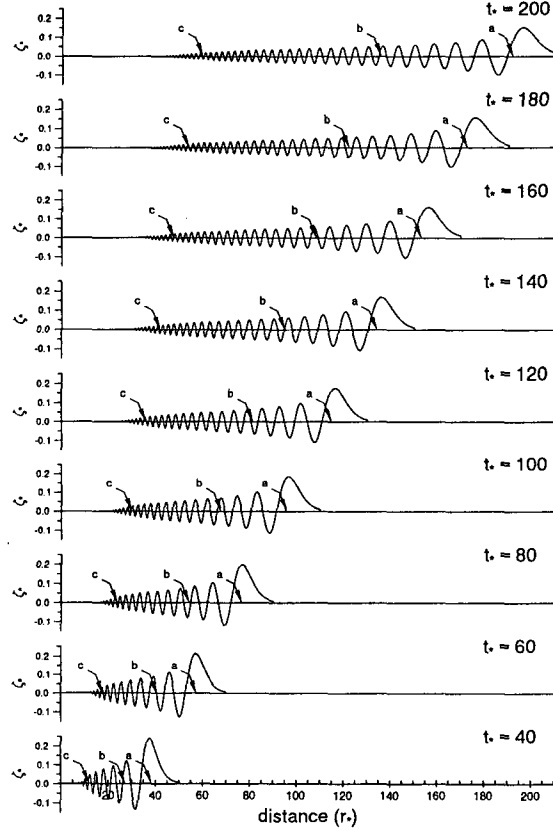


Fig. 3. Surface displacements of an 1-D wave for  $h^*=1$  at different times; a, b and c locate the points moving at certain group velocities.

파장을 나타내는 地點間의 距離가 增加함을 알 수 있다. 이는 波浪의 群速度가 파장에 따라 다르기 때문이다(그림 1a 참조).

그림 4a에는 그림 3에서 택한 波浪들의 시간에 따른 海面變位를 상세히 나타내었다. 그림에서 實線은 표 1의 式을 數值積分하여 나타낸 값이며 點線은 식 (17)의 近似式이다. 先頭波浪에 가까운  $k^*=0.3$ 의 경우를 제외하면 시간이 증가할수록 두 값의 차이가 적어진다. 이 두 경우( $k^*=1$ 과 3)에 대한 그림에서 시간에 따라 振幅이 減少하고 成分波浪의 波速이 群速度보다 크므로 海面은 波形(sinusoidal) 형태로 나타난다. 綜合하면 一定한 群速度로 움직이는 觀測者는 항상 같은 파장의 波浪만을 보게되나, 진폭은 시간에 따라 감소하고 波速이 群速度보다 커서 뒤 따라오는 波浪이 앞 질러 가는 것처럼 보인다.

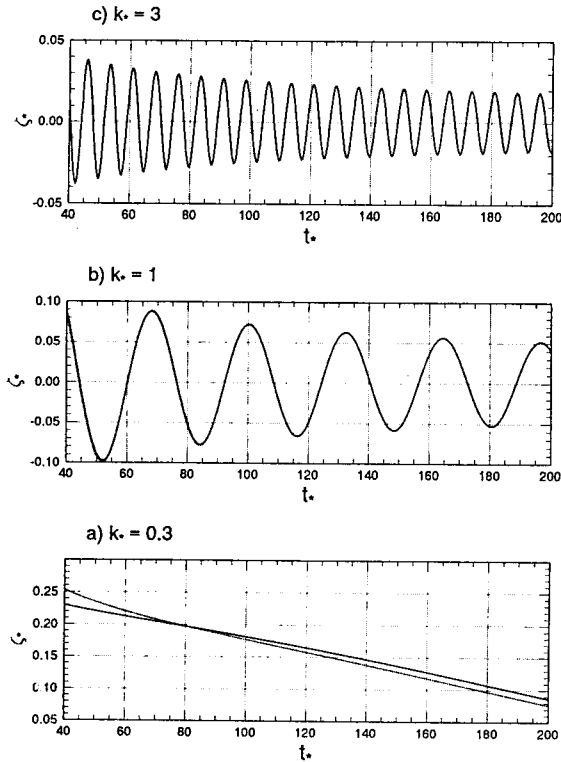


Fig. 4a. Surface displacement of an 1-D wave for  $h_0=1$  moving at a certain group velocity: —, Numerical; ···, Approximate.

