

## 수요율이 높은 제품의 다단계 분배정책에 관한 연구

# A Study on the Multi-Level Distribution Policy of High Demand Rate Goods.

유형근\*  
김종수\*\*

### Abstract

This paper deals with ordering policies of consumable goods which have large demand rates in a multi-level distribution system. The system we are concerned consists of one Central Distribution Center(CDC) and N non-identical Regional Distribution Centers(RDCs) which have different demand rates, minimum fillrates, leaddtimes, etc. The customer demand on the RDC is stationary poisson and the RDCs demand on the CDC is superposition of Q-stage Erlang distributions. We approximate the RDCs and CDC demand distribution to normal in order to enhance the efficiency of algorithm.

The relevant costs include a fixed ordering cost and inventory holding cost, and backorder cost. The objective is to find a continuous-review ordering policy that minimizes the expected average costs under constraints of minimum fill rates of RDCs and maximum allowable mean delay of CDC.

We developed an algorithm for determining the optimal ordering policies of the CDC and the RDCs. We verified and compared the performance of the algorithm through the simulation using the algorithm result as the input parameters.

### 1. 서론

분배시스템(Distribution System)은 생산자로 부터 고객에 이르기 까지 다단계로 구성되어 있으며, 최소의 비용으로 규정된 품질의 제품을 적기에 고객에게 공급하도록 운영되어야 한다. 따라서, 고객의 수요를 담당하는 지역분배센터(Regional Distribution Center)는 고객에게 만족스러운 서비스수준을 제공하여야 하며, 지역분배센터에 제품을 공급하는 중앙분배센터(Distribution Center)는 지역분배센터가 적은 비용으로 서비스수준을 유지할 수 있도록 지원하여야 한다.

분배시스템은 지역의 특성(상이한 수요분포, 조달기간 등)에 적절하게 설정된 서비스수준(최소요구충족율, Minimum required Fill Rate)을 만족시켜야 하며, 지역분배센터가 서비스수준을 만족시키기 위하여 과다한 재고를 보유해야 하는 상황을 막기 위해서는 중앙분배센터의 비용이 다소 증가하더라도 지연시간의 증가를 억제하여야 한다. 중앙분배센터의 지연시간에 제한을 둠으로서 지역분배센터의 조달기간이 감소되고, 조달기간 수요의 불확실성이 감소됨으로써 지역분배센터의 비용을 감소할 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 최소의 비용으로 고객의 구매욕구를 충족시키기 위해서, 고객의 수요를 충족시켜주는 지역분배센터의 서비스수준과 지역분배센터의 보호하기 위한 중앙분배센터의 지연시간의 제약하에 분배시스템의 비용을 최소로 하는 발주정책을 결정하는 방법을 논한다.

다단계 분배시스템의 최적발주정책을 결정하기 위해서, 다음과 같은 사항을 고려하여야 한다. 첫째, 조달기간의 수요를 추정하고 설정되어진 최소요구충족율을 만족시키도록 하는 지역분배센터의 발주정

\* 한국전기통신공사

\*\* 한양대학교 산업공학과

책을 결정하여야 한다.

둘째, 중앙분배센터의 수요과정은 지역분배센터의 발주과정이 합성되어 나타나므로, 혼합되어진 수요과정을 결정하여야 한다.

셋째, 중앙분배센터는 지역분배센터를 보호하기 위해 설정되어진 지연시간을 벗어나지 않는 범위내에서 발주정책을 최적화하여야 한다.

넷째, 중앙분배센터의 수행도를 평가하여, 중앙분배센터의 분배정책이 지역분배센터에 미치는 영향을 고려하여 모형화하여야 한다.

본 논문에서는 수요율이 높으며 다단계로 분포되어 있는 상용제품에 대하여 최소의 비용으로 고객 서비스수준을 충족시키는 발주정책 결정기법을 결정하고자 한다. 따라서, 상기의 고려항목을 각 모듈(지역분배센터의 발주정책결정 모듈, 중앙분배센터의 수요과정추정 모듈, 중앙분배센터의 발주정책결정 모듈, 중앙분배센터의 수행도평가 모듈)로 설정하고, 이들의 연관관계를 모형화하여 분배시스템의 재고관리비용을 최소화하는 발주정책을 결정하도록 한다.

## 2. 기존연구

다단계 재고관리시스템의 발주정책에 관한 연구는 군수품과 같이 수리가 가능하며 수요율이 낮은 제품에 대한 재고관리와 단위기간당 수요율이 많은 상용제품에 대한 재고관리로 대별할 수 있으며, 이러한 다단계 재고관리시스템에 대한 전통적인 모형은 Sherbrooke [19]에 의해 개발된 METRIC 모형을 들 수 있다. 이 모형에서는 각 기지창(Base)에서 운용중인 제품은 시간이 경과함에 따라 고장이 발생하며, 발생한 고장이 경고장일 경우에는 기지창에서, 중고장일 경우에는 중앙창(Depot)에서 수리하며, 각 단계의 재고정책은 (S-1,S) 정책을 사용하였다. Muckstadt[11]는 METRIC모형을 계층적 구조를 갖는 제품으로 일반화한 MOD-METRIC모형을 제시하였다. Gross[8]는 수리창에 병렬로 존재하는 한정된 수리능력과 일정시점에 고장날 수 있는 운용중인 제품수가 한정되어 있을 때의 다단계 기지-수리 대기모형을 일반화시켰다. Yu [22], Kim[12]은 각 수리창에 한정된 수리능력으로 인하여 발생하는 대기행렬을 고려하여 각 기지에서 만족하여야 할 최소요구충족율의 제약하에 각 기지에서 보유하여야 할 최소여유부품수를 대기행렬이론에 의하여 도출하였다.

상용제품에 대한 다단계 재고모형은 수리가가능제품의 (S-1,S) 정책을 확장시킨 (s,S)정책이나 (Q,r)정책을 들 수 있으며, 직렬형분배시스템의 경우에는 일반적으로 Nested 성질을 이용하며, 이는 임의의 단계 n에서 시점 t에 재고수준이 재주문점에 도달하였다면 모든 하위단계(n-1, n-2, ..., 0)의 재고수준이 시점 t에 재주문점에 도달하는 성질이다. DeBodt와 Graves[4]는 직렬형 시스템의 경우에 Echelon Stock의 개념을 도입하여 연속적 재고고찰간격에 기초하여 재주문점에 대한 근사화된 정책을 구축하였다. Badinelli[2]는 직렬형 시스템에서 연속적 재고고찰간격을 가질 때 Nested 성질을 이용하여 각 단계의 발주량(단, 단계 n의 발주량은 단계(n-1)의 발주량의 정수배)과 재주문점을 구하였다.

