사후주문과 재분배를 고려한 2수준 재고시스템
- Two Level-Parallel Type Inventory Systems with Backorder and Redistribution -

權 熙 哲 *

Abstract

This study presents a two level-parallel type inventory systems with one upper level facility in the first echelon and n-lower level facilities in the second echelon. The stocks at the lowest facilities can become unbalanced with the random variations in the demands. This paper deals with the imbalance by considering redistribution and backorder.

The system with redistribution and the system with backorder and redistribution are analized. The comparison of two cases shows that the system with redistribution and backorder gives smaller stocks than the system with redistribution.

1. 서론

2 수준구조는 1개의 상위수준과 다수의 하위지역 재고점으로 구성되어 있다. 보유량을 절감하려는 노력에도 불구하고 수요의 랜덤특성에 의하여 품절의 위험성은 상존하고 있다. 그래서 재고부족을 야기시키지 않거나 재고부족을 최소화하려는 연구들이 진행되어 왔다. 그 중 한분야가 재분배를 실시하여 효과를 얻으려는 정책이다. 계산의 단순화를 위하여 수요가 적은 품목을 전제로 한 연구[5,7]와 재보충이나 추가적 분배가 없는 경우로 3재고점 이상의 복잡한 문제 때문에 반복법을 이용한 다지역 문제에 관한 연구[1,4]도 활발하였다. 또 재분배시기를 미리 결정해 두고 품절비용을 줄이는 연구[2]가 있다. 또 다른 분야로는 사후주문을 이용하여 효과를 얻으려는 정책이다. 최대허용 사후주문지연을 전제로 한 연구[3]와 상위지역에서의 수요특성은 다수의 하위지역 수요를 총괄적인 측면에서 재고보충을 해야한다는 연구[8]가 있다. 다시말해 기간 중에 품절이 발생했을 때 그 재고부족을 상위 재고점을 통해서만 해결하려는 것으로 재고부족이 발생된 하위 재고점들의 총괄적 사후주문을 견적하여 모자라는 수요에 대처하자는 것이다.

본 연구에서는 한 계획기간 중에서 상위재고점으로 총괄적 사후주문이나 취소를 결정하기 전에 잉여가 발생하는 재고점의 재고를 먼저 재분배를 통하여 만족시키려는 경우[6,10]를 확장한 것이다. 재분배를 실시하고 난 후 일정한 사후주문률을 적용하여 모자라는 수요를 대응시키고자 한다. 이 때 사후주문률을 적용한다는 것은 일부 품절을 허용한다는 뜻이다. 이러한 문제는 수요의 랜덤특성으로 인하여 재고수준의 불균형을 초래할 때 재분배와 사후주문 효과가 재고보유량을 감소시켜 줄 수 있다는 것이다.

2. 두 지역 문제

기초에 분배를 실시하는 정기발주방식으로 다음 보충동안 부족한 재고는 기간말에 재분배를 수행하여 만족시키고 나머지는 일정한 사후주문률을 이용하여 대처한다. 일부는 품절을 허용한다. 수요는 독립적이며 비용요소들은 품목단위에 비례한다. 본 연구에서 사용되는 기호와 용어는 다음과 같다.

* 경원전문대학 공업경영과

h : 품목 단위당 재고유지비용
p : 품목 단위당 품절비용
r : 품목 단위당 재분배비용
b : 품목 단위당 사후주문비용
β : 기간당 사후주문률
LR_i : 하위지역 재고점$(i=1,2,3,\cdots,n)$
s_i : 재고점 i에서의 보유량$(i=1,2,3,\cdots,n)$
x_i : 재고점 i에서의 수요량$(i=1,2,3,\cdots,n)$
X : 재고점 2에서 n까지의 수요량
S : 재고점 2에서 n까지의 보유량
$\overline{x_1}$: 재고점 1의 평균수요량
$\overline{x_2}$: 재고점 2의 평균수요량
$\overline{X}$: 재고점 2에서 n까지의 평균수요량
$f(x_i)$: 재고점 i에서의 수요에 대한 확률밀도함수
hc : 시스템의 기대재고유지비용
bc : 사후주문률이 β일 때 시스템의 기대사후주문비용
pc : 사후주문률이 β일 때 시스템의 품절비용
rc : 시스템의 기대재분배비용
HC : n개 지역 문제에서의 기대재고유지비용
BC : n개 지역 문제에서의 기대 사후주문비용
PC : n개 지역 문제에서의 기대 품절비용
RC : n개 지역 문제에서의 기대 재분배비용

