韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1994. 12. 제 33권, 제 2호, 177-188.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Dec. 1994. Vol. 33, No. 2, 177-188.

메타인지적 문제해결력의 지도와 평가를 위한 메타문제 유형의 개발

백 석 윤 (진주교육대학교)

I. 서 언

주지하는 바와 같이 수학교육에서 문제해결에 대한 관심이 집중되기 시작한 이후 상당한 시간이 경과하였다. 학교 수학교육에서의 문제해결에 관한 연구도 그 양이나 질적인 면에서 많은 진전을 이루었다고 볼 수 있다. 그러나 일반적으로 문제해결이 수학 교수/학습의 근본적인 이유이며 목적이 됨을 인식하면서도(Krulik & Reys, 1980; Lester, 1977) 학교 수학교육의 현장에서는 문제해결 교육이 차지하는 비율이 미약할 뿐만 아니라, 아직 이렇다 할 전형을 갖추고 있지 못하다. 그리고 부분적으로 이루어지고 있는 경우에도 일반 수학 교수/학습과는 그 내용이나 형식면에서 이질적으로 구분이 되는 형태로, 즉 일반 수학교육과 문제해결 교육이 서로 유리된 채로 진행되고 있음을 부인할 수 없다. 수학 문제해결이 수학의 교수/학습의 내용적 본질이며 또한 목적이 됨을 감안할 때, 문제해결의 교육은 학교 수학교육의 현장에서 유별나지 않는 자연스러운 형태로 이루어져야 할 것이다. 즉, "수학교육이 문제해결 교육이고, 문제해결 교육이 수학교육이다."라는 개념으로 이루어져야 할 것으로 생각한다.

"메타문제(metaproblem)" 라는 용어는 본 연구에서 메타인지적 문제해결력의 훈련과 평가를 위해서 개발하고 있는 문제들을 학교수학에서 언급되는 일반적인 수학문제는 물론, 기존의 문제해결 교육에서 특별한 의미 부여를 받고 있는 "문제"와도 구별하여 - 실제로 그 구별이 가능함 - 지칭하려는 의도에서 본 연구자가 조성한 것이다. 이 메타문제가 문제해결 교육에서 의도하는 바는 일반적인 수학문제들을 통하여 꾀하는 수학의 내용이나 기능 등의 학습 유발이나, 문제해결의 일반적인 발견술이나 특정 전략 등의 훈련의 목적과는 다르다고 할 수 있다. 즉, 작게는 문제해결의 과정에 중요한 역할을 담당하는 지엽적인 메타인지적 또는 메타수준의 문제해결력의 습득·훈련과, 크게는 문제해결자 자신의 문제해결 학습을 전체적으로 조직화, 체계화하는 관리·조절의 메타수준의 기능을 본 문제들을 통하여 경험 또는 훈련, 평가할 수 있게 하기 위하여 구성되었다.

문제해결 교육에 대한 관심과 연구가 상당 기간 진행되었음에도 불구하고 자연스럽게 융화된 형태로 문제해결의 교육이 이루어지고 있지 못함은 다음의 두 가지 측면에서 그 부분적인 이유를 찾아 볼 수 있다. 첫째, 수학교육계의 문제해결에 대한 초기적 관심과 인식이 수학 문제해결을 기존의 일반 수학교육과 구별하여 받아들이면서 - 실제로 수학 문제해결의 교육은 기존의 수학교육에서도 지속적으로 잠재해 오던 것으로, 20세기 후반에 들어와 수학교육에서 문제해결이 갖는 의미의 중요성을 보다 강도 깊게 인식하고, 그 의미를 학교 수학교육에 부각 발전시키고자 기울여진 체계적인 강조와 관심이 오히려 문제해결을 학교 수학과 다른 이질적인 성향을 갖는 것으로 인식하게 만들었다고 생각한다 - 형성된 경직된 선입견을 하나의 이유로 들 수 있다. 둘째, 문제해결 교육에서 주된 수단이나 매체의 역할을 하는 "문제 (problem)" 에 부여되는 성격이나 조건의 범위를 제한하려는 생각이다. 예를 들어, 문제해결의 지도와 평가를 위하여 사용될 수 있는 문제로 기존의 교과서나 참고서에서 흔히 접하