Aborescent 분배시스템에서는 직렬형 분배시스템의 성질인 Nested 성질을 이용하기 곤란하다. 이는 중앙분배센터의 재고수준이 발주점이하로 떨어져도, 하위단계를 구성하는 여러개의 지역분배센터가 발주점에 도달할 확률은 매우 적기 때문이다.

Rosenbaum[14,15]은 하나의 중앙분배센터와 다수의 동일한 지역분배센터로 구성되어진 시스템에서 지역분배센터와 중앙분배센터의 서비스수준을 입력자료로 하여, 지역분배센터의 실질적인 서비스수준을 추정하는 발전적기법을 제안하였다.

Deuermeyer[5]는 중앙 및 지역분배센터의 발주량, 재주문점, 명목상 조달기간(지연시간이 없을 때의 조달기간), 수요율 등을 파라메타로 하여 분배시스템의 수행도(충족율, 추후납품수의 기대치, 지연시간의 기대치)를 평가하였다.

Svoronos [20]는 Deuermeyer[5]의 중앙분배센터의 조달기간수요에 대한 분산을 갱신이론에 입각하여 정확하게 개선하였으며, 조달기간의 수요분포를 정규분포와 MTP(Mixture of Two translated Poisson)분포인 경우를 분석하였다.

그러나, 기존의 다단계 재고관리정책에 관한 연구는 현실적용면에 있어서 다음과 같은 문제점을 안고 있다.

첫째, 재고정책인 주문량과 재발주점을 입력자료로 하여 시스템의 수행도를 계산하였다[1, 5, 11, 14, 15,

18, 19, 20]. 그러나, 이는 일정수준 이상의 고객 서비스수준을 유지하며, 재고비용을 최소화하는 주문량과 재발주점을 결정하기 위해서는 많은 시뮬레이션 수행시간이 요구된다.

둘째, 지역분배센터에서 발생하는 수요분포는 지역의 특성 및 사회문화적수준에 따라 다르며, 지역분배센터와 중앙분배센터간의 지역적인 거리가 다르므로 조달기간이 상이하다. 따라서, 각 지역분배센터에서는 수요분포와 조달기간등의 특성을 고려한 고객서비스수준을 설정하고, 이를 만족하는 최적재고정책을 결정하여야 한다. 그러나, 기존의 연구[2, 5, 14, 15, 18, 20]에서는 수요분포와 조달기간이 동일한 지역분배센터로 구성된 분배시스템을 고려하였다. 이는, 중앙분배센터의 수요과정(Demand Process)은 지역분배센터의 발주정책에 의해 형성되나, 상이한 지역분배센터로 구성되어 있는 경우는 중앙분배센터의 수요분포를 추정하기 어렵기 때문이다.

따라서, 본 논문에서는 상이한 지역분배센터의 특성(상이한 수요분포, 조달기간 등)에 맞게 설정된 적정서비스수준을 만족시키고, 지역분배센터를 보호하기 위한 중앙분배센터의 최대허용지연시간의 제약하에, 재고비용을 최소화시키는 다단계 재고정책을 수립하고자 한다.

### 3. 모형수립 및 기호정의

#### 3.1 모형수립

본 논문에서는 고객의 수요를 담당하는 독립적인 N개의 지역분배센터, 무한한 능력을 가진 공장으로 부터 지역분배센터로 재고를 분배하는 1개의 중앙분배센터로 구성된 분배시스템을 고려한다.

고객의 수요는 지역분배센터의 재고에 의하여 충족되어지며, 지역분배센터 i의 수요율은  $\lambda_i$  를 갖는 포아송분포에 따르며, 충족되지 않은 고객의 수요는 추후납품된다. 지역분배센터 i의 발주정책은 재고수준(Inventory Position)이 재주문점  $r_i$  (단,  $r_i \geq 0$ ) 에 도달하면 경제적 발주량  $Q_i$  를 발주하는  $(Q_i, r_i)$  정책에 따른다. 지역분배센터 i의 발주량  $Q_i$ 를 중앙분배센터로 발주하였을 때, 중앙분배센터에 충분한 재고가 존재하면, 명목상 조달기간(중앙분배센터의 지연시간이 없을 때)  $L_i$  를 거쳐 지역분배센터 i로 입고된다. 그러나, 중앙분배센터의 보유재고가  $Q_i$  보다 적으면, 공장으로 부터 중앙분배센터로 재고가 보충될 때 까지 지연된 후, 지역분배센터 i로 발주된 양을 수송한다. 이 때 지역분배센터 i의 발주시점으로부터 입고까지의 시간을 실질적 조달기간이라하며, 지역분배센터 i의 실질적 조달기간은 명목상 조달기간과 중앙분배센터의 지연시간의 합으로 계산한다.

중앙분배센터의 발주정책은 재고수준이  $r_0$  (단,  $r_0 \geq 0$ ) 에 도달하면, 중앙분배센터의 경제적 발주량  $Q_0$  를 무한한 공급능력이 있는 공장으로 발주하는  $(Q_0, r_0)$  정책에 따르며, 공장은 무한한 공급능력이 있는 것으로 가정한다. 따라서, 중앙분배센터에서 공장으로 발주할 때, 실질적 조달기간(Effective Leadtime)은 명목상 조달기간(Nominal Leadtime)과 같다.

#### 3.2 기호정의

$i$  : 재고저장위치. ( $i=0$  : 중앙분배센터,  $1 \leq i \leq N$  : 지역분배센터)

$C_H$  : 재고보유비용.

$C_S$  : 추후납품비용

$C_R$  : 발주비용.

$Q_i$  : 경제적 주문량.

$r_i$  : 재주문점.

$L_i$  : 명목상 조달기간.

$L_i^e$  : 실질적 조달기간 (=  $L_i$  + 지연시간).

$\lambda_i$  : 단위기간당 수요량.

$\mu_i$  : 조달기간수요의 평균.

$\sigma_i^2$  : 조달기간수요의 분산.

$f_i$  : 지역분배센터 i의 최소요구 충족율.

