韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1994. 12. 제 33권, 제 2호, 221-233.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Dec. 1994. Vol. 33, No. 2, 221-233.

수학사와 퀴즈문제를 도입한 기하 수업이 학생들의 VAN HIELE 수준에 미치는 효과에 대한 연구

허 지 영 (의정부고등학교)
송 순 희 (이화여자대학교)

I. 서론

A. 연구의 필요성 및 목적

수학적인 사고의 육성이 수학과의 목표로 명시된지 25년 이상이 되고 있으며 1987년 부터 실시되고 있는 제 5차 교육과정 중 중학교 수학 교육과정 일반 목표의 핵심이 좀 더 사고적이고 창조적인 능력을 길러주는데 있듯이 수학적 사고 육성의 중요성이 점차 강조되고 있다 (박한식, 1991). 그러나 지식, 기능에 대해서는 그 지도 내용과 방법을 지도자가 구체적으로 파악하고 있는데 반하여 수학적 사고 방법과 수학적 태도에 대해서는 일반적으로 매일의 지도장면, 어디에서, 어떻게 지도할 것인가를 제시한 사항이 거의 없는 실정이다 (片桐重男, 1992). 수학이 구체물이나 사건을 추상화하여 기호로 표현되어지는 학문이라면 실생활과 가장 밀접하게 관련된 수학 분야는 기하라고 말할 수 있다 (김도상외, 1990).

그러나 정의, 공리, 정리로 구성되는 기하학의 체계는 수학의 체계를 가장 잘 반영하고 있다는 중요성에도 불구하고 저학년에서는 기하학의 요소들이 제대로 인식되지도 못한채, 학습자가 가장 어렵게 느끼고 싫어하는 부분으로, 학생들의 마음속에 오히려 反數學的 경향을 심는 결과를 낳았을 뿐이다.

Dewey는 "학생들의 수학적인 사고를 통한 문제해결 행동은 정의적 요인의 영향을 받으며, 수학적인 사고를 통해 문제해결을 가능하게 해주는 제 1의 요소는 호기심이다."라고 강조했다 (片桐重男, 1992). 그러므로 수학의 학습을 지적 영역으로 한정하려는 경향에서 탈피하여 적극적인 사고활동을 즐기고 또 행하려는 정의적 측면을 부각시켜야 하며 특히 기하부분의 호기심을 자극하는 수업방법의 연구가 필요하다.

수학적 사고교육의 목표를 실현하기 위해 제시된 이론 중 주목할만한 것은 Piaget의 조작적 구성주의 이론이며, 조작적 구성주의 수학과 맥을 같이 하는 기하부분의 이론 중의 하나가 van Hiele 수준 이론이다.

1959년에 네델란드의 부부 수학교사에 의해 제안된 van Hiele이론은 학생들이 기하에서 실패하는 이유를 설명하기 위하여 기하 학습의 한 모델을 설정했다. 이에 의하면 학생들은 기하 학습에서 일정한 발달 단계를 거치며, 전단계를 거치지 않고는 다음 단계로 넘어갈 수 없다고 한다.

어떻게 하면 학생들이 어떤 수준을 빨리 획득할 수 있도록 도와줄 수 있을 것인가에 대하여 van Hiele은 기하의 5단계 지도 방법을 제시하고 있다.

van Hiele이 제시한 5단계 지도 방법과 van Hiele 수준에 근거를 두고, 효과적인 기하교육을 위해 교과서 내용을 어떻게 배열하느냐에 대한 연구는 많은 학자들에 의해 수년간 이루어져 왔으며, 소련에서는 실제 교과서 구성에 많은 적용이 되기도 했다.

선행 연구들을 보면 수학사와 수학의 응용을

통한 정의적 영역을 강조한 수업은 수학에 흥미와 관심을 일으킬 뿐만 아니라 학업성취 향상에도 기여하며, van Hiele 수준이 높을수록 증명능력 또한 높다는 것을 알 수 있으나, 정의적 영역을 강조한 기하 수업과 van Hiele 수준과의 관계에 관한 직접적인 연구는 아직 없었다. 그러므로 이제는 수학적 사고와 수학적 태도의 육성(특히 기하부분)을 위해 van Hiele이 제시한 5단계 지도 방법과 더불어 van Hiele이론에 따른 단계 수준간의 효율적인 상승을 가져오는 다른 구체적인 기하 교육 방법으로서 수학사와 퀴즈문제를 적용한 기하 수업 방법에 대한 연구가 절실히 필요하다.

이러한 연구의 필요성에 따라 첫째, van Hiele 기하 인지 발달 이론을 통해 우리나라 일부지역(경기도) 중학교 2학년의 기하 개념 이해 수준을 알아보고 둘째, 기하부분의 호기심을 자극하여 수학적 사고를 촉진할 수 있는 학습 방법의 한 예로, 수학사와 퀴즈문제 풀이를 도입한 정의적 영역을 강조한 수업을 실시한다. 이에 따라 학생들의 탐구적인 학습태도로 창조가 수반되는 의욕적인 학습이 되어 수학적 사고와 수학적 태도가 향상되도록 유도하며 그 결과를 van Hiele 이론에 따른 수준간의 상승 효과와 비교하고자 하는데에 이 논문의 목적이 있다.

B. 연구의 제한점

이 연구의 해석 및 적용에는 다음과 같은 제한점을 지닌다.

첫째, 연구의 대상이 경기도 의정부시 소재의 남자중학교 2학년 4학급 학생으로 제한되었기 때문에 연구 결과를 일반화 하여 해석하는데는 여러가지 제약이 따른다.

둘째, 실험집단과 통제집단의 수업에 있어서 항상 공정하고 객관적인 입장이 되어 수업에 임하려고 노력을 했으며, 학생들도 서로 다른 수업 방식으로 진행되고 있다는 사실을 모르게 하려고 했다. 그러나 이 연구의 계획 과정과 실험, 통제 집단의 기하수업을 모두 본 연구자가 하였으므로 주관적인 의지의 개입 여부를 전혀 배제할 수는 없다.