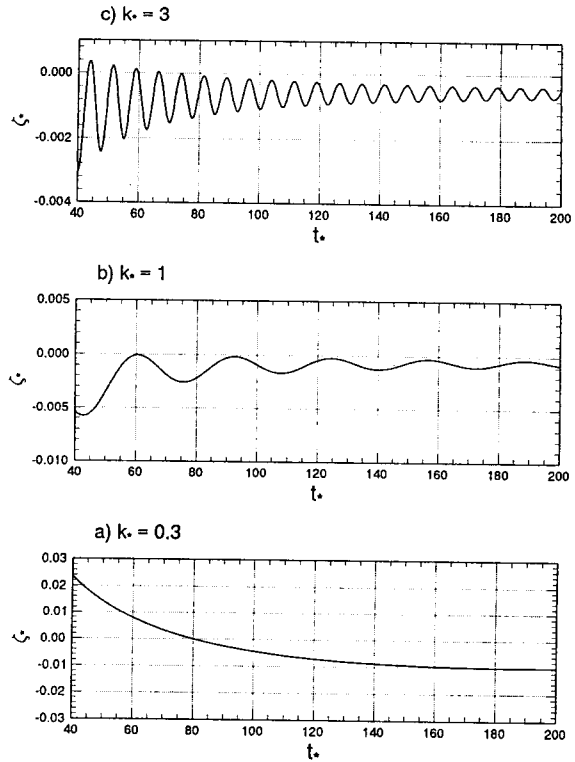


Fig. 4b. Surface displacement error of an 1-D wave for  $h_0=1$  moving at a certain group velocity.

한편  $k_0=0.3$ 인 경우 近似式이 數值結果와 상당한 차이를 보이고 있다. 그 이유는 다음 두 가지 要因에 의해 定해지는 것으로 推測된다. 첫째 그림에 圖示된 시간이 비교적 짧아 波浪分散에 의해 成分波浪으로 완전히 나누어지지 않은 것과(그림 3 참조) 둘째 이 파장에 속한 波浪은 減少率  $t^{-1/3}$ 인 先頭波浪과 減少率  $t^{-1/2}$ 인 後續波浪 사이에 속해 轉移的인 減少率을 갖기 때문인 것으로도 추측할 수 있다. 그러나 이 차이가 어느 요인에 의해 주로 정하여지는가에 관한 문제는 본 논문의 範疇에서 벗어나기 때문에 이를 다루지 않았다.

數值積分 값에서 近似式의 값을 뺀 값을 誤差라 定義하고 이 오차의 시간에 따른 변화를 그림 4b에 圖示하였다. 시간이 흐를수록 오차의 크기가 작아지는 것으로 나타났다. 海面의 극값 부근에서 오차가 커지고 波形形態를 보이며 位相에 의한 오차는 상대적으로 작은 것으로 판단된다. 그리고 後續波浪의 경우에는( $k_0=1$ 과 3) 오차가 작아 波浪變形 계산에 近

似式을 사용하여도 좋을 것으로 판단된다.

先頭波浪의 近似式 (13)을 식(16)에 따라 무차원화하여 나타내면 식 (18)을 얻는다.

$$\zeta \approx e^{-k_l t} \frac{\pi}{2} \left( \frac{2}{h^2 t} \right)^{1/3} \text{Ai} \left\{ \left( \frac{2}{h^2 t} \right)^{1/3} (x-t) \right\} \quad (18)$$

여기서  $k_l$ 은 식 (12)가 성립할 정도로 작은 값이어야 하며 Ai함수 값은 그림 3의 先頭波浪과 비슷한 형태를 나타낸다. 그리고 Ai함수의 첫째 극대값이 최대값이 되며 Ai(-1.02)에서 0.536의 값을 갖는다(Abramowitz와 Stegun, 1972).

시간  $t$ 가 주어진 경우, 數值計算으로 부터 얻은 그림 3에서 첫번째 극대값이 나타나는 위치  $x$ 와 海面變位 그리고  $k_l=0$ 를 식 (18)에 대입하여 Ai함수가 최대값을 갖는 위치와 變位를 그림 5a에 함께 나타내었다. 그림에서 實線은 數值計算에 의한 값이고 點線은 식 (18)로 부터 계산한 값이다. 近似式에 의한 先頭波浪의 위치는 매우 正確하나 變位는 상당한 差異를 보인다.