$D_{max}$  : 중앙분배센터 평균지연시간의 허용치.  
 $I_i(Q_i, r_i)$  :  $(Q_i, r_i)$  정책을 사용하였을 때, 평균 보유재고량.  
 $B_i(Q_i, r_i)$  :  $(Q_i, r_i)$  정책을 사용하였을 때, 평균 추후납품수.  
 $E[W_q]$  : 추후납품되는 주문에 대하여 평균지연시간.  
 $\phi(x)$  : 표준정규분포.

$$\phi_i(r_i) : \int_{r_i}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du .$$

#### 4. 다단계 발주정책 알고리즘

##### 4.1 서비스수준을 고려한 지역분배센터의 발주정책결정 모듈

Hadley 와 Whitin [9]은 조달기간의 수요가 매우 크며 평균  $\mu$ 인 포아송분포에 따를 때, 평균과 분산이  $\mu$ 인 정규분포로 근사화됨을 보였으며, [Appendix 1]의 결과를 유도하였다.

대고객 서비스수준을 향상시키면 품질비용은 감소하는 반면 재고유지비용은 증가하게 된다. 따라서, 의사결정자는 지역의 상황과 품질비용, 발주비용 및 재고유지비용을 고려하여 각 RDC에서 최소한 만족시켜야 할 고객서비스수준(최소요구충족율)을 설정하여야 한다.

RDC의 최소요구충족율(Minimum Desired Fill Rate)을  $f$ 라 하면,  $(Q, r)$  정책에 대한 Hadley 와 Whitin의 수행도 결과를 이용하여 최소요구충족율을 만족하며 총비용식  $TC_1(Q, r)$ 을 최소화하도록 (1)과 같이 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } TC_1(Q, r) &= \frac{\lambda}{Q} C_R + C_H \left( \frac{Q}{2} + r - \mu + B(Q, r) \right) + C_S B(Q, r) \\
 &= \frac{\lambda}{Q} C_R + C_H \left( \frac{Q}{2} + r - \mu \right) + \left( \frac{C_S + C_H}{Q} \right) \beta(r) \\
 \text{s.t. } &1 - \frac{1}{Q} \alpha(r) \geq f
 \end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)을 벌칙방법(Penalty Method)로 해를 구하기 위하여 벌칙함수는 식 (2)와 같이 제약식 위반정도의 자승에 비례하도록 설정한다.

$$P(Q, r) = (\text{Max} \{ \alpha(r) - (1-f)Q, 0 \})^2 \tag{2}$$

벌칙상수( $P_k$ )는  $k$ 번째 Iteration에서 결정된 발주정책이 최소요구충족율 제약식을 위반한 경우에 목적식의 값이 매우 크도록 하기 위하여 도입한 매우 작은 상수로,  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = 0$ 의 성질을 갖는다. 벌칙상수와 벌칙비용함수를 이용하여 제약식을 이완시키면 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } TC_2(Q, r, P_k) &= \frac{\lambda}{Q} C_R + C_H \left( \frac{Q}{2} + r - \mu + B(Q, r) \right) + C_S B(Q, r) \\
 &+ \frac{1}{P_k} P(Q, r)
 \end{aligned} \tag{3}$$

따라서, 최소의 비용으로 최소요구충족율을 만족시키기 위한 지역분배센터의 발주정책 결정과정은 다음과 같은 절차를 통하여 해를 구할 수 있다.

[초기화]

$k \leftarrow 0, i \leftarrow 0$   
 (  $k$  : 발차상수를 나타내는 지수,  $i$  : 발주정책의 변화를 기록하기 위한 첨자.)  
 $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leftarrow$  매우 작은 수.  
 $M \leftarrow$  매우 큰 수.

READ  $P_k, C_H, C_S, C_R, f, L, \lambda$   
 발주정책의 초기해 결정 ( $Q_k^{(0)}, r_k^{(0)}$ )  
 단, 초기해는 서비스수준을 만족하지 않아도 무방하다.

[ STEP 1 ] 현재의 발주정책으로 부터 방향벡터 계산 ([Appendix 2] 참조)

$$\frac{\partial D(Q, r, P_k)}{\partial Q} \Big|_{Q = Q_k^{(i)}, r = r_k^{(i)}}$$

$$\frac{\partial D(Q, r, P_k)}{\partial r} \Big|_{Q = Q_k^{(i)}, r = r_k^{(i)}}$$

[ STEP 2 ] 변화크기 선택

STEP 2.1 : 최대변화크기 선택

STEP 2.1.1 : 발주량의 최대변화크기( $\alpha_{max-Q}$ ) 결정.

발주량이 총비용을 최소화하는 방향벡터를 통하여 변화될 때, 현재의 해( $Q_k^{(i)}$ )로 부터 다음 단계의 해( $Q_k^{(i+1)}$ )가 변화할 수 있는 범위는  $1 \leq Q_k^{(i+1)} \leq \lambda$ 이므로,  $Q_k^{(i+1)}$ 이 이 범위를 벗어나지 않도록 최대변화크기( $\alpha_{max-Q}$ )를 선택한다.

를 결정

$$\text{If } \left( \frac{\partial D(Q, r, P_k)}{\partial Q} \Big|_{Q = Q_k^{(i)}, r = r_k^{(i)}} \right) > 0$$

$$\alpha_{max-Q} = \frac{Q_k^{(i)} - 1}{\partial D(Q, r, P_k) / \partial Q}$$

Else

$$\alpha_{max-Q} = \frac{\lambda - Q_k^{(i)}}{\partial D(Q, r, P_k) / \partial Q}$$

Endif

STEP 2.1.2 : 재주문점의 최대변화크기( $\alpha_{max-r}$ ) 결정

재주문점이 총비용을 최소화하는 방향벡터를 향하여 변화될 때,  $r_k^{(i+1)}$ 이 변화할 수 있는 범위는  $0 \leq r_k^{(i+1)} \leq \lambda$ 이므로, 현재의 해( $r_k^{(i)}$ )로 부터 다음 단계의 해( $r_k^{(i+1)}$ )가 실행가능해영역에 속하도록 최대변화크기( $\alpha_{max-r}$ )를 선택한다.

$$\text{If } \left( \frac{\partial D(Q, r, P_k)}{\partial r} \Big|_{Q = Q_k^{(i)}, r = r_k^{(i)}} \right) > 0$$

$$\alpha_{max-r} = \frac{\lambda - r_k^{(i)}}{\partial D(Q, r, P_k) / \partial r}$$

Else

$$\alpha_{max-r} = \frac{r_k^{(i)}}{\partial D(Q, r, P_k) / \partial r}$$

Endif

STEP 2.1.3 : 최대변화크기  $\alpha_{max}$  결정

$$\alpha_{max} \leftarrow \min \{ \alpha_{max,Q}, \alpha_{max,r} \}$$

STEP 2.2 : 최적변화크기  $\alpha_{opt}$  설정

이분법(Half-Region Elimination Method)에 의하여 [단계 1]에서 구한 방향벡타의 역방향으로 비용식을 최소화하는 변화크기를 탐색.