Ⅱ. 이론적 배경

A. 수학적 사고

수학적 사고는 복합적이고 포괄적인 것으로서 그 실체를 확인하는 것이 쉽지 않다. 박한식은 수학적 사고를 수학의 내용 그 자체에서의 사고와, 수학의 내용을 매체로 하여 개별적인 내용에 구애되지 않는 사고의 두가지로 나누고 있다. 강시중은 대상을 수학적으로 보고 생각하며 수학을 만들고 다듬어 가는데 근원이 되는 생각을 수학적 사고라 했다(강옥기외, 1989).

학교 수학교육 상황하에 수학적 사고력을 신장시키려는 입장에서 볼 때 수학적 사고를 어떻게 봐야 할 것인가? 학생들에게 수학적 사고력을 신장시키라는 요구는 학생들 모두를 수학자로 양성하자는 것이 아니라 그들이 활동하고 있는 삶의 현장에서, 즉 물리적 상황에서 부딪히는 여러가지 문제를 수학적으로 보고 수학을 이용하여 해결할 수 있게 하자는 것이다. 수학적 사고는 사고의 일부이기 때문에 수학적 사고를 개념화 하기 위해서는 우선 사고가 무엇인가를 알아야 한다. 성일제등은 "인간의 사고란 합리적으로 문제를 규정하고 거기에 대처해 나가는 유목적적이며 의도적인 정신활동"이라 하였으며, Polya도 이와 비슷한 생각으로 "인간의 사고는 수단을 찾고 문제를 해결하고자 하는 것이다"라고 피력했다. 즉, 수학적 사고를 문제해결과 동일시 한 것이다(강옥기외, 1989).

수학적 사고를 간단히 수학적 문제를 해결하는 정신활동이라고 했을 때 그것을 구성하는 요소로 Charles는 수학적 사고는 사고과정, 지식, 신념, 태도의 4가지로 구성되어 있다고 보고 있다. 수학적 사고의 정의적, 태도적 측면이

다루어지기 시작한 것은 오래되지 않았다. Charles가 수학적 사고의 구성 요소 가운데 신념과 태도로 나눈 것을 Schoenfeld는 신념체계라고 하였는데 이것은 한 개인이 수학과 수학적 과제에 접근하는 관점인 수학적 세계관을 말한다. 개인의 수학에 대한 신념이 개인별로 문제에 접근하는 방법의 선택과 기술의 이용, 해결시간 등에 영향을 미친다고 제시하는 것이다. 신념은 어떤 문제에 대한 접근 방법을 어떻게 선택할 것인가를 결정할 수 있고,어떤 방법을 사용할 것인지, 얼마나 오랫동안 그것을 붙들고 있을지를 결정한다(강옥기외, 1989, p. 25).

결국, 수학적 사고를 문제 해결력으로 볼 수 있다. 수학교육의 목적은 수학적 사고력을 신장시키는데 있기 때문에 1980년대 이후 세계 수학교육계는 수학교육의 방향을 차원높은 수학적 사고력 신장에 두고 문제 해결을 중시하는 수학교육으로 전환하고 있다.

학생은 문제해결의 주체이다. 학생들이 처음 문제에 직면하게 되면 어떠한 상태에 놓이게 되며 그러한 상태를 어떻게 벗어나며, 더 나아가 문제가 요구하는 해결방향으로 어떻게 진행하여 최종적으로는 해결에 이르게 되는가가 문제이다. 학생의 특성에 관한 최근까지의 연구는 인지적 과정 위주였으나, 문제해결자의 특성에는 인지적 특성과, 정의적 특성 두가지가 있다. 향후 연구과제는 문제 해결자의 정의적 특성을 고려하여, 문제 해결을 가능하게 하는 것에 초점을 맞추는 것이 바람직 하다고 본다.

학생들의 문제해결 행동이 정의적 요인의 영향을 받는다는 것의 원류를 Dewey에서 찾을 수 있으며, 그에 의하면 문제해결을 가능하게 해주는 제 1의 요소는 호기심이다(片桐重男, 1992). 이것은 앞을 향하여 밖으로 진행하려는 경향으로, 새로운 대상을 찾고 낡은 대상을 개선하는 끊임없이 경험을 확대하려는 경향이라 할 수 있다. 처음에는 생리적으로 불안한 상태이나 사회적 영향을 받고 발달하게 되어 어느 정도 지적 수준에까지 이르게 된다. 그러나 이러한 호기심은 자칫하면 무관심, 부주의, 완고, 또는 독선속에서 상실될 수도 있는 만큼 신중히 고려되어야 한다. 학생들은 실제 세계에서 수학적 대상을 어떻게 다루어 왔었는가 하는 경험으로 부터, 그리고 수학을 학교에서 어떻게 배워왔는가 하는 경험에서 자신들의 수학적 세계관을 형성하게 된다. 이러한 이유로 이 신념을 경험적 요인이라 부르는 학자도 있다. 이러한 신념의 영향을 받는 정의적 요인으로는 각종 스트레스, 압박감, 인내심, 관심, 태도, 흥미 등을 들 수 있다. 이 정의적 요인에 대한 Mcleod의 전반적인 진단에 의하면 문제해결시 학생이 보여주는 정의적 특성은 긴장과 이완(tension relaxation), 속성(causal attribution), 자주성(indenendence) 세가지로 설명될수 있다. 자주성은 창의적인 문제해결에 대단히 중요한 변수로 작용한다(강옥기외, 1989, p. 26-54).

B. van Hiele 수준 이론

현대 수학교육의 주 관심사는 '사고교육'이며, 수학이 기성의 지식체계로서가 아닌 학습자의 구성활동 및 재발견 과정이 되어야 한다는 것이 현대 수학교육의 흐름이자 교육과정 구성의 주된 원리이다.