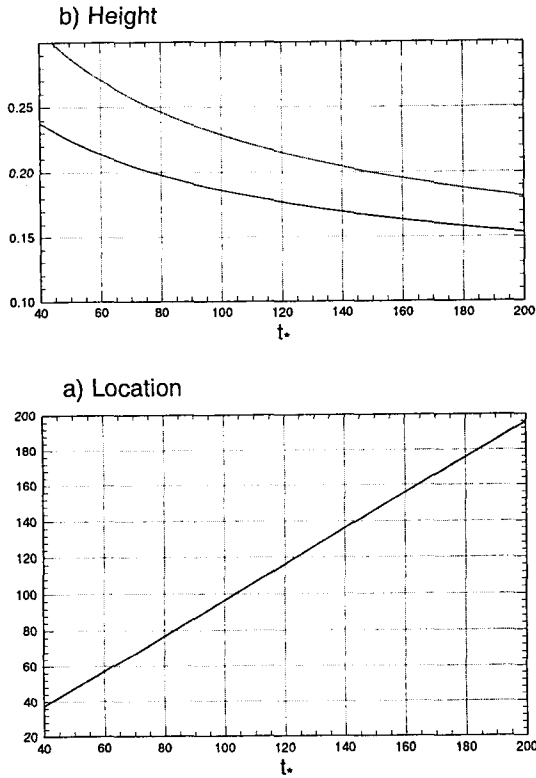


Fig. 5a. Leading wave height and location for an 1-D wave: —, Numerical, ···, Approximate.

그러나 시간에 따른 減少率은 거의 같은 것으로 보여 이를 說明하고자 다음과 같은 最小自乘法를 사용하였다. 식 (18)에서 變位の 減少率은  $t^{-1/3}$ 이므로 數値計算에 의한 先頭波浪의 變位를 가장 잘 나타내도록 이를 最小自乘法의 좌표식(coordinate equation)으로 사용하였다. 즉,

$$\text{Coordinate Eq.} = \begin{cases} at^\alpha, & \text{Case 1} \\ at^\alpha + b, & \text{Case 2} \end{cases} \quad (19)$$

여기서  $\alpha = -1/3$ 이며, 最小自乘法에 의해 각 경우에 대해 상수  $a, b$ 를 구한 값을 표 2에 整理하였다. 常數  $a, b$ 값은 시간  $t$ 의 범위에 따라 다소 달라질 것으로 예상되지만 본 논문에서는 그 값의 변화량의 크기를 정하는 데 목적이 있는 것이 아니라  $t^{-1/3}$  減少率이 適合한 것인가를 判斷하는 데에 있다. 그림 5b에 數値계산값과 표 2의 값을 써서 계산한 값을 비교하여 나타내었다. 境遇 2로 주어진 좌표식은 주어진 구간에서 先頭波浪의 變位와 거의 같으므로  $t^{-1/3}$  減少率은

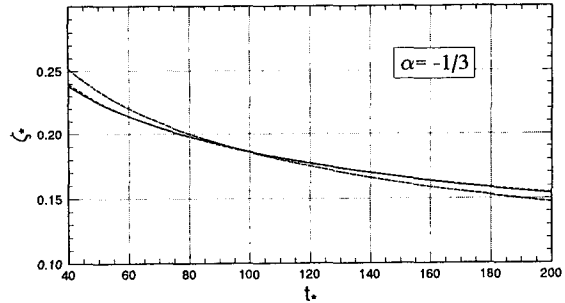


Fig. 5b. Least Squares Approximation to the leading wave height of an 1-D wave: —, Numerical; ···, Coordinate eq. ( $at^\alpha$ ); ---, Coordinate eq. ( $at^\alpha + b$ ).

Table 2. Coordinate equation coefficients of the leading wave height for an 1-D wave

	Case 1	Case 2
$a$	0.8612	0.7031
$b$		0.0341

적합한 것으로 판단되고  $k_1$ 의 값은 0보다는 0에 가까운 값이 더 적합한 것으로 思料된다.