[ STEP 3 ] 발주정책 변경

$$Q_k^{(i+1)} = Q_k^{(i)} - \alpha_{opt} \frac{\partial D(Q,r,P_k)}{\partial Q} \Big|_{Q=Q_k^{(i)}, r=r_k^{(i)}}$$

$$r_k^{(i+1)} = r_k^{(i)} - \alpha_{opt} \frac{\partial D(Q,r,P_k)}{\partial r} \Big|_{Q=Q_k^{(i)}, r=r_k^{(i)}}$$

[ STEP 4 ] 종료조건 검색

발주량과 재주문점의 변화가 있으면 개선의 여지가 있으므로 현재의 발주정책에서 개선의 방향을 구하기 위하여 단계 2로 간다. 변화가 없으면 현재의 벌칙상수 값에서 최적이므로 해의 개선을 중지하고, 벌칙상수( $P_k$ )를 감소시켜 계속 수행한다. 벌칙상수의 변화에 따라 발주정책이 변동폭이 매우 작으면, 벌칙방법의 특성에 의하여 최적해에 근사하므로 알고리즘을 종료한다.

IF (  $\frac{Q_k^{(i+1)}}{Q_k^{(i)}} \leq \varepsilon_1, \frac{r_k^{(i+1)}}{r_k^{(i)}} \leq \varepsilon_2$  )  
 THEN {  $Q_k <- Q_k^{(i+1)}, r_k <- r_k^{(i+1)}$  }  
     IF (  $D(Q_{k-1}, r_{k-1}, P_{k-1}) - D(Q_k, r_k, P_k) \leq \varepsilon$  )  
         THEN 종료  
         ELSE {  $i <- 0, k <- k+1, P_{k+1} \leftarrow P_k/M, [단계 1]로간다. \}$  }  
 ELSE ( [단계 2]로 간다. )

#### 4.2 중앙분배센터의 수요특성치추정 모듈

DC의 수요는 RDC에서의 주문과정의 합성으로 모형화 할 수 있다. 지역분배센터의 고객의 수요는 포아송분포에 의하여 발생하며, 지역분배센터의 발주량이  $Q_i$ 라 하면, RDC i의 주문간격분포는 Erlang- $Q_i$  분포에 따른다.

Cox[3]는 갱신시간간격이 Erlang 분포에 따를 때, 동일한 분포를 갖는 갱신과정을 합성을 통하여 일정기간동안에 발생하는 갱신회수의 평균과 분산을 유도하였으며, Svoronos & Zipkin[20]은 Cox의 결과를 동일한 지역분배센터로 구성된 분배시스템에 적용하였다.

본 논문에서는 서로 상이한 수요율, 조달기간, 분배정책을 갖는 N개의 지역분배센터로 구성된 시스템을 고려한다. 지역분배센터 i의 수요율이  $\lambda_i$  이고, 발주정책이 ( $Q_i, r_i$ )일 때, 중앙분배센터의 조달기간  $L_0$  동안에 N개의 지역분배센터로부터 발생된 수요의 평균과 분산은 갱신이론의 결과[3, 20]를 응용하여 식 (4), (5)과 같이 구할 수 있다.

$$E[\text{Leadtime demand of DC}] = \sum_{i=1}^N Q_i E[N_i(t)] = \sum_{i=1}^N \lambda_i L_0 \tag{4}$$

$$\text{Var}[\text{Leadtime Demand of DC}] = \text{Var}(\sum_{i=1}^N N_i(L_0) Q_i) \tag{5}$$

$$= \sum_{i=1}^N \{ Q_i^2 \text{Var}(N_i(L_0)) \} = \sum_{i=1}^N (\lambda_i L_0 + \sum_{k=1}^{Q_i-1} \frac{1 - \exp(-\alpha_k \lambda_i L_0) \cos(\beta_k \lambda_i L_0)}{\alpha_k})$$

단위기간당 수요율이 높은 소비성제품의 경우에, 조달기간동안의 수요과정은 중심극한정리에 의하여 평균과 분산이 식 (4), (5)인 정규분포로 근사화할 수 있다.

### 4.3 중앙분배센터의 발주정책결정 모델

중앙분배센터의 발주정책은 지역분배센터의 발주에 의해 형성된 수요과정, 중앙분배센터의 재고관련 비용요소 및 조달기간등이 고려되어 결정되어 진다.

이 때 중앙분배센터의 발주정책은 무수히 많은 재고를 보유하기 보다는 적정수준의 재고부족을 인정하는 수준에서 재고정책이 결정되게 되며, 이는 지역분배센터의 주문을 즉시 충족시켜 주지 못하고 지연시간이 발생하게 된다.

또한, 지역분배센터는 중앙분배센터의 지연시간에 기인하여 실질적 조달기간이 늘어남으로써 최소의 비용으로 최소요구충족을 만족시키는 발주정책을 재수립하게 된다. 변경된 지역분배센터의 발주정책은 중앙분배센터의 수요과정에 변경을 초래하게 되고, 중앙분배센터는 변경된 수요과정을 고려하여 최적발주정책을 재수립하게 된다.

이러한 지역분배센터와 중앙분배센터의 발주정책 결정과정이 상호영향을 미치며 해가 수렴하는 동안 반복하게 된다.

지역분배센터의 발주정책은 중앙분배센터의 발주정책에 의존하여 결정되므로, 중앙분배센터의 발주정책은 최소비용점에서 결정되지만, 지역분배센터의 경우에는 중앙분배센터의 지연시간을 조달기간에 포함시킨 실질적 조달기간이 연장됨으로써 최소비용점과 거리가 먼 해를 결정하게 된다.

따라서, 중앙분배센터의 지연시간을 억제함(중앙분배센터의 비용이 증가됨)으로써, 지역분배센터를 보호(지역분배센터의 비용이 감소됨)하고 시스템의 총비용을 감소시키킬 수 있다.

중앙분배센터의 평균추후납품수가  $B(Q_0, r_0)$ 이고 수요율이  $\lambda$ 일 때, 평균지연시간은 대기행렬이론의 Little's formula에 의하여  $(\lambda^{-1} B(Q, r))$ 가 되며, 이는 최대허용지연시간보다 적어야 한다.