이러한 목표를 실천하기 위해 지금까지 제시되어 온 주목할만한 이론중의 하나는 Piaget의 조작적 구성주의 이론이라 볼 수 있는데 van Hiele 이론은 이러한 조작적 구성주의 수학과 그 맥을 같이하고 있다. 이 이론에 있어 수학적 사고활동이란 경험의 세계를 조작화하는 활동, 즉 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 인식되고 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로 비약하는 과정을 반복하는 것이다(최현호, 1989).

따라서 수학의 학습 및 지도는 이러한 싸이클이 형성되도록 하여야 한다는 것이고 이것이 바로 van Hiele 이론의 기본적인 아이디어이다.

이런 기본적인 바탕을 가진 van Hiele 이론은 네덜란드의 부부 수학교사 Pierre van Hiele 과 Dina van Hiele이 1957년 Utrecht 대학에 제출한 학위논문에서 그 골격이 제시된 이래 주로 P. van Hiele에 의해 개발되어온 이론이다.

이 이론은 1960년대에 소련 수학교육자와 심리학자들의 집중적인 연구와 실험을 통해 그 타당성이 인정되었으며 Pyshkalo에 의해 기하 교육과정에 적용되어 성공적인 결과를 가져왔다. 미국에서는 1970년대 후반에 이르러서야 Wirszup에 의해 이 이론이 소개되었고 최근 그 가치가 새롭게 인식되면서 이와 관련된 다양한 연구가 이루어지고 있다(한태식, 1991).

van Hiele 부부는 자신들이 가르쳤던 학생들이 기하학습에서 어려움을 겪는 이유를 찾아본 결과 학생들의 사고수준보다 높은 수준에서 가르쳐졌기 때문이라는 것을 알아냈다. 서로 다른 수준에서 생각하고 있는 교사와 학생은 서로 다른 문맥에서 말하게 되어 서로를 이해할 수 없다고 생각하고 학생들의 기하에 대한 사고수준(인지발달 단계)을 다음과 같이 구분하였다 (Han, 1986).

수준 1 : 시각적 인식 수준(visualization)

가장 초보적인 이해 수준에 머무른 단계로 기하적인 개념이 가지고 있는 성질과 특징을 구분할 수는 없어도 그림이나 구체적인 활동을 통해 개념을 전체로서 보는 단계이다. 이 수준의 학생은 도형의 성질이나 도형사이의 관계를 알지 못하며 주변의 대상을 단지 모양이라는 수단에 의해 파악하기 때문에 삼각형,사각형의 도형을 구분할 수는 있으나 직사각형과 정사각형은 전혀 다른 것으로 인식한다.

수준 2 : 도형의 분석적 수준(analysis)

이 수준의 학생들은 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다.

관찰을 통해 평행사변형을 분류할 수 있고 일반화할 수도 있다. 그러나 아직 명확하게 수학적인 정의를 내리지는 못한다. 또 정확한 정의를 이해하지 못하기 때문에 도형의 성질들 사이의 관계를 이해하지도 못한다.

수준 3 : 비형식적인 연역 수준(informal deduction)

도형의 성질과 도형사이의 관계를 알게되어 도형의 여러가지 성질 및 관계를 파악하고 도형의 한 성질로부터 다른 성질이 도출될 수 있음을 알게되며 도형에 대한 정의를 내릴 수 있는 단계이다. 도형과 그 성질들 사이의 논리적인 관계가 정의를 통해 확립되지만 아직 연역의 완전한 의미를 알지 못하며, 가정에서 결론을 이끌어가는 논리적인 순서를 잘 보지 못한다. 즉 간단한 연역은 가능하지만 아직 증명은 이해되지 않는다.

수준 4 : 형식적 연역 수준(formal deduction)

형식적 연역 수준에 있는 학생들은 공리론적 조직 속에서 기하의 정리들을 세우는 방법의 하나인 추론을 이해한다. 무정의 용어, 공리, 공준, 정의, 정리 및 증명의 역할과 관계성을 알게된다. 또한 이 수준에 이른 학생도 기하학적인 사고의 전개와 형성의 수단인 연역의 의미를 이해하며 생소한 정의로부터도 연역적인 사고를 할 수 있다. 예를들면 "두쌍의 대변이 서로 평행한 사각형은 평행사변형이다"라는 정의를 기초로 평행사변형의 성질을 추론할 수 있을뿐 아니라 "한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같은 사각형은 평행사변형이다"라는 또다른 정의를 토대로하여 평행사변형의 성질을 연역해 낼 수 있다. 이 수준이 학교 기하교육에서의 최고 목표로 인식되고 있다.

수준 5 : 기하학의 엄밀화 수준(rigor)

기하학의 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러가지 공리체계를 비교할 수 있으며 Hilbert의 기하학 기초론과 같은 정도의 엄정한 논리로 구성되는 다양하고 추상적인 연역적 추론의 필요성을 이해하게 된다. 이 수준의 학생은 구체적인 대상이 없어도 이론을 전개해 나갈 수 있을 정도로 사물에 대한 추상화가 발달