게 되는 문제들을 가능한 피하려는 경향이다. 기존의 교과서나 참고서의 일반적인 문제가 내포하고 있다고 생각하는 전형적인 내용이나 그 외형적 틀 자체가 그 문제로 하여금 문제해결의 지도나 평가의 수단으로 사용되는데 있어서 문제성을 惹起하는 것은 아니다. 오히려 자연스러운 문제해결의 교육이 이루어지게 하기 위해서는 그런 문제들을 문제해결의 지도와 평가를 위하여 어떻게 사용하여야 되는가 하는 즉 방법적인 면에서의 연구 노력이 요망된다고 할 수 있다. 즉, 일반적인 수학 교과서의 문제라도 그 문제를 그대로 이용하면서 문제해결의 지도 방법상 다양한 변화의 시도가 가능하다고 생각된다. 한편, 문제의 외형을 사려 깊게 변형시키는 경우에는 그 문제를 통하여 학습자 스스로 문제해결의 의미를 충분히 살리는 학습, 즉 문제해결력의 훈련을 할 수 있게 될 뿐만 아니라 문제해결력의 효율적인 측정도 가능케 할 수 있다고 생각한다.

수학 문제해결의 지도나 평가를 위하여 개발된 기존 문제의 유형은 대부분 대동소이하며 전형적인 외형을 취하고 있다. 그 동안 문제해결의 지도나 평가를 위한 매체로서 문제가 갖추어야 된다고 생각해 온 기본적 조건은 기능적인 면에서는 문제해결자로 부터 다량의 사고를 유발케 하고, 문제해결자의 수학적 지식이나 기능을 다양하게 적용케 하며, 외형적인 면에서는 가능한 전형적인 교과서 문제의 속성을 탈피하여 내용적으로나 형식적으로 실제적이고 새로워야 한다는 것 등을 들 수 있다. 이제 문제해결력을 훈련시키고 평가할 수 있는 문제의 개발에 있어서 앞서 언급한 것처럼 내용적이고 일차적인 문제해결의 능력을 기르기 위하여 필요한 문제의 조건에 집착할 것이 아니다. 문제의 외형상 다양한 변화의 시도를 통하여 문제해결의 능력을 신장 강화시키는데 작용하는 문제해결 행위를 조절, 관리하는 과정적이고 이차적인 메타수준의 문제해결의 기능을 훈련시킬 수 있는, 즉 실질적이고 다양한 문제해결 지도와 평가의 방법을 모색해야 될 것으로 생각한다.

기존의 문제해결을 위한 문제들은 문제해결자에게 문제해결의 시종(始終)의 과정을 종합적이면서 一連的으로 요구하는 형식을 취하고 있었다고 할 수 있다. 일반적으로 문제해결력의 기능은 문제해결 행위의 과정적인 면에서 찾아야 하며, 주어진 문제를 해결하는 과정에서 보여주는 일련의 문제해결력은 여러 가지의 구분이 가능한 부분적인 문제해결력들로 구성되어 있음을 알 수 있다. 따라서 기존의 문제가 갖추고 있는 외형적 형태로라면, 문제해결자에 따라 그러한 문제의 해결 과정에 특별히 필요로 하는 부분적인 문제해결력의 부족이나 결핍 때문에 그 다음의 과정부터는 오히려 가능했을지도 모르는 자신의 문제해결력을 발휘 연습할 수 있는 기회를 상실하거나(문제해결 지도의 측면), 자신의 문제해결력에 대한 정확한 측정이(문제해결 평가의 측면) 이루어 지기를 기대할 수 없게 된다.

이제 문제해결력의 능률적인 훈련을 위해서는 문제해결자로 하여금 더 이상 일련의 종합화된 문제해결력을 일시에 발휘케 할 - 실제적으로 이와 같은 방법은 기존의 문제해결 교육에서 사용해 온 문제의 속성때문에 형성된 지도의 방법으로, 숙련적인 문제해결자를 제외한 평균적인 학생들에게는 그 실현의 가능성이 희박하면서도 지속됐다. - 것이 아니라, 우선 종합적인 문제해결력을 구성하는 부분적인 문제해결력을 분류 추출하여 각각의 부분적인 문제해결력의 훈련을 위한 새로운 문제 유형의 개발을 통해서 이루어나가야 할 것이다. 예를 들어, 문제해결의 중간 과정에서 요구되는 어떤 부분적인 문제해결의 능력을 훈련시키기 위해서 주어지는 문제는 바로 그러한 부분적인 문제해결력이 요구되는 지점의 전 단계까지는 필요한 모든 정보가 문제에서 미리 제시되는 방식으로 문제를 구성하여야 한다. 문제해결자가 문제를 읽고서는 바로 그 부분에서 필요로 하