따라서, 중앙분배센터의 비용식과 지연시간에 대한 제약식은 식 (6)과 같이 모형화할 수 있다.

$$\text{Min } TC_3(Q_0, r_0, P_k) = C_R \frac{\lambda}{Q_0} + C_H \left( \frac{Q_0}{2} + r_0 - \mu \right) + \left( \frac{C_S + C_H}{Q_0} \right) \beta(r_0) \quad (6)$$

$$\text{s.t. } \frac{B(Q_0, r_0)}{\lambda} \cong \beta(Q_0) \leq D_{\max}$$

벌칙방법(Penalty Method)으로 해를 구하기 위하여, 제약조건의 위반정도의 자승에 비례하도록 벌칙비용함수를 설정하고, 매우 작은 벌칙상수( $P_k$ )를 도입하여 제약식을 이완시키면 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min } TC_4(Q_0, r_0, P_k) = & C_R \frac{\lambda}{Q_0} + C_H \left( \frac{Q_0}{2} + r_0 - \mu \right) + \left( \frac{C_S + C_H}{Q_0} \right) \beta(r_0) \\ & + \frac{1}{P_k} \left( \frac{\beta(r_0)}{\lambda Q_0} - D_{\max} \right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)의 해법절차는  $TC_2$ 를  $TC_4$  로, 방향벡터를 [Appendix 3]로 대치하여 "RDC 발주정책 결정과정"을 수행한다. 이 절차를 "CDC 발주정책 결정과정"이라 칭한다.

### 4.4 중앙분배센터의 수행도분석 모델

지역분배센터의 조달기간 수요는 중앙분배센터에서 발생하는 지연시간의 평균과 분산을 고려하여야 하나 Deuermeyer 와 Schwarz[5]는 지연시간의 평균만을 고려하므로 지역분배센터의 수요를 과소평가된다.

지역분배센터의 수요과정은 포아송에 의하여 발생하며, 중앙분배센터의 수요과정은 상이한 어랑분포의 합성으로 형성된다. 그러나, 중앙분배센터의 조달기간의 수요분포를 어랑분포의 합성을 개별수요를 갖는

정규분포로 근사화하였으므로, 중앙분배센타의 도착시간간격의 분포는 단위수요를 갖는 고객이 지수분포로 입력된다고 할 수 있다. Marshall과 Wolff [10]는 M/G/1 대기행렬모형에서 대기중인 고객수의 kth factorial moment와 대기시간의 kth moment와의 관계를 이용하여 중앙분배센타의 추후납품수(y)와 지연시간( $w_q$ )의 관계를 나타내면 식 (8)과 같다.

$$E[y \cdot (y-1)] = \lambda^2 \cdot E[w_q^2] \quad (8)$$

중앙분배센타의 발주정책 결정과정에서 지연시간에 대한 중앙분배센타의 발주정책이 ( $Q, r$ )에 따른다면, 지역분배센타가 겪는 실질적 지연시간의 평균과 분산은 식 (9), (10)과 같다.

$$E[w_q] = \lambda^{-1} \cdot B(Q, r) \quad (9)$$

$$Var[w_q] = \frac{E[y^2] - E[y]^2}{\lambda^2} \quad (10)$$

where,

$$E[y] = B_0(Q, r)$$

$$\begin{aligned} E[y^2] &= \int_0^{\infty} y^2 \cdot \frac{1}{Q} \cdot \left[ \phi\left(\frac{r+y-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{r+Q+y-\mu}{\sigma}\right) \right] dy \\ &\quad \left( \text{Let, } a = \frac{r-\mu}{\sigma}, b = \frac{r+Q-\mu}{\sigma} \right) \\ &= \frac{\sigma^3}{3Q} \cdot [(a^2+2)\phi(a) - a^3\phi(a)] - \frac{(r-\mu)\sigma^2}{Q} [(1-a^2)\phi(a) + a\phi(a)] \\ &\quad + \frac{(r-\mu)^2\sigma}{Q} [\phi(a) - a\phi(a)] - \frac{\sigma^3}{3Q} \cdot [(b^2+2)\phi(b) - b^3\phi(b)] \\ &\quad - \frac{(r-\mu)\sigma^2}{Q} [(1-b^2)\phi(b) + a\phi(b)] + \frac{(r-\mu)^2\sigma}{Q} [\phi(b) - b\phi(b)] \end{aligned}$$

지역분배센타의 실질적 조달기간의 평균은 식 (11), 분산은 식(12)에 의하여 산정되어진다.

$$E[L_i^*] = L_i + E[w_q] \quad (11)$$

$$Var[L_i^*] = Var[L_i] + Var[w_q] = Var[w_q] \quad (12)$$

명목상 조달기간과 중앙분배센타의 지연시간과는 독립이므로, 지역분배센타의 실질적 조달기간 동안의 수요의 평균과 분산은, Feller[6]의 독립인 2기간 수요의 합성에 대한 통계적 특성치에 따라, 식 (13), (14)와 같이 구할 수 있다.

$$E[\text{Demand of RDC } i \text{ during } L_i^*] = \lambda_i \cdot E[L_i^*] \quad (13)$$

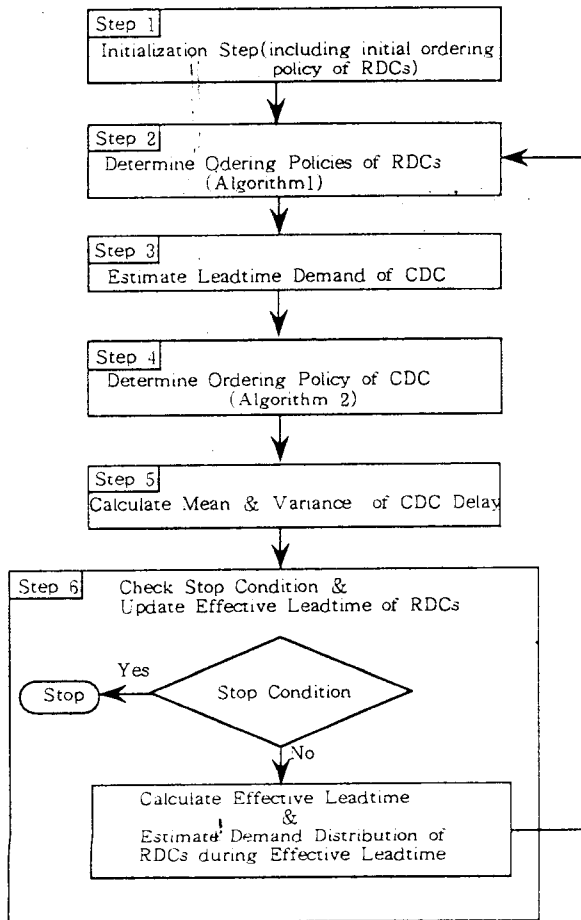
$$Var[\text{Demand of RDC } i \text{ during } L_i^*] = \lambda_i \cdot E[L_i^*] + \lambda_i^2 \cdot Var[L_i^*] \quad (14)$$