〈표 1〉 중학교 2학년 기하영역의 수학사와 퀴즈문제

단 원 명	수 학 사	응 용 문 제
VI 도형의 성질 1.삼각형의 성질 §1.명제	수학의 기원과 처음으로 만들어진 달력	10개의 삼각형
§2.이등변삼각형의 성질	기하학이란 무엇인가?	합동 문제
§3.직각삼각형의 합동	기하학의 기원인 이집트의 기하학	정삼각형 만들기
§4.삼각형의 외심과 내심	그리스의 기하학	내접,외접 사각형
2.사각형의 성질 §1.평행사변형의 성질	유클리드의 원론	평행사변형의 넓이
§2.평행사변형이 되는 조건	피타고라스 정리	평행사변형 만들기
§3.여러가지 사각형	아르키메데스의 묘비	최소 분할의 문제
VII 도형의 닮음 1.도형의 닮음 §1.닮은도형	닮음의 역사(비례식을 이용한 피라미드의 높이측정)	가죽의 기하학
§2.닮음의 위치	× 및 비례기호의 발명	정사각형 만들기
§3.삼각형의 닮음 조건	삼각형의 내각의 합이 180° 임을 발견한 파스칼	착시 현상
2.닮음의 응용 §1.삼각형과 평행선	화법 기하학의 창립자 가스파르 몽즈	명함의 길이
§2.평행선 사이의 선분의 길이의 비	종합 기하학	땅을 4등분하기①
§3.삼각형의 중점연결 정리	한국 수학사의 특징	땅을 4등분하기②
§4.삼각형의 무게중심	수학의 응용	합동인 6개의 다각형
§5.닮은 도형의 넓이와 부피	플라톤과 입방체를 두배로 하는 문제	물의 부피 줄이기

되어 있다.

형식적인 엄밀성과 고도의 추상능력으로 특징지워지는 이 수준의 학생들은 비유클리드 기하를 이해할 수 있다. 그러나 학교 기하교육을 통하여 수준 5에 도달하는 학생은 거의 없으며 이 수준의 측정 또한 불가능한 것으로 알려져 있다.

van Hiele 은 원래 그의 이론의 수준을 수준 0부터 수준 4까지로 구분하였으며, Hoffer도 이 표현을 사용하였다(최혜정, 1990). 그러나 본 연구에서는 Usiskin의 표현 방식대로 수준을 1에서 5까지로 구분하였다. 따라서 본 연구에서 수준 0이라 함은 수준 1에도 미치지 못하는 경우이다. 수준 0의 학생들은 평행사변형을 구분하

지 못하며, 같은 정사각형, 직사각형, 마름모들도 놓여있는 상태가 다르면 다른 도형으로 인식한다. 또, 정삼각형은 삼각형으로 구분하나, 삼각형의 세변의 길이의 차가 클수록 삼각형임을 구분해 내지 못하는 예가 많아진다.

지금까지 이야기한 다섯수준은 순서적으로 진행된다. 즉 하위 수준을 통하지 않고 상위 수준에 이를 수는 없으며 모든 학생이 같은 속도로 각 수준을 통과하는 것도 아니다. 또 서로 다른 수준의 사람은 서로를 이해할 수도 없다. van Hiele이론에 의하면 학생들이 기하 (특히 증명)에서 실패하는 가장 큰 이유는 아직 하위 수준에 있는 학생들에게 형식적인 증명(수준 4의 내용)을 가르치기 때문이다 (Usiskin, 1982).

그러므로 한 수준에서 다른 수준으로 발전하는 것은 나이에 따른 성숙보다 기하내용을 어떻게 잘 교재화하여 어떤 방법으로 지도하느냐가 중요하며 van Hiele은 다음의 5단계 지도 방법을 제시하고 있다.

(1) 질문/정보 단계로 교사와 학생들이 어떤 수준의 지도를 위해 학습목표를 이야기하는 것이다.

(2) 유도된 오리엔테이션, 즉 학생들이 교사가 제시하는 활동자료를 보며 자기나름대로 과제를 탐구하는 단계이다.

(3) 설명으로, 2 단계 지도에서 얻은 경험중에서 관찰된 자기의 관점을 토론한다.

(4) 자유로운 오리엔테이션을 지도하는 것이다.

(5) 통합하는 단계로 학생들 스스로 자기가 경험한 4단계까지를 종합한다.

C. 중학교 2학년 기하영역의 수학사와 퀴즈문제

중학교 2학년 기하내용을 지도하기에 적절한 수학사와 퀴즈문제는 <표 1>과 같다.

1. 중학교 2학년 기하영역의 수학사

수학은 만들어 지는 것이 아니라 우리가 만들어 나가는 것이다. 그렇다고 우리 각자가 제멋대로 만든 것이 아니라, 과거의 이론을 바탕으로 해서 새 이론을 세우고, 또 현재의 수학발전을 위해 일반적으로 가치가 있다고 인정된 미해결의 문제를 해결함으로써 이루어 나가는 것이다. 그러므로 수학을 공부하면서 수학사를 병행하는 것은 큰 의미를 지니고 있다.

중학교 2학년 기하부분의 학습에서 수학사를 도입하고자 한다면 먼저 <수학의 기원>과 <기하학이란 무엇인가?>를 소개하여서 지금부터 학습하고자 할 내용이 어떤 것인지를 개괄적으로 이해하고 수업에 임할수 있게 하여야 한다.

기하학의 기원인 <이집트의 기하학>과 <그리스의 기하학>에 대하여도 간단한 소개가 필요하다.

"Euclid 기하는 수학적 사고 방법의 전형이며, 공리적 방법은 기하에서 비롯되어 수학을 지배하고 있다."고 Thom이 지적하고 있듯이 일상적인 사고로부터 형식화된 연역적 사고로 전환되는 수학의 역사 발생적 과정은 Euclid 기하학적 사고를 통해 자연스럽게 발달 하였다.

이와같은 Euclid 기하의 교육적 가치를 볼때 그리스의 기하학을 상징하는 <유클리드의 원론>에 대해서 반드시 언급하여야 할 필요가 있다. 그래서 전체 기하학사를 설명한 다음 단원 시간에 간략하게 언급을 한다.

<피타고라스 정리>와 <아르키메데스의 묘비>라는 제목의 수학사는 학생들이 흥미를 느낄 수 있는 재미있는 일화이므로, 대수학자 피타고라스와 아르키메데스의 생애를 이야기하여 관심과 흥미를 유발시키는 것도 의의가 있다.