는 부분적인 문제해결력의 능력을 발휘하거나, 그러한 능력을 갖추고 있지 않은 경우에는 그러한 문제를 통해서 자신의 문제해결 능력을 세부적으로 노출시켜, 바로 그 부분적인 문제해결력의 필요성을 인식하고 학습할 수 있도록 하여야 할 것이다. 문제해결력 평가의 측면에서도 기존의 문제해결력 평가에 대한 연구를 통하여 다양한 방법이 개발되었지만(Lester, 1980), 결국 그러한 방법들을 통해서는 문제해결력의 양적인 면에서의 정확한 측정을 기대하기는 어려웠다. 따라서 간접적인 방법이기는 하지만 - 종합적인 문제해결력의 신뢰성 있는 측정이 어려우므로 - 주어진 문제의 종합적인 해결력을 구성하는 부분적인 문제해결의 능력들을 각각 측정하여 그 합을 산출하는 것도 기존의 문제해결력 측정 방법을 보완하는 방법이 된다고 생각한다.

본 연구에서는 수학 문제해결력을 주어진 수학 문제나 수학적 문제 상황을 해결하는데 관련된 일련의 지적 능력으로 가정하며, 이러한 일련의 수학 문제해결력은 분리될 수 있는 여러 종류의 부분적인 문제해결력들로 구성된다는 전제하에 메타인지적 문제해결력이나 메타수준의 수학 문제해결의 기능을 훈련시키고, 또 평가할 수 있는 새로운 문제 유형의 개발을 시도하였다.

II. 메타문제 유형의 개발과 각 유형이 포함하는 메타인지적 의미

성공적인 수학 문제해결 과정을 구성하는 부분적인 문제해결 능력의 주축은 이른바 "heuristics"로 지칭되는 발견술이 된다. 성공적인 문제해결의 과정 곳곳에 작용하는 여러 발견술들과 더불어 직접적인 문제해결의 역할을 담당하는 "strategies" 즉 지엽적인 전략들도 부분적인 문제해결력을 형성한다고 할 수 있다. 본 장에서는 일련의 문제해결 과정을 통하여 분리가 가능한 부분적인 문제해결력이 작용하는 장(場)이라고 할 수 있는 문제해결의 부분적인 각 과정들 - 이 각 과정들을 Schoenfeld (1985)는 "episode"라 지칭하였다 - 즉, 각 episode 들이 연결되는 마디마디에서 문제해결의 결정적인 역할을 하는 메타인지적 문제해결의 능력과, 보다 더 넓은 관점인 문제해결자 개인의 문제해결 전체에 대한 조절과 관리를 가능케 하는 메타수준의 기능을 훈련시키고 평가하는데 직접적이고 비교적 분명하게 이를 수 있는 수단이 되는 메타문제의 개발을 꾀하였다.

이를 위하여 우선 일반적인 수학문제 해결과정의 각 소과정을 - 본 연구에서는 아래와 같이 편의상 다섯 개의 소과정으로 문제해결의 과정을 분리하였다 - 구성하는 발견술적인 부분적 문제해결력과, 메타인지적인 문제해결력이나 메타수준의 문제해결 조절·관리의 기능들을 추출하여 정리하였다.

1. 발견술적 문제해결의 부분적 능력

a. 준비 과정

* 문제의 핵심어 파악하기
* 문제의 문장이나 상황의 수학화, 가시화, 형상화하기
* 문제를 자신이 선호하는 형태로 바꾸기
* 문제에서 구하고자 하는 것 명시하기
* 문제에서 주어진 정보, 조건 정리하기

b. 탐색 과정

* 주어진 문제를 특수화, 일반화, 단순화하기
* 주어진 문제 조건의 일부를 추가, 감소, 고정, 완화시키기
* 문제에서 추출한 정보를 수식화, 조직화, 구조화하기
* 문제에서 추출한 정보나 조건의 과부족 판단하기
* 문제에서 추출된 정보나 조건을 다이아그램, 도표 등으로 구체화하기
* 주어진 문제의 특별한 경우를 가정해 보기