4.5 분배시스템의 최적발주정책 결정과정

본 논문의 목적은 지역분배센터와 중앙분배센터의 비용의 합이 최소가 되는 발주정책을 결정하는 데 있다. 중앙분배센터는 지역분배센터의 발주정책에 적절히 대응하고, 지역분배센터는 중앙분배센터의 발주정책과 서비스수준을 고려하여 최소비용을 갖도록하는 발주정책을 결정하여야 한다.

지역분배센터의 발주정책은 "지역분배센터의 발주정책 결정모듈"로 부터 해를 구하고, 중앙분배센터는 지역분배센터의 발주정책을 입력으로 하여 "중앙분배센터의 발주정책 결정모듈"에 의하여 최적해를 결정한다. 중앙분배센터의 수행도를 분석하여 지연시간의 평균과 분산에 대한 정보를 지역분배센터의 발주정책 결정모듈로 휘드백함으로써 지역분배센터의 실질적 조달기간과 조달기간의 수요를 재추정한다. 지역분배센터의 수요분포가 변경되므로 앞서 결정된 발주정책은 서비스수준을 만족하지 않을 수 있을 뿐 아니라 최적발주정책이 아니므로 지역분배센터는 발주정책을 변경하게 된다. 변경된 지역분배센터의 발주정책은 다시 중앙분배센터에 영향을 미치는 순환과정이 계속된다. 이러한 발주정책의 결정과정은 중앙분배센터와 지역분배센터의 발주정책에 변동이 없을 때 까지 반복한다. 그 절차를 <Fig. 1>에 도시하였으며, 각 단계를 간략히 설명하면 다음과 같다.



<Fig.1> Flowchart for Determining Ordering Policies of RDCs and CDC.

- [단계 1] : 벌칙상수 및 지역분배센터의 발주정책 초기해 설정.  
(최소요구충족율을 고려하지 않아도 무관함.)
- [단계 2] : 각 지역분배센터의 최적발주정책을 최소요구충족율을 고려하여 결정.
- [단계 3] : N개의 지역분배센터로부터 입력된 발주과정을 합성하여 중앙분배센터의 수요과정을 추정.
- [단계 4] : 중앙분배센터의 최적발주정책 결정. ( 최대허용지연시간을 고려함.)
- [단계 5] : 결정된 중앙분배센터의 발주정책에 따른 지연시간의 평균 및 분산추정.
- [단계 6] : 지역분배센터와 중앙분배센터의 발주정책에 변화의 정도를 판단한다. 변화가 있으면, 지역분배센터의 실질적 지연시간을 조정하고 단계 1을 수행한다. 변화가 적으면 중지한다.

### 5. 수치예제

10개의 지역분배센터와 1개의 중앙분배센터로 구성되어진 분배시스템을 고려한다. 비용요소와 중앙분배센터의 명목상 조달기간 및 최대허용평균지연시간 등은 <Tab. 1>에 수록하였다. 지역분배센터로부터 중앙분배센터로의 조달기간, 각 지역분배센터의 수요율과 최소요구충족율에 대한 입력자료는 <Tab. 2>에 나타내었다. 단위기간당 수요율에 따라 3개의 범주로 분류하여 제시된 최적발주정책 결정기법의 적정성을 고찰하였다.

<Tab. 1> Input Data for Costs, Leadtime and Maximum Allowable Mean Delay of CDC

	Holding Cost	Shortage Cost	Replenishment Cost	Nominal Leadtime	Maximum Allowable Mean Delay
RDC	20	10	5	-	-
CDC	20	-	5	0.03	0.0015

<Tab. 2> Input Data for Leadtimes, Demand Rates, and Fillrates of RDCs.

RDC i		RDC i									
		RDC 1	RDC 2	RDC 3	RDC 4	RDC 5	RDC 6	RDC 7	RDC 8	RDC 9	RDC 10
Nominal Leadtime		0.012	0.017	0.017	0.014	0.015	0.018	0.010	0.015	0.018	0.015
Demand Rate	Large	22500	15000	27000	30000	25000	23000	24000	18000	20000	28000
	Medium	5000	7000	7000	10000	8000	6000	9000	8500	7500	80000
	Small	900	2500	1300	3000	1600	1200	1800	1900	1500	2200
Target Fillrate		0.870	0.820	0.900	0.850	0.900	0.950	0.850	0.870	0.950	0.900

본 논문에서 제시한 분석적 방법을 "Method 1"이라 하고, "Method 1"에서 구한 발주정책을 입력파라메타로 하여 SLAMSYS 4.0을 통한 역추적방법을 "Method 2"로 하여 수요율의 변화에 따른 수행결과를

<Tab. 3>에 나타내었다. "Method 1"에서는 발주정책인 (Q,r)을 연속적 변수로 구하고, "Method 2"에서는 이산형 변수로 설정함에 따른 오차를 감안하여야 한다.