또다른 수학자의 일화로서 <삼각형의 내각의 합이 180 ° 임을 발견한 파스칼>과 <화법기하학의 창립자 가스파르몽즈>에 대하여서 대수학자들의 학창시절과 학생들의 학창시절을 연결하여 이야기하면 수학자들에게 친근감을 느낄 수 있어 수학자체와도 친근해 질 수 있다.

이와같이 전체적인 수학의 역사에 대한 소개

도 필요하지만 학습하는 단원과 직접 연관된 수학사의 내용은 그 시간의 학습 내용을 이해하는데 더욱 직접적인 도움을 준다. 그래서 [Ⅶ.도형의 닮음 1. 도형의 닮음 §1. 닮은 도형] 단원은 <닮음의 역사>라는 제목으로 비례식을 이용하여 피라미드의 높이를 측정한 이야기를, [§2. 닮음의 위치]단원은 <x및 비례기호의 발명>의 제목으로 비례기호를 발명한 이야기등을 설명하면서 수업을 하면, 학습하는 단원이 실제 주변생활과 밀접한 관계가 있다는 것을 인식할 수 있어 학습내용에 더욱 흥미를 갖게 된다. 또한 [§5. 닮은 도형의 넓이와 부피]단원에서는 직접 관련된 수학사 내용으로 <플라톤의 입방체를 두배로 하는 문제>를 소개 한다면 닮은 도형의 넓이와 부피비의 관계에 대해 많은 호기심을 갖고 정확한 계산의 중요성을 인식하게 될 것이다.

중학교 2학년 기하 부분의 마지막 단원들에서는 전체 기하의 수학사를 정리하는 의미로 <종합 기하학>과 <한국 수학사의 특징>, <수학의 응용>의 제목으로 우리나라 수학사의 독창성과 방대한 수학의 쓰임을 느낄 수 있게 한다.

이상과 같이 기하학의 전체적인 역사에 대해 소개하거나, 학습하는 단원과 관련된 수학사 내용을 소개하는 것은 물론이고, 학습하는 단원과 직접 연관된 수학사 내용이 아닌 경우라도 수학,특히 기하에 관한 일화나, 기하학에 대해 흥미를 가져 호기심을 자극할 수 있는 수학사 내용이면 어떤 것이라도 적당할 것이다.

2. 중학교 2학년 기하영역의 퀴즈문제

첫번째 단원에는 도형의 가장 기본이라 할 수 있는 삼각형에 대한 문제, <10개의 삼각형>을 통해 정확하게 삼각형의 의미를 파악하도록 한다.

두번째 단원은 2학년 기하영역의 증명에 가장 많이 이용되는 합동에 대한 문제로 삼각형뿐만 아니라, 다른 도형에서도 합동을 적용할 수 있도록 <합동문제>를 제시하고,

세번째 단원은 <정삼각형 만들기>를 통해 삼각형을 세분하여 구분할 수 있고, 직각 삼각형, 이등변 삼각형은 어떤 특징이 있는지 생각해 볼 수 있는 시간을 가진다.

[§4. 삼각형의 외심과 내심]단원은 외접원과 내접원과의 관계를 이용하여서 풀 수 있는 문제로 <내접, 외접 사각형>을 도입한다.

평행사변형에 대한 단원의 학습에는 평행사변형의 넓이를 이용한 문제와 평행사변형을 만드는 문제로 정의를 보다 쉽게 이해하고 평행사변형에 익숙해 지는 퀴즈문제 <평행사변형의 넓이>와 <평행사변형 만들기>를 풀어 본다.

사각형에 대해 학습하기 시작하는 수업시간에는 여러가지 모양의 천조각을 이용하여 정사각형을 만드는 문제로 <최소 분할의 문제>, <정사각형 만들기>, <합동인 6개의 다각형>에서 평행사변형과 마찬가지로 여러가지 도형을 만들기 위하여 노력하는 동안에 자연적으로 그 도형의 정의와 성질을 기억하도록 유도한다.

단원 [§3. 삼각형의 닮음조건]과 퀴즈문제 <착시현상>은 직접적인 연관은 없지만 기하학적 형태를 해석하는 능력을 기르는데 많은 도움이 되는 문제이다.

[2. 닮음의 응용] 시간에는 퀴즈문제 <명함의 길이>, <땅을 4등분 하기①②>를 풀면서 일정한 형태의 도형을, 같은 면적을 가진 도형들로 나누는 과정을 통하여 둘레의 길이와 넓이에 대하여 정확한 지식을 가지도록 한다.

마지막 기하단원 [§5. 닮은 도형의 넓이와 부피]는 <물의 부피 줄이기>로 겉넓이, 도형의 형태와 부피의 관계를 통해, 학습하는 단원의 학습목표를 달성하는데 직접적인 도움이 된다.

이상과 같이 본 연구에 사용된 퀴즈 문제 중 일부는 수학적인 문제라기보다는 흥미 위주의 것도 있으나 이런 놀이를 하는 동안에 기하학적인 도형에 관해서 직관력이 생기는 것은 틀림이 없다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

A. 연구설계

본 연구의 테스트는 경기도 의정부시 소재의 남자중학교 2학년 중 실험집단 2학급(100명)과 통제집단 2학급(100명)을 대상으로 먼저 1993년 3월말에 van Hiele Level Test(이하VLT)를 실시한다. 그후 중학교 2학년 기하과정 수업에서 실험집단은 수학사와 퀴즈문제를 도입하여 정의적 영역을 강조한 수업을 하고, 통제집단은 기존의 인지적 영역만을 강조하면서 진단평가와 형성평가를 활용한 수업을 한 후 1993년 10월말에 다시 VLT를 실시한다.