이제 두 지역 LR_1과 LR_2만 고려하자. 지역 LR_1에는 s_1, 지역 LR_2에는 s_2가 보충된다. 기간말에 한 곳에서의 재고부족은 다른 곳으로부터 보충할 수 있다. 이 재분배로도 부족한 경우는 일정한 사후주문률 β로 사후주문시키고 일부는 품절시킬 수 있다. 두 지역의 수요와 보유량간에 존재가능한 모든 조합을 고려하면 다음과 같다.

A : 단위기간당 시스템 재고량

a. $s_1>x_1,\ s_2>x_2$ 일 때 $(s_1-x_1)+(s_2-x_2)$
b. $s_1<x_1,\ s_2>x_2$ 이고 $s_1+s_2>x_1+x_2$ 일 때 $(s_1+s_2)-(x_1+x_2)$
c. $x_1<s_1,\ x_2>s_2$ 이고 $x_1+x_2<s_1+s_2$ 일 때 $(s_1+s_2)-(x_1+x_2)$

시스템의 기대재고유지비용 hc는 다음과 같다.

$$hc = h \iint_{x_1+x_2\le s_1+s_2}(s_1+s_2-x_1-x_2)f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2 \quad (1)$$

B : 단위기간당 시스템 재고부족량

a. $s_1<x_1,\ s_2>x_2$ 이고 $s_1+s_2<x_1+x_2$ 일 때 $(x_1+x_2)-(s_1+s_2)$
b. $x_1>s_1,\ x_2>s_2$ 일 때 $(x_1-s_1)+(x_2-s_2)$
c. $x_1<s_1,\ x_2>s_2$ 이고 $x_1+x_2>s_1+s_2$ 일 때 $(x_1+x_2)-(s_1+s_2)$

B1 : 사후주문률이 β일때 시스템의 기대사후주문비용

$$bc = \beta b\ \left\{(\overline{x_1}+\overline{x_2}-s_1-s_2)+\iint_{x_1+x_2\le s_1+s_2}(s_1+s_2-x_1-x_2)f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2\right\} \quad (2)$$

B2 : 사후주문률이 β일때 품절비용

$$pc=(1-\beta)p\left\{(\overline{x_1}+\overline{x_2}-s_1-s_2)+\int\int_{x_1+x_2\le s_1+s_2}(s_1+s_2-x_1-x_2)f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2\right\} \tag{3}$$

C : 단위기간당 시스템 재분배량

a. $s_1<x_1,\ s_2>x_2$ 이고 $s_1+s_2>x_1+x_2$ 일 때 (x_1-s_1)

LR_2에서 LR_1으로 재분배된다. 기대재분배비용을 rca라 하면 다음과 같다.

$$rca = r\int_{x_2=0}^{s_2}\int_{x_1=s_1}^{s_1+s_2-x_2}(x_1-s_1)f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2$$

b. $s_1<x_1,\ s_2>x_2$ 이고 $s_1+s_2<x_1+x_2$ 일 때 (s_2-x_2)

LR_2에서 LR_1으로 재분배된다. 기대재분배비용을 rcb라 하면 다음과 같다.

$$rcb = r\int_{x_2=0}^{s_2}\int_{x_1=s_1+s_2-x_2}^{\infty}(s_2-x_2)f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2$$

c. $x_1<s_1,\ x_2>s_2$ 이고 $x_1+x_2<s_1+s_2$ 일 때 (x_2-s_2)

LR_1에서 LR_2로 재분배된다. 기대재분배비용을 rcc라 하면 다음과 같다.