<Tab. 3> Fill Rate Analysis of the Proposed Algorithm and the Simulation Results

	LARGE_DEMAND				MEDIUM_DEMAND				LOW_DEMAND				Target Fill Rate
	Q	R	Fill_Rate		Q	R	Fill_Rate		Q	R	Fill_Rate		
			Method 1	Method 2			Method 1	Method 2			Method 1	Method 2	
RDC1	115	313	0.870	0.889	53	65	0.870	0.877	28	9	0.876	0.846	0.870
RDC2	93	272	0.820	0.838	63	123	0.822	0.820	38	42	0.841	0.792	0.820
RDC3	127	525	0.900	0.923	63	132	0.900	0.889	29	23	0.900	0.862	0.900
RDC4	135	476	0.850	0.869	75	153	0.850	0.849	42	43	0.854	0.808	0.850
RDC5	122	434	0.900	0.920	67	135	0.900	0.883	32	25	0.901	0.848	0.900
RDC6	114	490	0.950	0.961	58	127	0.950	0.944	29	26	0.956	0.929	0.950
RDC7	119	281	0.850	0.876	71	100	0.850	0.843	35	17	0.867	0.827	0.850
RDC8	102	302	0.870	0.888	69	140	0.870	0.867	34	29	0.870	0.846	0.870
RDC9	106	425	0.950	0.953	65	160	0.950	0.951	31	33	0.960	0.932	0.950
RDC10	129	488	0.900	0.923	67	135	0.900	0.893	37	36	0.909	0.864	0.900
CDC	950	6174	-	-	412	1986	-	-	155	456	-	-	-
Total Cost			Method 1	Method 2			Method 1	Method 2			Method 1	Method 2	-
			27670	27265			14503	14546			6915	6964	

<Tab. 3>에 의하면, 단위기간당 수요율이 낮은 경우는 지역분배센터의 서비스수준을 만족하지 못하게 된다. 이는 중앙분배센터의 조달기간의 수요를 추정할 때, 수요가 적을수록 정규분포로 근사화하는데 오차가 많이 발생하므로, 근사화에 따른 오차로 볼 수 있다. 그러나, 수요율이 높은 경우에는 변수의 형태가 변화된 점을 감안한다면, 중앙분배센터의 조달기간 수요가 정규분포로 잘 근사화되며, 중앙분배센터의 수행도에 대한 통계량을 잘 추정함에 따라 지역분배센터에서 설정된 최소요구충족율의 제약을 만족하는 발주정책이 수립된다. 따라서, 본 논문은 수요율이 높은 소비성제품에 대하여, 서비스수준을 만족시키며 총비용을 최소화하는 다단계 발주정책 결정기법으로 적절함을 알 수 있다.

## 6. 결론

본 논문에서는 기존의 분배시스템의 발주정책 결정기법을 현실에 적용할 때 문제가 되는 가정들을 완화 시킴으로써, 중앙분배센터와 N개의 상이한 지역분배센터로 구성된 분배시스템의 최적발주정책을 결정하는데 적용할 수 있는 알고리즘을 제안하였으며, 지역분배센터에서는 최소요구충족율에 대한 제약식을 고려하고, 중앙분배센터의 경우는 최대허용지연시간에 대한 제약조건을 고려하였다.

본 논문에서 제안하는 결정기법은 크게 4개의 모듈(지역분배센터의 최적발주정책 결정모듈, 중앙분배센터의 조달기간 수요분포의 추정모듈, 중앙분배센터의 최적발주정책 결정모듈, 중앙분배센터의 수행도 분석모듈)로 구성하였으며, 각 모듈간의 연관관계를 고려하여 지역분배센터와 중앙분배센터의 최적발주정책을 결정하는 과정을 수립하였다. 중앙 및 지역분배센터의 최적 발주정책 결정모듈에서는 제약식(지역분배센터의 최소요구충족율 및 중앙분배센터의 최대허용지연시간)을 목적식으로 이완시키는 벌칙방법(Penalty Method)을 이용하여 최적화한다.

고객의 수요가 포아송분포에 의하여 발생될 때, 수요율이 높은 경우에 지역분배센터와 중앙분배센터의

조달기간 수요는 정규분포로 근사화하였다. 지역분배센터의 발주정책은 중앙분배센터의 지연시간의 평균과 분산을 고려하여 조달기간의 수요를 추정하고, 고객에 대한 서비스수준을 고려하여 결정한다. 이 때 중앙분배센터의 지연시간은 M/G/1 대기행렬이론에 입각하여 산정한다. 중앙분배센터의 발주정책은 지역분배센터의 발주과정과 평균지연시간의 제약을 고려하여 결정한다. 중앙분배센터의 수요과정은 지역분배센터의 발주과정인 Q-Stage Erlang분포를 합성하여 수요의 평균과 분산을 구하고 이를 정규분포로 근사화하였다.

본 논문에서 제안된 수리적 방법의 적용성을 고찰하기 위하여 수리적방법의 수행결과를 입력으로 하여 시뮬레이션을 행한 결과, 수요율이 높은 경우에 수리적방법이 매우 잘 적용된다.

### References

- [ 1 ] Badinelli, R. D., " A Model for Cotinuous-Review Pull Policies in Serial Inventory Systems, " Operations Research, vol. 40, pp. 142-156, 1992.
- [ 2 ] Badinelli, R. D., and L. B. Schwarz, " Backorders Optimization in a One-Warehouse, N-Identical Retailer Distribution System, " Naval Research Logistics, vol. 35, pp. 427-440. 1988.
- [ 3 ] Cox, D. R. Renewal Theory, Methuen, London, 1967.
- [ 4 ] Deboedt, M. A., and S. C. Graves, " Continuous Review Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem with Stochastic Demand, " Management Science, vol. 31, pp. 1286-1299, 1985.
- [ 5 ] Dueurmeyer B. L., and L. B. Schwarz, " A Model for the Analysis of System Service Level in Warehouse-Retailer Distribution Systems : The Identical Retailer Case, " TIMS Studies in the Management Sciences 16, pp. 163-193, 1981.
- [ 6 ] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol. I, Wiley, New York, 1960.
- [ 7 ] Gross, D., " On the Ample Service Assumption of Palm's Theorem in Inventory Modelling, " Management Science, vol. 28, pp. 1065-1075, 1982.
- [ 8 ] Gross, D., D. R. Miller, and R. M. Soland, " A closed Queueing Network Model for Multi-Echelon Repairable Item Provisioning, " IIE Transaction, vol. 15, pp. 344-352, 1983.
- [ 9 ] Hadley, G. and T. M. Whitin, Analysis of Inventory Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
- [10] Marshall, K. T., W. R. Wolff, " Customer Average and Time Average Queue Lengths and Waiting Times," Journal of Applied Probability, Vol.8, pp. 535-542, 1971.
- [11] Muckstadt, J. A., " A Model for Multi-Echelon Multi-Identure Inventory System," Management Science, vol. 20, pp. 472-481, 1973.
- [12] Kim, J. S., K. C. Shin, " Algorithm to Determine the Optimal Spare Inventory Level for Repairable-Item Inventory System, " Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers, vol. 19, No. 3, pp. 81-90, 1983.
- [13] Reklaitis, G. V., A. Ravindran, K. M. Ragsdell, Engineering Optimization, John Wiley & Sons, N. Y., 1983.
- [14] Rosenbaum, B. A., " Inventory Placement in a Two-Echelon Inventory System : An Application, " TIMS Studies in the Management Sciences 16, pp. 195-207, 1981.
- [15] Rosenbaum, B. A., " Service Level Relationships in a Multi-Echelon Inventory System," Management Science, vol. 27 pp. 926-945, 1981.
- [16] Sahin, I., " On the Stationary Analysis of Continuous Review (s, S) Inventory Systems with Constant Lead Times, " Operations Research, vol. 27, pp. 717-729, 1979.
- [17] Sand, G., " Predicting Demand on the Secenary Echelon : A case Study, " TIMS Studies in the Management Science 16, pp. 209-223, 1981.
- [18] Schwarz, L. B., B. L. Deurmeyer, and R. D. Badinelli, " Fill-Rate Optimization in a One-Warehouse N-Identical Retailer Distribution System, " Management Science, vol. 31, pp. 488-498, 1985.
- [19] Sherbrooke, C. C., " METRIC : A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control, " Operations Research, vol. 16, pp. 122-141, 1968.