B. 테스트 문항 작성과 채점 절차

본 연구의 VLT 문항은 '중등학교 기하학에 있어서 인지적인 발달과 성취안(CDASSG Project: Usiskin, 1982)'에서 개발된 문항을 기초로, 최혜정의 'van Hiele 이론을 통한 기하학의 개념 이해 및 문제풀이 연구'에서 수정된 문항을 채택 하였다.

van Hiele 기하학 테스트는 객관식이므로 본 연구자가 직접 채점했다. CDASSG Project에서와 마찬가지로 van Hiele 이론에 적당하지 않은 학생 즉, 연속적으로 van Hiele 수준에 도달하지 못한 학생은 본 연구에서도 제외시켰다.

Ⅳ. 연구 결과

A. van Hielen 수준 분포

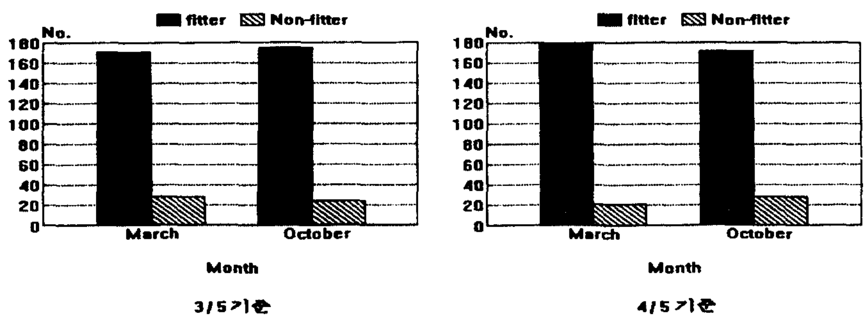
연구문제 1 : van Hiele 이론은 우리나라 중학생의 기하학적 인지발달 수준을 연구하는데 바람직한가?

수학사와 퀴즈문제를 도입한 수업과 van Hiele 수준과의 관계를 알아보기 이전에 van Hiele 이론이 우리나라 중학생의 기하학적 인지발달 수준을 측정하는 도구로써 적당한가를 조사하기 위해 연구문제 1을 채택하였다.

각 수준의 기준은 한 수준의 5문제중 3문제가 맞았을 때 그 수준에 도달한 것으로 간주하는 경우(3/5)와 5문제중 4문제가 맞았을 때 그 수준에 도달한 것으로 간주하는 경우(4/5)의 두 가지를 조사하였으며 2학년초(3월)와 기하영역의 수업이 이루어진 후(10월)로 구분하였다.

van Hiele 수준에 연속적으로 도달한 학생(fitters)은 van Hiele 이론을 적용할 수 있는 학생이며, 비연속적으로 도달한 학생(non-fitters)은 van Hiele이론을 적용할 수 없는 학생이다. 그 결과는 <표 2>이며 이것을 그래프로 나타내면 <그림 1>과 같다.

우리나라 학생들을 대상으로 VLT를 실시한



<그림 1> Level Fitter와 Non Fitter의 수

<표 2> Level Fitter 와 Non-Fitter 의 수

[단위: 명(%)]

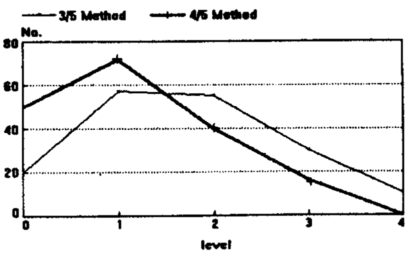
기준	시기	Fitter	Non-Fitter	계
3/5	3월	172(86)	28(14)	200
	10월	176(88)	24(12)	200
4/5	3월	179(89.5)	21(10.5)	200
	10월	171(85.5)	29(14.5)	200

다른 논문의 결과에서 fitter의 수는 한태식(1986)의 논문에서는 약 80% (4/5기준), 최현호(1989)는 86% (4/5기준), 최혜정(1990)은 약 82% (4/5기준), 91% (3/5기준)로 나타났다.

이 논문에서 3월에는 약 86% (3/5 기준), 89.5% (4/5 기준)이었고 기하 영역의 수업을 한 10월에는 약 88% (3/5 기준), 85.5% (4/5 기준)이다.

연구문제 2 : van Hiele 수준 측정을 통한 우리나라 중학생(2학년 중심)의 기하학 수준은 어떠한가?

조사대상자의 van Hiele 수준 분포(fitter)는 <표 3>과 같고 이것을 그래프로 표시한 것이 <그림 2>이다.



<그림 2> van Hiele 수준(fitter) 분포

중학교 2학년 학생들이 기하 영역의 수업을 하기 전 3월의 전체 학생 수준 분포는 3/5 기준으로 수준 1, 2, 3, 4가 각각 57%, 55%, 30%, 10%로 4/5 기준으로는 각각 73%, 40%, 16%, 0%로 나타났으며 수준 1에도 미치지 못하는 학생이 각각 20%, 50%나 되었다.

B. 수학사 및 퀴즈문제 도입과 van Hiele 수준과의 관계

연구문제 3 : 수학사와 퀴즈문제 풀이를 통해 정의적 영역을 강조한 수업과 인지적영역만을 강조한 수업에서 van Hiele 수준에 유의적인 변화가 있는가?

실험, 통제집단으로 나누어 3월에 VLT를 했다. 실험집단은 기하부분에서 수학사와 퀴즈문제를 도입한 정의적 영역을 강조한 수업을 하고, 통제집단은 인지적 영역만을 강조한 수업을 한 후 10월말에 다시 VLT를 한 결과가 <표 4>와 <그림 3>, <그림 4>이다. 단, 대상학생 중에서 van Hiele이론을 적용할 수 있는 fitter의 수만 고려했으며 3월에 본 VLT 문항을 다시 10월에 볼 것을 대비하여 3월에는 학생들에게 정답을 알려주지 않았다.

<표 4>와 <그림 3>, <그림 4>에 나타난 수치를 토대로 실험집단과 통제집단간의 3월과 10월의 VLT결과를 비교해 보기 전에 두 집단간, 교호작용의 유무를 먼저 검토해 보기 위하여 공분산분석(ANCOVA)을 통해 VLT 결과를 비교해 보았다.