$$rcc = r\int_{x_1=0}^{s_1}\int_{x_2=s_2}^{s_1+s_2-x_1}(x_2-s_2)f(x_2)f(x_1)dx_2dx_1$$

d. $x_1<s_1,\ x_2>s_2$ 이고 $x_1+x_2>s_1+s_2$ 일 때 (s_1-x_1)

LR_1에서 LR_2로 재분배된다. 기대재분배비용을 rcd라 하면 다음과 같다.

$$rcd = r\int_{x_1=0}^{s_1}\int_{x_2=s_1+s_2-x_1}^{\infty}(s_1-x_1)f(x_2)f(x_1)dx_2dx_1$$

시스템의 기대재분배비용 rc는 다음과 같다.

$$rc = rca+rcb+rcc+rcd \tag{4}$$

이제 식 (1),(2),(3),(4)로부터 시스템의 기대총비용 $T(s_1,s_2)$를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}T(s_1,s_2) = {} & \{h+\beta b+(1-\beta)p\}\int\int_{x_1+x_2\le s_1+s_2}(s_1+s_2-x_1-x_2)f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2 \\ & +\{\beta b+(1-\beta)p\}(\overline{x_1}+\overline{x_2}-s_1-s_2)+rc\end{aligned} \tag{5}$$

그리고 식 (5)로부터 최적보유량 s_1과 s_2를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{T(s_1,s_2)}{\partial s_1} &= \{h+\beta b+(1-\beta)p\}\int_{x_2=0}^{s_1+s_2-x_1}\int_{x_1=0}^{s_1+s_2-x_2}f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2 \\ &\quad -\{\beta b+(1-\beta)p\}-r\int_{x_2=0}^{s_1+s_2-x_1}\int_{x_1=0}^{s_1+s_2-x_2}f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2 \\ &\quad +rF(s_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

그래서

$$\{h+\beta b+(1-\beta)p-r\}\int\int_{x_1+x_2\le s_1+s_2}f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2 = \{\beta b+(1-\beta)p\}-rF(s_1)$$

이다. 그러므로

$$P\{x_1+x_2\le s_1+s_2\} = \frac{\{\beta b+(1-\beta)p\}-rF(s_1)}{\{h+\beta b+(1-\beta)p-r\}} \tag{6}$$

$\frac{T(s_1, s_2)}{\partial s_2}$ 도 식 (5)로부터 유사하게 풀면 다음과 같다.

$$P\{x_1 + x_2 \le s_1 + s_2\} = \frac{\{\beta b + (1-\beta)p\} - rF(s_2)}{\{h + \beta b + (1-\beta)p - r\}} \tag{7}$$

여기서 $F(s_1)=F(s_2)$임을 알 수 있다.

3. n개 지역문제

지역 1의 수요량을 x_1이라 하고 나머지 지역의 수요량을 X라 한다. 또 s_1을 지역 1의 보유량이라 하고 나머지 지역의 보유량을 S라 하자.

$X = x_2+x_3+\cdot\cdot\cdot+x_n$

$S = s_2+s_3+\cdot\cdot\cdot+s_n$

이때 기간중에 재고부족이 발생하면 먼저 재분배를 수행한다. 재분배로 모자라는 수요는 사후주문으로 대처하는데 사후주문률 β의 비율로 대응시킨다. 그래도 부족한 수요는 비율(1-β)만큼 품절을 허용한다. 앞에서와 같이 x_1과 X, s_1과 S에 관한 경우로 모든 조합을 열거하면 다음과 같다.

D : 단위기간당 시스템 재고량

a. $s_1>x_1$, $S>X$ 일 때 $(s_1-x_1)+(S-X)$
b. $s_1<x_1$, $S>X$ 이고 $s_1+S>x_1+X$ 일 때 $(s_1+S)-(x_1+X)$
c. $x_1<s_1$, $X>S$ 이고 $x_1+X<s_1+S$ 일 때 $(s_1+S)-(x_1+X)$

시스템의 기대재고유지비용 HC는 다음과 같다.