* 주어진 문제를 편의상 몇 개의 부분으로 나누어 보기

c. 계획 과정
* 문제의 각 부분에서 필요한 부분적인 해법 구상하기
* 구상된 부분적인 해법들의 순서 정하기
* 각 부분의 해법과 그 배열을 다양하게 고안하기

d. 실행 과정
* 계획된 해법의 실행 과정을 수시로 검토하기
* 선택된 세부적인 지식, 전략, 또는 그 결과들을 예측하기
* 계획의 실행중 필요한 경우 순발력 있게 수정, 보완하기
* 현재 진행중인 해법에 대한 간결성, 신속성, 효율성 등을 평가하기
* 해법 실행의 결과를 논리적이며 간결하게 정리하기
* 문제에서 주어진 모든 조건이나 정보의 사용 여부 확인하기

e. 반성 과정

* 구한 답이 문제의 뜻에 합당한가의 여부를 검증하기
* 문제에 주어진 각 조건의 변화 가능성이나 한계성에 대하여 판단하기
* 보다 발전된 다른 해법 찾기
* 주어진 문제와 유관하다고 생각하는 문제와 상호 차이점 비교 분석하기
* 주어진 문제의 해법과 관련된 문제들의 패턴을 체계화, 구조화하기
* 주어진 문제보다 발전된 문제를 구상하기
* 현재 완료된 문제해결의 전체적인 효율성 평가하기

2. 메타인지적 문제해결의 부분적 능력

a. 문제의 해결과 관련하여 문제해결자 자신의 문제해결력을 종합적으로 예측, 평가하는 능력

b. 주어진 문제의 해결을 위하여 필요한 정보중 자신이 소유하고 있는 정보의 양과 질을 판단, 평가하는 능력

c. 문제해결의 과정을 의식적으로 유도하는 능력

d. 문제해결의 과정에 유연한 사고의 변화를 惹起시킬 수 있는 능력

e. 진행중인 문제해결의 과정을 수시로 모니터하는 능력

f. 문제해결 과정에 대한 모니터를 통하여 내포된 문제점을 색출, 검토하는 능력

g. 자신의 문제해결 과정에 대한 종합적인 평가를 할 수 있는 능력

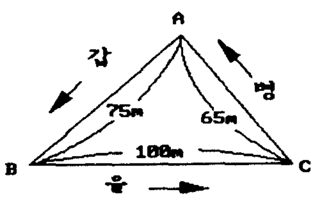
3. 메타문제의 유형과 각 문제 유형에 내포된 의미

다음에 제시되는 문제들은 주어진 수학 문제의 해결 과정을 episode 단위로 나누었을 때 - Schoenfeld(1985)는 문제의 해결 과정을 몇 개의 분리가 가능한 작은 부분으로 나누어 그 각 부분들을 "episode"라 지칭하였으며, 특히 문제해결 과정에 중요한 역할을 한다고 생각되는 메타인지적인 활동이 활발히 이루어 지는 지점이 두 episode 가 연결되는 마디라고 한다 - 각 episode가 끝나면서 동시에 새로운 episode가 시작하는 부분에 이르렀을 때, 문제해결자의 메타인지적 또는 메타수준의 문제해결 활동이

나 기능을 자극한다고 생각하는 메타문제들이다. 그리고, 특히 * 1 에서 부터 * 4 까지의 각 문제들의 아래 부분에는 그 문제가 내포하고 있으면서 그 훈련이나 평가가 가능하다고 생각되는 메타인지적 또는 메타수준에서의 문제해결 관련의 기능이나 능력이 갖는 의미에 대하여 설명하였다.

[1] 다음 <그림 1>과 같이 갑은 A 에서, 을은 B 에서 병은 C 에서 매분 각각 200m, 150m, 300m 의 속도로 동시에 출발하여 화살표의 방향으로 돈다.

세 사람이 출발하고 나서 다시 출발 지점에서 동시에 출발할 때는 출발 후 몇 분 뒤인가?



<그림 1>

#1. 위에 주어진 문제를 해결하기 위해서 다음 항목의 내용중 필요한 것을 있는대로 골라라. 그리고 자신이 선택한 각 항목의 내용에 대하여 설명하여라.

① 공약수 ② 공배수 ③ 최대공약수
④ 최소공배수 ⑤ 속도 ⑥ 삼각형의 넓이
⑦ 각의 크기

실제적인 문제해결에 앞서 주어진 문제의 해결에 필요하다고 생각되는 수학적 지식이나 기능을 문제해결자 자신이 이미 학습하여 기억하고 있는 범위 내에서 정확하게 찾아내고, 이를 문제해결의 과정에 올바르게 투여 적용할 수 있는 능력은 문제해결력을 구성하는 중요한 요소가 된다.