공분산분석에서 10월달 VLT 점수(Y_{ij})에 대한 모형을 (식 1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_i X_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad \text{(식 1)}$$

단, X_{ij} : 3월의 VLT 점수, Y_{ij} : 10월의 VLT 점수, τ_i : 집단의 i번째 수준의 효과, i = 1(통제집단), 2(실험집단), j = 1, · · · n(집단내 학생 ID), X : 회귀변수, β : 회귀계수

위 모형으로 교호효과를 검토해 본 결과 3/5 기준으로는 <표 5>와 같고 4/5 기준으로는 <표 6>과 같다.

<표 3> Van Hiele level(fitter) 분포 [단위: 명(%)]

기준	시기	Level					계
		0	1	2	3	4	
3/5	3월	20(11.6)	57(33.1)	55(32.0)	30(17.4)	10(5.8)	172
4/5	3월	50(27.9)	73(40.8)	40(22.4)	16(8.9)	0(0)	179

3/5 기준을 살펴보면 교호효과 집단×X에 대한 유의 확률이 0.4281로 교호효과가 없다. 즉, 두 집단의 기울기가 일치하므로 공통 기울기 β를가정할 수 있다. 공통기울기를 갖는다는 조건하에서 집단간 차이를 검증하는 것은 <표 7>과 같다.

<표 7>에서 SS(집단 | 수준)에 대한 제 3종 유의확률이 0.0618로 0.1보다 작으므로 집단간 차이가 존재한다.

4/5 기준에서 교호효과 집단×X에 대한 유의확률은 0.1877로 역시 교호효과가 없다. 마찬가지로 두 집단의 기울기가 일치하므로 공통 기울기 β를 가정할 수 있고 공통 기울기를 갖는다는 조건하에서 집단간 차이를 검증한 것은 <표 8>이다.

SS(집단 | 수준)에 대한 제 3종 유의확률이 0.0010으로 0.01보다 작으므로 4/5 기준 역시 집단간 차가 존재한다.

결과적으로 3/5 기준은 90% 수준에서, 4/5 기준에서는 99% 수준에서 두 집단간의 수준 상승효과에 대해 충분히 유의적인 차이가 있음이 증명되었다. 이에 따른 보정평균 값을 구해 보면 <표 9>와 같다.

V. 결론 및 제언

van Hiele 수준 이론을 적용할 수 있는 학생의 분포를 조사해 본 결과 약 87.3%였다. 이는 지금까지 우리나라 학생들을 대상으로 한 다른 연구와 일치하며 van Hiele 이론이 우리나라중 학생의 기하학적 인지발달 수준을 연구하는데 바람직하다는 것을 의미한다.

우리나라 중학교 2학년의 기하학 수준을 알아보면 van Hiele 수준분포는 3/5기준으로 수준 1, 2, 3, 4가 각각 57%, 55%, 30%, 10%이고, 4/5기준으로는 각각 73%, 40% 16%, 0%로 나타났으며 수준 1에도 미치지 못한 학생이 각각 20%, 50%나 되었다. 이런 결과는 지금처럼 학생에게 문제풀이 위주의 주입식 교육을 해 온 것이 특히 기하 부분에서 흥미와 호기심을 불러 일으키지 못했기 때문인 것으로 판단할 수 있다.

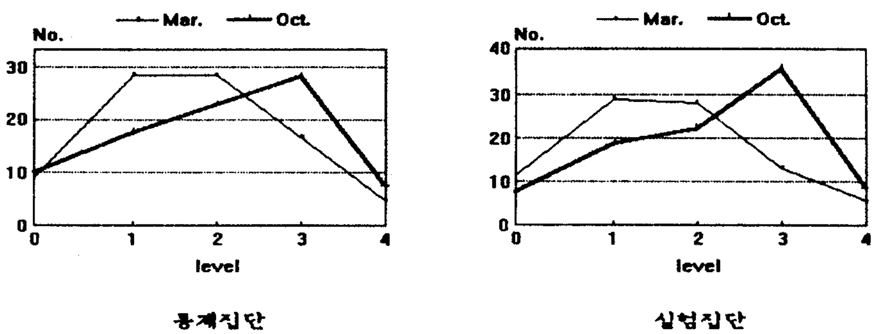
이를 보완하기 위해 수학사와 퀴즈문제 풀이를 통해 정의적 영역을 강조한 수업을 실시하여 기존의 인지적 영역만을 강조한 수업 방법과 VLT 결과를 비교해 보았다. VLT 결과 비교 방법으로 공분산분석을 통하여 통제, 실험집단의 교호효과가 없음을 검증하고 제 3종 유의확률이 3/5기준 0.0186, 4/5기준 0.0010으로 집단간 차가 존재한다는 것을 밝혔다.

3/5기준은 규준이 엄격하지 못하여 4/5 기준에 비해 수준 판단이 정확하지 못할 뿐 아니라 직관적인 사고로도 하위 수준에 쉽게 도달할 수 있으나 4/5 기준은 규준이 엄격하고 직관적인 사고로는 하위 수준에도 도달하기 어렵기 때문에 4/5기준에서 더 뚜렷한 차이가 나타났다.