$$HC=h \int\int_{x_1+X\le s_1+S}(s_1+S-x_1-X)f(x_1)f(X)dx_1dX \tag{8}$$

E : 단위기간당 시스템 재고부족량

a. $s_1<x_1$, $S>X$ 이고 $s_1+S<x_1+X$ 일 때 $(x_1+X)-(s_1+S)$
b. $x_1>s_1$, $X>S$ 일 때 $(x_1-s_1)+(X-S)$
c. $x_1<s_1$, $X>S$ 이고 $x_1+X>s_1+S$ 일 때 $(x_1+X)-(s_1+S)$

E1 : 사후주문률이 β일 때 시스템의 기대사후주문비용

$$BC = \beta b\left\{(\overline{x_1}+\overline{X}-s_1-S)+\int\int_{x_1+X\le s_1+S}(s_1+S-x_1-X)f(x_1)f(X)dx_1dX\right\} \tag{9}$$

E2 : 사후주문률이 β일 때 품절비용

$$PC=(1-\beta)p\left\{(\overline{x_1}+\overline{X}-s_1-S)+\int\int_{x_1+X\le s_1+S}(s_1+S-x_1-X)f(x_1)f(X)dx_1dX\right\} \tag{10}$$

F : 단위기간당 시스템 재분배량

a. $s_1<x_1$, $S>X$ 이고 $s_1+S>x_1+X$ 일 때 (x_1-s_1)
$LR_j(j=2,3,\cdot\cdot\cdot,n)$에서 LR_1으로 재분배된다. 기대재분배비용을 RCa라 하면 다음과 같다.

$$RCa = r\int_{X=0}^{S}\int_{x_1=s_1}^{s_1+S-X}(x_1-s_1)f(x_1)f(X)dx_1dX$$

b. $s_1<x_1$, $S>X$ 이고 $s_1+S<x_1+X$ 일 때 (S-X)

LR$_j$에서 LR$_1$으로 재분배된다. 기대재분배비용을 RCb라 하면 다음과 같다.

$$RCb = r\int_{X=0}^{S}\int_{x_1=s_1+S-X}^{\infty}(S-X)f(x_1)f(X)dx_1dX$$

c. $x_1<s_1$, $X>S$ 이고 $x_1+X<s_1+S$ 일 때 (X-S)

LR$_1$에서 LR$_j$로 재분배된다. 기대재분배비용을 RCc라 하면 다음과 같다.

$$RCc = r\int_{x_1=0}^{s_1}\int_{X=S}^{s_1+S-x_1}(X-S)f(X)f(x_1)dXdx_1$$

d. $x_1<s_1$, $X>S$ 이고 $x_1+X>s_1+S$ 일 때 (s_1-x_1)

LR$_1$에서 LR$_j$로 재분배된다. 기대재분배비용을 RCd라 하면 다음과 같다.

$$RCd = r\int_{x_1=0}^{s_1}\int_{X=s_1+S-x_1}^{\infty}(s_1-x_1)f(X)f(x_1)dXdx_1$$

시스템의 기대재분배비용 RC는 다음과 같다.

$$RC = RCa+RCb+RCc+RCd \tag{11}$$

이제 식 (8),(9),(10),(11)로부터 시스템의 기대총비용 $T(s_1,S)$를 정리하면 다음과 같다.

$$T(s_1,S) = \{h+\beta b+(1-\beta)p\}\int\int_{x_1+X\le s_1+S}(s_1+S-x_1-X)f(x_1)f(X)dx_1dX$$
$$+\{\beta b+(1-\beta)p\}\,(\overline{x_1}+\overline{X}-s_1-S)+RC+g(s_2,s_3,\cdot\cdot\cdot,s_n) \tag{12}$$

식 (12)에서 $g(\cdot)$는 지역 1을 제외한 곳에서의 재분배비용이다. 2절에서와 같이 $\frac{T(s_1,S)}{\partial s_1}=0$과 $\frac{T(s_1,S)}{\partial S}=0$으로부터 최적보유량을 구하면 다음과 같다.

$$\{h+\beta b+(1-\beta)p-r\}\int\int_{x_1+X\le s_1+S}f(x_1)f(X)dx_1dX = \{\beta b+(1-\beta)p\}-rF(s_i)$$

그러므로

$$P\{x_1+X\le s_1+S\} = \frac{\{\beta b+(1-\beta)p\}-rF(s_i)}{\{h+\beta b+(1-\beta)p-r\}} \tag{13}$$