[20] Svoronos, A. and Zipkin, P., " Estimating the Performance of Multi-Level Inventory Systems, " Operations Research, vol. 36, pp. 57-72, 1988.  
 [21] Szendrovitz, A. Z. " Note-Comments on the Optimality in Optimal and System Myopic Policies for Multi-Echelon Production/Inventory Systems, " Management Science, vol. 27, pp. 1081-1087, 1981.  
 [22] Yu, H. G., M. S. Kim, and J. S. Kim, " The Method of Determinating the Spare Inventory Level in the Repairable Munition Systems, " Journal of the Military Operations Research Society of Korea, vol. 16, pp. 96-104, 1990.

**[Appendix 1]** Propositions derived by Hadley & Whitin [8]

(1) Average Inventory Level

$$I(Q,r) = \frac{Q}{2} + r - \mu + B(Q,r)$$

(2) Average Backorders

$$B(Q,r) = \frac{1}{Q} [\beta(r) - \beta(r+Q)] \cong \frac{1}{Q} \beta(r)$$

where,

$$\beta(r) = \frac{1}{2} [\sigma^2 + (r-\mu)^2] \phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \frac{\sigma}{2} (r-\mu) \phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)$$

(3) Stock-Out Probability

$$P_{out} = \frac{1}{Q} [\alpha(r) - \alpha(r+Q)] \cong \frac{1}{Q} [\alpha(r)]$$

where,

$$\alpha(r) = \sigma \phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - (r-\mu) \phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)$$

**[Appendix 2]** Gradient Vector  $\left(-\frac{\partial TC_2}{\partial Q_i}, -\frac{\partial TC_2}{\partial r_i}\right)$ , for  $i=1, \dots, N$

Case 1 :  $(1-f_i)Q_i - \alpha(r_i) \geq 0$

$$\frac{\partial TC_2(Q_i, r_i, P_k)}{\partial Q_i} = -\frac{\lambda_i}{Q_i^2} C_R + \frac{C_H}{2} - \left(\frac{C_S + C_H}{Q_i^2}\right) \beta(r_i)$$

$$\frac{\partial TC_2(Q_i, r_i, P_k)}{\partial r_i} = C_H + \left(\frac{C_S + C_H}{Q_i}\right) \left[ (r_i - \mu_i) \phi\left(\frac{r_i - \mu_i}{\sigma}\right) - \sigma_i \phi\left(\frac{r_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \right]$$

Case 2 :  $(1-f_i)Q_i - \alpha(r_i) < 0$

$$\frac{\partial TC_2(Q_i, r_i, P_k)}{\partial Q_i} = -\frac{\lambda_i}{Q_i^2} C_R + \frac{C_H}{2} - \left(\frac{C_S + C_H}{Q_i^2}\right) \beta(r_i) + \frac{2[(1-f_i)^2 Q_i - (1-f_i)\alpha(r_i)]}{P_k}$$

$$\frac{\partial TC_2(Q_i, r_i, P_k)}{\partial r_i}$$

$$= C_H + \left(\frac{C_S + C_H}{Q_i}\right) \left[ (r_i - \mu_i) \phi\left(\frac{r_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) - \sigma \phi\left(\frac{r_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \right] - 2\phi\left(\frac{r_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) [\alpha(r_i) - (1-f_i)Q_i]$$

[Appendix 3] Gradient Vector  $(-\frac{\partial TC_4}{\partial Q_0}, -\frac{\partial TC_4}{\partial r_0})$

$$\text{Case 1 : } \frac{\beta(r_0)}{\lambda Q_0} \leq D_{\max}$$

$$\frac{\partial TC_4(Q_0, r_0, p_k)}{\partial Q_0} = -\frac{\lambda}{Q_0^2} C_R + \frac{C_H}{2} - \left(\frac{C_S + C_H}{Q_0^2}\right) \beta(r_0)$$

$$\frac{\partial TC_4(Q_0, r_0, p_k)}{\partial r_0} = C_H + \left(\frac{C_S + C_H}{Q_0}\right) \left[ (r_0 - \mu_0) \phi\left(\frac{r_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) - \sigma_0 \phi\left(\frac{r_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) \right]$$

$$\text{Case 2 : } \frac{\beta(r_0)}{\lambda Q_0} > D_{\max}$$

$$\frac{\partial TC_4(Q_0, r_0, p_k)}{\partial Q_0} = -\frac{\lambda}{Q_0^2} C_R + \frac{C_H}{2} - \left(\frac{C_S + C_H}{Q_0^2}\right) \beta(r_0)$$

$$- \frac{2}{p_k} \left[ \frac{\beta(r_0)}{\lambda Q_0} - D_{\max} \right] \frac{\beta(r_0)}{\lambda Q_0^2}$$

$$\frac{\partial TC_4(Q_0, r_0, p_k)}{\partial r_0} = C_H + \left(\frac{C_S + C_H}{Q_0}\right) \left[ (r_0 - \mu_0) \phi\left(\frac{r_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) - \sigma_0 \phi\left(\frac{r_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) \right]$$

$$+ \frac{2}{p_k} \left( \frac{\beta(r_0)}{\lambda Q_0} - D_{\max} \right) \left( \frac{1}{\lambda Q_0} \right) \left[ (r_0 - \mu_0) \phi\left(\frac{r_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) - \sigma_0 \phi\left(\frac{r_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) \right]$$