### 3.2 2차원 波浪

표 1에 주어진 2차원 波浪은 徐(1993b)가 사용한 例題와 거의 같다. 주어진 초기조건은 표 1에 주어진 海面 變位식에  $t_0=0$ 을 대입하면 얻을 수 있고 이는 Laplace식을 만족한다(徐, 1993a 참조). 주어진 變位식은 2차원 對稱이므로 공간좌표를  $x$  대신  $r$ 을 사용한다.

주어진 海面變位식에 대한 近似式을 구하기 위한 방법중 간단한 방법은 Bessel함수의 近似式을 使用하는 方法이다(Abramowitz와 Stegun, 1972).

$$J_0(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{kr}\right) \quad (20)$$

식 (20)을 표 1의 海面變位식에 대입하고 삼각함수를 지수함수 형태로 바꾼 후 식 (14)의 近似式을 이용하면

$$\begin{aligned} \xi &\approx \text{Re} \frac{1}{2} \int_0^\infty k e^{-k} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \omega t - \pi/4)} dk \\ &\approx \sqrt{\frac{k_0}{rt|\omega_0''|}} e^{-k_0} \cos(k_0 - \omega_0 t) \end{aligned} \quad (21)$$



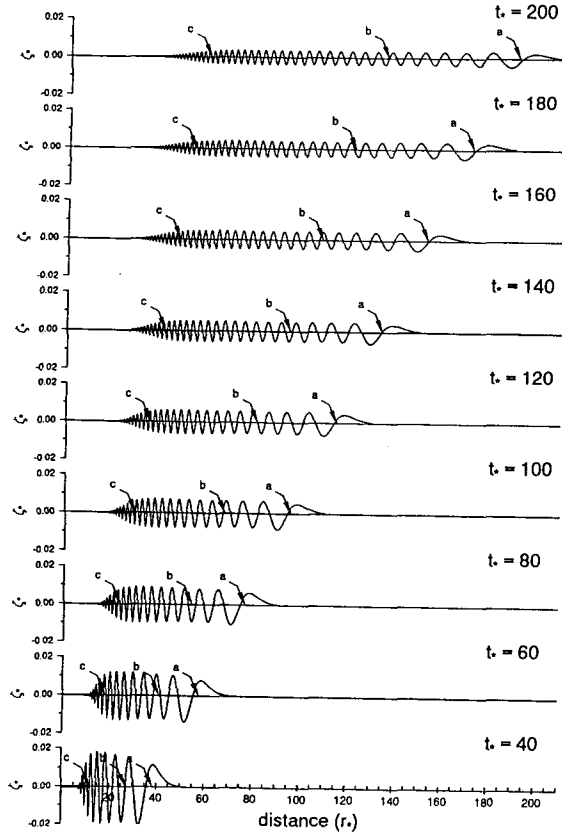


Fig. 6. Surface displacements of a 2-D wave for  $h=1$  at different times; a, b and c locate the points moving at certain group velocities.

特異點에 대한 관계식  $r = t\omega'(k_0)$ 을 식 (21)에 대입하면 거리 또는 시간에 대한 식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \zeta &\sim \sqrt{\frac{k_0}{\omega_0' t^2 |\omega_0''|}} e^{-k_0} \cos(k_0 - \omega_0 t) \\ &= \sqrt{\frac{k_0 \omega_0'}{r^2 |\omega_0''|}} e^{-k_0} \cos(k_0 - \omega_0 t) \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)로 표시되는 2차원 波浪의 波高 減少率은  $t^{-1}$ 에 비례하는 반면에 식 (17)로 주어진 1차원 波浪의 減少率은  $t^{-1/2}$ 이다. 2차원 波浪의 減少率은 1차원 波浪의 減少率에 식 (20)의 Bessel함수의 近似式으로 부터 由來된 geometric spreading  $r^{-1/2}$ 이 곱해졌기 때문이다. 이는 또한 半徑  $r$ 의 圓周를 통과하는 에너지 flux는 일정해야하는 에너지 보존법칙으로 부터 쉽게 증명될 수 있다.