#2. 위의 문제를 해결하는데 있어서 더 필요한 조건이나 불필요한 조건이 있는가? 만일 있다면 그 조건을 말하고; 그 이유도 말하여라.

일반적으로 성공적인 수학 문제해결을 이루기 위해서는 주어진 문제의 실제적인 풀이에 앞서 그 문제를 해결하기 위해서 필요한 조건의 양과 각 조건의 내용을 정확하게 예측할 수 있어야 하며, 이러한 예측은 이후 전개될 문제해결의 순서와 구조를 제시해 주어 신뢰성 있고 용이한 문제해결을 가능케 한다. 한편, 이러한 능력은 주어진 문제에서 불필요한 조건이나 정보를 제거하여 문제를 정선하는 역할을 하며 문제해결을 효율성 있게 이끌어 준다. 즉, 문제해결 과정에 있어서 장독립적인(Field-independent) 소양을 훈련할 수 있는 기회가 된다.

특히, 학교 수학에 있어서 문제의 외형상 들어나 있지는 않지만 그 문제의 해결을 위해서는 절대적으로 필요한 조건이나 정보를 찾아낼 수 있는 능력은 비교적 난이도가 높은 문제의 해결에 필수적이다.

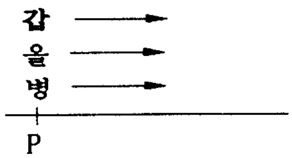
#3. 위의 문제를 어느 정도까지 해결할 수 있다고 생각하는가? 이 물음에 답하고; 위의 문제를 실제로 풀어 보아라.

① 불가능하다 ② 약간 ③ 거의 모두
④ 완전하게 ⑤ 모르겠다.

문제의 본격적인 풀이 과정에 들어가기에 앞서, 주어진 문제에 대하여 문제해결자 스스로가 갖고 있을 것으로 예상하는 종합적인 해결력에 대한 정확한 예측은 문제해결과 관련된 메타인지적인 기능으로서 자신의 문제해결력을 정확하게 파악, 관리, 평가할 수 있음을 의미하며, 이와 같은 능력은 문제해결을 경제적이고 능률적으로 유도한다고 생각된다.

#4. 위의 문제를 <그림 2>와 같이 직선 도로의 P지점에서 세 사람이 출발한 것으로 하여

위의 문제의 해결 방법과 같은 방법으로 풀 수 있게하려면 문제를 어떻게 바꾸면 되는가? 그 문제를 직접 만들어 글로 옮겨 보아라.

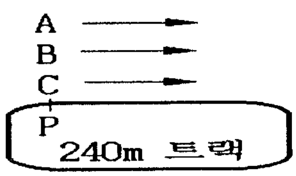


<그림 2>

주어진 문제를 자신이 선호하는 형태로 바꾸어서, 또는 문제해결의 실마리를 끌어내기 위해 부분적으로 변화시킬 수 있는 능력은 높은 수준의 문제해결력을 구성하는 요소로서 문제해결과 관련해서 보여주는 사고력의 유연성이나 구조성이 된다.

#5. 위의 문제와 다음에 제시된 문제는 어떤 점에서 같은지 알아 보아라. 또 다른 점은 무엇인지 말하여라.

<그림 3>과 같은 240m 의 트랙을 P 지점에서 A, B, C 세 사람이 동시에 출발하였다. A, B, C의 달리기 속도는 각각 150m/분, 200m/분, 300m/분 일 때, 다시 세 사람이 P 지점에 동시에 모이게 되는 것은 출발 후 몇 분 뒤의 일인가?



<그림 3>

실제적인 문제해결의 전후에 주어진 문제의 조건이나 구조 그리고 그 문제에 내포되어 있는 수학적 내용의 관점에서 문제해결자 스스로가 기억하고 있는 유관한 문제와 비교할 수 있는 능력은 문제에 대한 분석력, 이해력 등의 인지적인 능력과, 동시에 여러 관련 문제들을 자신의 지식 체계 속에 구조화, 체계화하여 관리할 수 있는 메타인지적인 기능으로서 성공적인 문제해결의 능력을 구성하는 높은 수준의 요소라고 할 수 있다.

#6. 아래 각 번호의 내용들은 위의 문제를 해결하기 위해서 거쳐야 할 풀이의 과정을 순서없이 나열한 것이다. 그리고 이들 중에는 필요한 과정이기는 하지만 틀린 과정이 하나 들어있다. 아래의 풀이 과정들을 옳게 배열하고, 틀렸다고 생각되는 풀이 과정을 맞게 바꾸어서 위 문제의 바른 풀이 과정을 완성하여라.