또 $\frac{\{\beta b+(1-\beta)p\}-rF(s_i)}{\{h+\beta b+(1-\beta)p-r\}}\le 1$ 이므로 $r\{1-F(s_i)\}\le h$ 이다. 그러므로

$$\frac{h}{1-F(s_i)}\ge r \tag{14}$$

임을 알 수 있다. 물론 2절의 결과처럼 $F(s_1)=F(s_2)=\cdot\cdot\cdot=F(s_n)$도 성립한다.
식 (14)는 기초 최적보유량에 대한 정리를 정의할 수 있다.

[정리]기초 최적보유량을 결정하기 위한 확률의 상한은 모든 s_i에 대하여

$$F(s_i)\le\frac{\{\beta b+(1-\beta)p\}}{\{h+\beta b+(1-\beta)p\}}$$

이다.

<증명> $P\{x_1+X\le s_1+S\} = \frac{\{\beta b+(1-\beta)p\}-rF(s_i)}{\{h+\beta b+(1-\beta)p-r\}}$

$$\frac{dP\{x_1+X\leq s_1+S\}}{dr} = \frac{\{\beta b+(1-\beta)p\}-\{h+\beta b+(1-\beta)p\}F(s_i)}{\{h+\beta b+(1-\beta)p-r\}^2}$$

$\frac{dP(\cdot)}{dr}>0$ 이면 $\frac{\{\beta b+(1-\beta)p\}}{\{h+\beta b+(1-\beta)p\}}>F(s_i)$ 이다.

또 $\frac{\{\beta b+(1-\beta)p\}}{\{h+\beta b+(1-\beta)p\}}<F(s_i)$ 일때 $\frac{dP(\cdot)}{dr}<0$ 이므로

P(·)는 r의 감소함수가 된다.

즉 $P(\cdot)\geq \max P(\cdot)=1$

식 (14)로부터 $r_{\max}=\frac{h}{1-F(s_i)}$ 가 된다. 이것은 모든 r에 대해

$P(\cdot)\leq 1$ 이어야 하므로 성립될 수 없다. 그러므로

$\frac{\{\beta b+(1-\beta)p\}}{\{h+\beta b+(1-\beta)p\}}>F(s_i)$ 이다.

4. 수치예

4.1. 알고리듬

단계 1 : 식(13)으로부터 지역1의 보유량 S_1에 대한 확률 $F(S_1)$을 구하고 최적 보유량 $S_1^{(1)}$을 얻는다.

단계 2 : 확률함수를 이용하여 $F(S_1)=F(S_2)$로 놓고 S_1에 관한 관계식을 구한다.

단계 3 : $\chi_1+\chi_2$에 대한 총수요분포함수를 구한다.

단계 4 : 단계 3의 결과와 식(13) 그리고 단계 2에서 얻은 관계식으로 S_1에 관한 방정식을 유도한다.

단계 5 : 단계 4로 부터 $S_1^{(2)}$를 얻고 단계 2의 결과로 부터 $S_2^{(2)}$를 구한다.

단계 6 : $F(S_1)=\cdots\cdots=F(S_i)$로부터 $S_i(i=1,2,3,\cdots,n)$에 대한 관계식을 유도 한다.

단계 7 : 단계 3으로 부터 단계 5에서와 같이 규정된 S_i가 될 때까지 반복 하여 수행한다.

단계 8 : 사후주문을 허용하지 않고 재분배만 수행하는 경우는 단계 1에서 $\beta=0$, $b=0$으로 놓고 단계 7까지 수행한다.

4.2. 수치해

하위 재고점 5개와 수요분포, 2개의 재분배 비용, 사후주문률 β, 관련된 비용요소들(Table 1)과 [알고리듬]을 이용하여 재분배를 수행했을 때의 최적보유량, 재분배와 사후주문률을 고려 했을 때의 최적보유량을 얻었다(Table 2, Table 3).

Table 1. Input Data.