그림 6에 수심  $h=1$ 의 시간별 海面變位를 나타냈

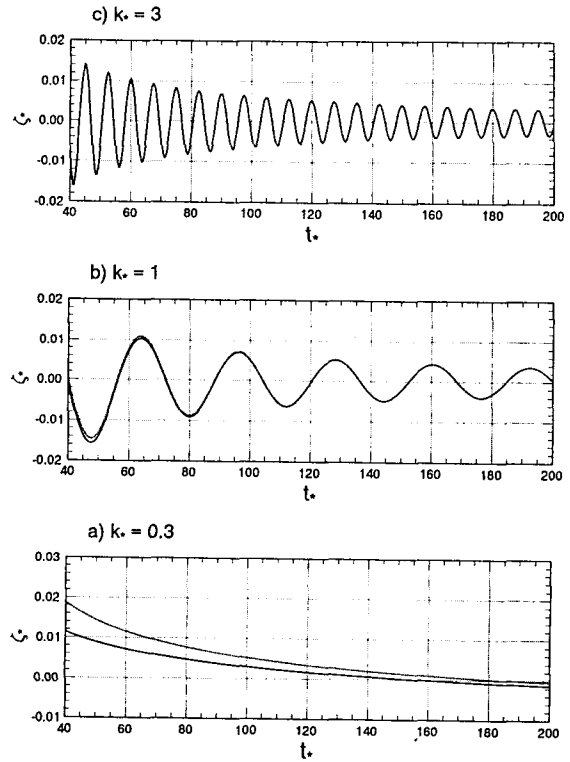


Fig. 7a. Surface displacement of a 2-D wave for  $h=1$  moving at a certain group velocity: —, Numerical; ···, Approximate.

다. 그림 3의 1차원 波浪과 비교할 때 先頭波浪이 後續波浪의 크기에 비해 작다. 2차원 波浪의 envelope 형태는 1차원 波浪의 형태에 비해 서서히 작아진다. 그림에서 a, b, c는 각각 파수  $k_0$ 의 값이 0.3, 1, 3인 波浪의 시간별 위치를 나타내며 1차원 波浪과 水深이 같기 때문에 동일한 시간에서 각 점들의 위치는 서로 같다.

그림 6에서 選定한 波長의 波浪에 대한 時間別 海面變位를 그림 7a에 그리고 數值計算 結果(實線)과 近似式 結果(點線)의 差異를 그림 7b에 각각 나타냈다. 시간에 따른 海面變位 형태는 1차원 波浪과 비슷하나 그 크기는 작으며 誤差 역시 작은 것으로 나타났고 파형형태도 뚜렷하지 않다(그림 7b 참조).

先頭波浪에 대한 近似式은 1차원 波浪의 경우와 비슷한 방법을 써서 식 (23)으로 近似시킬 수 있다.

$$\zeta \sim \sqrt{\frac{\pi k_l}{r}} \frac{e^{-k_l}}{2} \left(\frac{2}{h^2 t}\right)^{1/3} \text{Ai}\left\{\left(\frac{2}{h^2 t}\right)^{1/3} (r-t)\right\} \quad (23)$$

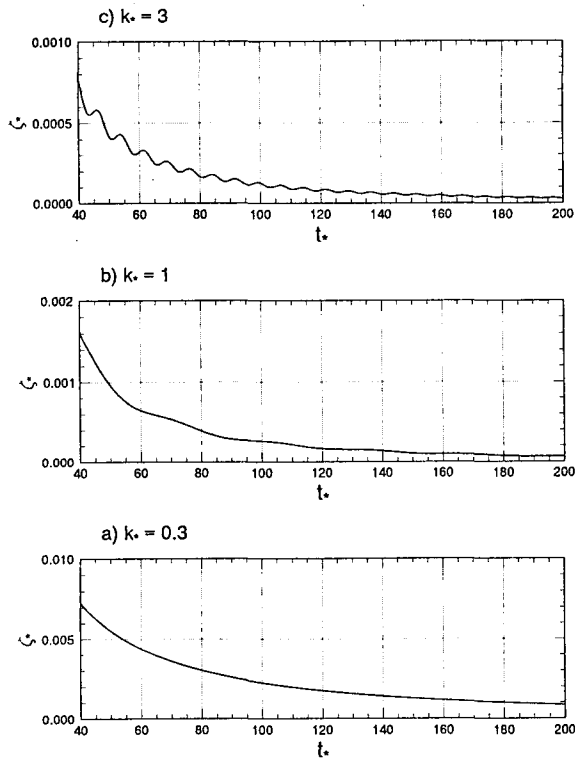


Fig. 7b. Surface displacement error of a 2-D wave for  $h^* = 1$  moving at a certain group velocity.