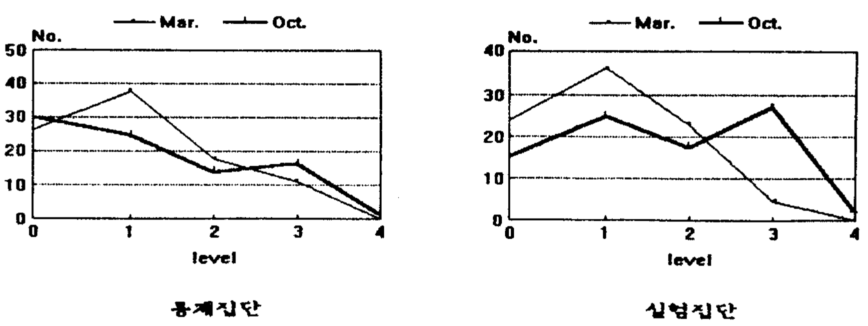
결국 기하영역에서 수학사나 퀴즈문제를 도

<표 4> 통제집단과 실험집단의 VLT 비교 [단위: 명(단,평균은 level의 평균 수치임)]

기 준	시기	통제집단						실험집단					
		수준						수준					
		0	1	2	3	4	평균	0	1	2	3	4	평균
3/5	3월	9	28	28	16	4	1.741	11	29	27	14	6	1.753
	10월	10	17	22	28	7	2.060	7	18	22	36	9	2.239
4/5	3월	26	37	18	11	0	1.152	24	36	22	5	0	1.092
	10월	30	25	14	16	1	1.221	15	25	17	27	1	1.694



<그림 3> 4/5기준 통제집단과 실험집단의 VLT비교



<그림 4> 3/5기준 통제집단과 실험집단의 VLT비교

<표 5> 4/5기준 통제와 실험집단간 β_i 검정 ANCOVA 결과

Sorce	df	SS	MS	F-Value	P-Value
집단	1	2.2487	2.2487	2.78	0.0975
X	1	76.7261	76.7261	94.87	0.0001
수준 * X	1	0.5106	0.5106	0.63	0.4281

X = 3월 VLT

<표 6> 4/5기준 통제와 실험집단간 β_i 검정 ANCOVA 결과

Sorce	df	SS	MS	F-Value	P-Value
집단	1	1.0628	1.0628	1.28	0.2605
X	1	61.3827	61.3827	73.68	0.0001
수준 * X	1	1.4593	1.4593	1.75	0.1877

X = 3월 VLT

<표 7> 3/5기준 통제와 실험집단의 ANCOVA 결과

Sorce	df	Type Ⅲ SS	MS	F-Value	P-Value
집단	1	2.8570	2.8570	3.54	0.0618
X	1	76.2512	76.2512	94.51	0.0001

X = 3월 VLT

<표 8> 4/5기준 통제와 실험집단의 ANCOVA 결과

Sorce	df	Type Ⅲ SS	MS	F-Value	P-Value
집단	1	9.4485	9.4485	11.29	0.0010
X	1	59.9627	59.9627	71.62	0.0001

X = 3월 VLT

<표 9> 최소자승법에 의한 직선회귀 모형의 산출값 평균

집단	3/5기준 LSMEAN	4/5기준 LSMEAN
1	2.00117233	1.14438803
2	2.27280467	1.63925094

LSMEAN(Least square Mean: 최소자승 평균)

입한 정의적 영역을 강조한 수업 방식은 학생들에게 흥미와 호기심을 자극시켜 VLT 점수를 유의적으로 향상시켰다. VLT 점수의 향상은 학생들의 수학적 사고력 신장을 의미하며 특히 기하 영역에서 학생들의 직관적인 사고 방식을 논리적 사고 방식으로 만든다.

이상에서 수학사와 퀴즈문제 풀이를 통해 정의적 영역을 강조한 수업은 기존의 인지적 영역만을 강조한 수업에 비해, 논리적인 사고를 유도하여 기하영역에서 학생들의 VLT 점수의 유의적인 변화를 가져오므로 수학적 사고력을 신장시키는 효과적인 수업 방법의 한 예로 결론 지을 수 있다.

이 연구에서 van Hiele이론이 우리나라 학생들의 기하학적 인지발달 수준의 연구에 바람직한 것으로 생각할 수 있다. 그러므로 van Hiele 이론을 토대로 현장에서 기하를 수업하는 교사들이 인지적 영역만을 강조한 수업 방식에서 벗어나 학생들의 수학적 사고력을 신장 시킬 수 있는 정의적 영역을 강조한 수업 방식을 채택하고 정의적 영역을 강조한 수업 이외에도 기하영역의 수학적 사고력을 향상시킬 수 있는 다양하고 구체적인 기하 교육방법의 연구가 뒤따라야 할 것이다.

참 고 문 헌

강옥기외 (1989). 수학적 사고력 신장 프로그램 개발을 위한 방안 탐색. 한국교육개발원.

김도상외 (1990). 수학과 교재론. 서울: 경문사.

김용운, 김용국(1989). 수학의 흐름. 서울: 전파 과학사.

나숙자(1992). 수학사와 수학의 응용을 이용해서 정의적 목표를 강조한 수업으로 인한 수학학습 효과의 고찰. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

박한식(1991). 한국 수학교육사. 서울: 대한 교과서 주식회사.

육인선(1992). 수학은 아름다워2. 서울: 동녘.

이나영(1986). 기하학의 발달사와 기하교육에 대한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

이 황(1988). 중학교 수학 교과 과정에 수학사적 자료의 도입으로 인한 학습효과의 고찰. 한양대학교 교육대학원 석사학위 논문.

장미화(1993). 수학사를 도입한 수학교유 지도 방법에 대한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

최현호(1989). van Hiele 기하인지 발달 이론과 증명 능력에 관한 기초 연구. 연세대학교 교육대학원 석사학위 논문.

최혜정(1990). van Hiele 이론을 통한 기하학의 개념 이해 및 문제 풀이 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

한태식(1991). 기하교육과 Van Hiele이론. 한국수학교육학회지, 수학교육, 30, 47-69.

片桐重男(1992). 수학적인 생각의 구체화. 서울: 경문사.

Han, T.S (1986). The Effects on achivement and attitude of a standard geometry textbook and a textbook consistent with the van Hiele theory. Unpublished Doctoral Dissertation, The University of Iowa.

Usiskin, Z(1982). van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. Final report of the CDASSG project. University of Chicago.