Dist. \ n	1	2	3	4	5
N(μ,σ)	N(100,10)	N(150,15)	N(200,15)	N(250, 20)	N(300,30)
Value of Cost Factors	h = 1.0	p = 5.0	b = 0.2	β = 0.8	r= 0.1,0.3

Table 2. Optimal Stocks with Redistribution.

Stocks r	n	$S_1^{(n)}$	$S_2^{(n)}$	$S_3^{(n)}$	$S_4^{(n)}$	$S_5^{(n)}$
0.1	1	109.7				
	2	107.4	161.6			
	3	106.0	159.0	209.0		
	4	105.3	157.9	207.9	260.6	
	5	104.9	157.3	207.3	259.8	314.7
0.5	1	109.7				
	2	109.1	163.5			
	3	107.5	161.2	211.2		
	4	106.6	159.9	209.9	263.2	
	5	106.1	159.1	209.2	262.2	318.3

Table 3. Optimal Stocks with Redistribution and Backorder.

Stocks r	n	$S_1^{(n)}$	$S_2^{(n)}$	$S_3^{(n)}$	$S_4^{(n)}$	$S_5^{(n)}$
0.1	1	103.2				
	2	101.0	151.5			
	3	100.9	151.4	201.4		
	4	100.8	151.2	201.2	251.6	
	5	100.7	151.1	201.1	251.4	302.1
0.5	1	103.2				
	2	103.1	154.7			
	3	102.6	153.9	203.9		
	4	102.3	153.5	203.5	254.6	
	5	102.1	153.2	203.2	254.2	306.3

5. 결론

수치예의 결과를 보면 재분배비용이 작아질수록 보유량이 감소되고 있다. 이것은 재분배비용이 적절하게 작은 수준으로 유지될 수 있으면 시스템 재고수준을 줄이는 효과를 보이고 있다. 또한 사후주문과 재분배를 동시에 수행했을 때의 경우가 재분배만 수행했을 때 보다 각 지역의 재고보유량을 최소화 할 수 있음을 나타내고 있다. 물론 재분배비용과 사후주문비용이 작지 않다면 결과는 다를 수도 있다. 수요에 따라 사후주문은 꽤 현실적으므로 사후주문비용이 재분배비용과 큰 차이가 없을 때는 의미가 있음을 나타내고 있다. 사후주문을 총괄적인 확률분포형으로 모형화하는 문제와 상위수준의 보충능력을 설계한 모형이 추후연구의 관심사이다.

參 考 文 獻

1. Allen, S.G., "A Redistribution Model with Set-up Charge," *Management Science*, Vol. 8, No. 1, pp. 99-108, 1961.
2. Das, C., "Supply and Redistribution Rules for Two-Location Inventory Systems: One-Period Anaiysis," *Managemant Science*, Vol. 21, No. 7, pp. 765-776, 1975.
3. Fogarty, D.W. and Aucamp, D.C., "Implied Backordr Costs," *IIE Transactions*, Vol. 17 , No, 1, pp. 105-107, 1985.
4. Gross, D., "Centralized Inventory Control in Multilocation Supply System," in Scarf et al., pp. 47-84, 1963.
5. Hadley, G. and Whitin, T.M., "A Model for Procurement, Allocation and Redistribution for Low Demand Items," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 8, No. 4, pp. 395-414, 1961.
6. Kwon, H.C. and Kim, M.S., "Designing an Inventory Model of Parallel-Type Distribution Systems," *Journal of the KSQC*, Vol. 17, No. 1, pp. 11-18, 1989.
7. Love, R.F., "A Two-Station Stochastic Inventory Model with Exact Methods of Computing Optimal Policies," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 14, No. 2, pp. 185-217, 1967.
8. Schultz, C.R., "Computing Demand Properties at the Wholesale Warehouse Level, "*Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 30, No. 1, pp. 37-48, 1983.
9. Silver, E.A. and Peterson, R., *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*, Second ED., John Wiley & Sons, New Yory, 1985.
10. 권회철, 2水準 竝列型 在庫시스템에 관한 硏究, 한양대학교 대학원, 박사학위논문, 1989.
11. 권회철, 2수준 재고시스템의 수요특성, 경원전문대학 논문집, 1993.