Table 3. Coordinate equation coefficients of the leading wave height for a 2-D wave

	Present Method		Kajiura's Method	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
$a$	0.2413	0.2660	1.9552	1.4870
$b$		-0.0006		0.0017

식 (23)에서  $k_l=0$ 을 대입하면 振幅이 0이 되므로 이 값은 적합한 값이 아니다. 그러므로 1차원 波浪의 境遇에서도 言及했듯이  $k_l$ 은 0에 가까운 값이나 이에 대한 既存의 연구결과는 없다. 한편 본 논문의 目的은  $k_l$ 의 값을 定하는 것이 아니라 식 (22)로 주어진 近似式의 時間에 따른 減少率은  $t^{-5/6}$ 가 適合한 가를 檢討하기 위한 것이다. 여기서도 1차원 波浪의 경우에 사용한 最小自乘法으로 이를 檢證하였다.

그림 8a에 數值計算法으로 구한 先頭波浪의 最大變位와 그 지점의 位置를 時間에 따라 나타내었다. 그리고 본 논문에서 誘導된  $\alpha = -5/6$ 과 Kajiura의 結果인  $\alpha = -4/3$ 의 값들을 식 (19)에 대입하여 最小

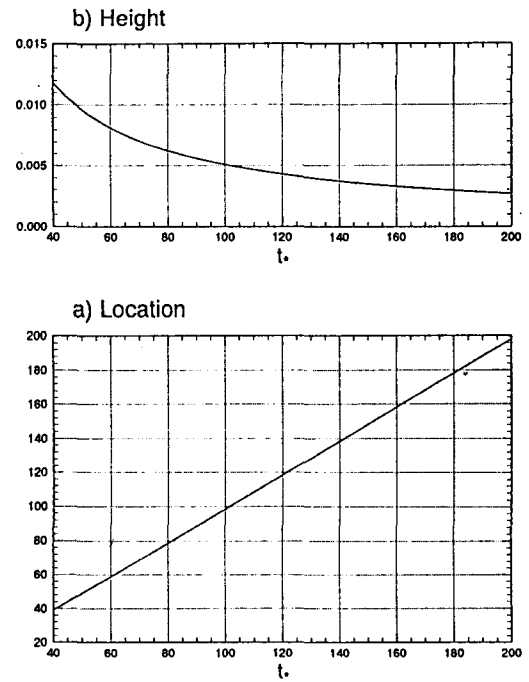


Fig. 8a. Leading wave heights and locations for a 2-D wave.

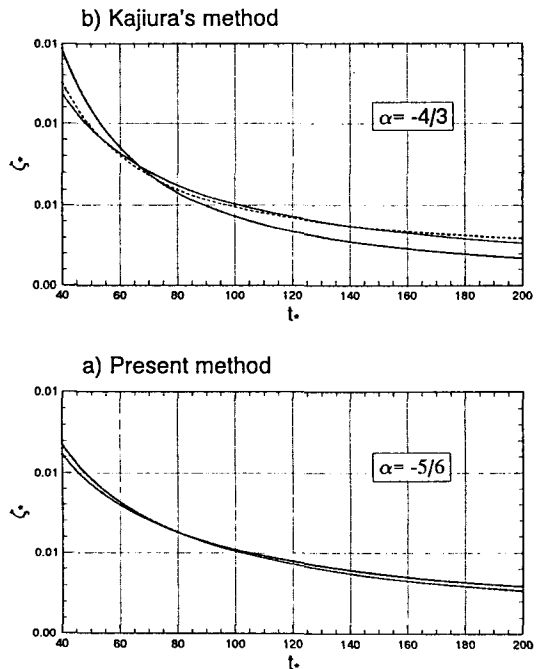


Fig. 8b. Least Squares Approximation to the leading wave heights of a 2-D wave: —, Numerical; ···, Coordinate eq. ( $at^\alpha$ ); - - -, Coordinate eq. ( $at^\alpha + b$ ).

自乘法の 좌표식으로 사용하고 數値計算 결과를 가장 잘 만족하는 常數  $a, b$ 를 구해 표 3에 정리하였다.

표 3에 제시된 상수들의 값은 방법에 따라 큰 차이를 보이며 이들을 사용하여 계산한 變位들(點線)과 數値計算 결과(實線)를 그림 8b에 比較하였다. 그림으로부터 2차원 先頭波浪에 대한 近似式의 시간에 따른 減少率은  $t^{-5/6}$ 이 適合한 것으로 判斷된다.

#### 4. 結 論

일정 수심 위를 傳播하는 波浪의 시간에 따른 變化를 計算하기 위해 漸近 近似法을 사용하였고 그 精密度를 數値計算 결과와 比較하여 分析하였다. 漸近 近似法의 特性을 分析하여 그 適用 範圍를 밝히고 波浪分散 特性을 記述하였다.

1차원 波浪과 2차원 波浪의 전과 형태가 다른 것을 海面變位를 통해 보이고 각 경우를 區別하여 다루었다. 誘導된 近似式을 써서 계산한 海面變位를 數値結果와 比較하기 위해 圖示하였다. 두 結果의 差異는 파장이 길어질수록 커지며 시간이 증가할수록 작아지는 것으로 나타났다. 그리고 海面變位の 減少率은 先頭波浪이 뒤따르는 後續波浪의 減少率 보다 작아서 서서히 減少하는 것으로 나타났다.

後續波浪의 變位 減少率은 1次元 波浪의 경우  $t^{-1/2}$ 에 比例한다. 그러나 2次元 波浪의 경우에는  $t^{-1}$ 에 比例하며 2次元 波浪의 減少率에는  $t^{-1/2}$ 에 해당하는 geometric spreading效果가 곱해져 海面變位가 더 빨리 減少한다.

先頭波浪의 減少率은 1차원 波浪의 경우  $t^{-1/3}$ 로 주어져 既存 結果와 같은 것이 立證되었다. 이에 대한 檢證 方法으로 最小自乘法을 사용하였다. 數値計算에서 구한 先頭波浪의 變位를 誘導된 減少率을 最小自乘法의 좌표식으로 삼아 계수를 구한 뒤 이 좌표식

으로 부터 계산한 變位와 數値計算의 變位를 比較하여 이 減少率이 타당함을 보였다. 한편 2次元 波浪의 減少率은  $t^{-5/6}$ 로 주어져 既存의 Kajiura의 結果인  $t^{-4/3}$ 와 다른 것으로 밝혀졌다. 그러므로 1次元 波浪에 適用한 方法에 따라 檢證하였으며 本 論文에서 誘導된  $t^{-5/6}$ 의 減少率이 適合함을 立證하였다.

#### 謝 辭

本 研究는 1993년 韓國海洋研究所에서 실시한 基本研究事業의 研究結果이며 研究費 支援에 感謝를 드립니다.

#### 參考文獻

- 徐承男, 1993a. 一定水深 위를 進行하는 波浪의 時間에 따른 變化, 韓國 海岸 海洋工學會誌, 5(4): 279-287.  
 徐承男, 1993b. 海底 變動에 의한 波浪의 時間에 따른 變化, 韓國 海岸 海洋工學會誌, 5(4): 288-295.  
 Abramowitz, M. and Stegun, I.A., 1972. *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Inc., New York.  
 Bender, C.M. and Orszag, S.A., 1978. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill, New York.  
 Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., 1980. *Table of integrals, series and products*, Academic Press Inc., Orlando, Florida.  
 Greenberg, M.D., 1978. *Foundations of applied mathematics*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.  
 Jeffreys, H. and Jeffreys, B.S. 1956. *Methods of mathematical physics*, 3rd ed., Cambridge University Press, London.  
 Kajiura, K., 1963. The leading wave of a tsunami, *Bull. Earthquake Res. Inst.*, University of Tokyo, 41: 525-571.  
 Lighthill, J., 1978. *Waves in fluids*, Cambridge University Press, London.  
 Mei, C.C., 1989. *The applied dynamics of ocean surface waves*, World Scientific Publishing Co., Singapore.  
 Whitham, G.B., 1974. *Linear and nonlinear waves*, Wiley-Interscience, New York.