① 세 사람 속도의 최소공배수를 구하고, 이것으로 삼각형의 둘레를 나눈다.

② 갑, 을, 병 각자 출발점에 다시 돌아 오는데 걸리는 시간을 각각 구한다.

③ 세 사람이 각각 출발한 위치에 다시 돌아올 때 까지 지나가는 거리는 삼각형 ABC의 둘레가 되는 것으로 모두 같음을 알아 낸다.

문제해결의 근간이 되는 문제해결의 올바른 계획을 구성하기 위해서는 주어진 문제의 상황을 몇 개의 작은 부분으로 나누고, 이를 효율적인 순서로 배열하여, 실제적인 실행에 옮기기에 앞서 그 결과를 예측해 볼 수 있는 기능은 메타인지적인 성향을 갖는 문제해결에 있어서의 중요한 요소라고 할 수 있다.

[2] 연못의 깊이를 측정하기 위해서 길이가 20cm 차이가 나는 대, 소 두 개의 막대를 준비하였다. 연못의 수면과 수직이 되게 물속에 넣었더니 큰 막대는 길이의 2/3가, 작은 막대는 3/4이 물에 젖었다. 연못의 깊이는 몇 cm인가?

#1. 위 문제에다 "또 다른 막대를 수직으로 세웠더니 그 막대의 15cm가 수면 위로 나왔다."라는 조건을 더 첨가하여 다시 만들어지는

문제는 그 풀이 과정이 나 방법 면에서 처음의 문제 풀이와 달라지는 것이 있는지 알아 보아라.

주어진 문제에 새로운 조건이나 정보를 첨가 또는 기존의 것을 삭제하였을 때의 결과를 예상하고, 이와같은 조건이나 정보가 문제해결의 과정에서 미치는 영향을 비교하여 파악하는 능력은 문제에 대한 보다 심도 깊은 이해의 능력과 자신이 경험하는 문제들을 구조화 할 수 있는 능력을 보여주는 것이 된다.

#2. 위 문제를 연립 방정식을 사용하여 풀기 위해서 짧은 막대의 길이를 xcm, 긴 막대의 길이를 ycm 라고 놓고 식을 2 개 만들려고 한다. 위 문제의 문장에서 이 두 개의 식이 만들어질 수 있는 문장을 각각 말하고, 실제로 식을 만들어 보아라.

문장제에서 주어진 문장을 다루기에 편하도록 몇 개의 부분으로 분리하고, 각 부분을 식으로 옮기는 능력은 문제에 대한 정확한 분석력과 수학화, 기호화할 수 있는 능력을 의미한다.

#3. 위 문제를 연립방정식을 사용하지 않고 미지수 1개만으로 된 식을 만들어 풀 수 있는가? 가능하다면 무엇을 미지수 x로 놓아 푸는 것이 가장 편리한가? 그 이유를 말하여라.

주어진 문제를 해결하는 방법을 다양하게 찾아 보려는 의도나 그러한 의도를 가능하게 해주는 능력은 주어진 문제에 대한 여러가지의 해결 과정을 서로 비교할 수 있음을 의미하며, 체계화된 문제해결력을 소지하고 있음을 의미한다.

#4. 위 문제를 풀기 위해서 다음과 같은 식을 만들었다. 문제가 의미하는 상황을 간단한 그림으로 나타 내고; 그 그림에서 x에 해당하는 부분은 어느 곳인지 표시하여라. $x \times 3/2 - x \times 4/3 = 20$

문제에 주어진 상황을 수학화, 가시화, 형상화할 수 있으며, 다양한 수학적 표상의 방법을 해석하고, 또 직접 이용할 수 있는 능력은 능률적인 수학 문제해결력의 기초가 될뿐만 아니라, 일반적인 수학 학습을 용이하게 만든다.

#5. 다음은 위 문제를 어떤 학생이 미지수 3개를 사용하여 푸는 과정이다. 다음 각 번호의 항목 중 미지수 2개만으로 풀 때 필요한 항목을 골라라. 또 미지수 1개만 사용할 때 필요한 항목을 골라라.

① 연못의 깊이 = x, 큰 막대의 길이 = y, 작은 막대의 길이 = z ② $y - z = 20$
③ $y \times 2/3 = x$ ④ $z \times 3/4 = x$
⑤ $y = x \times 3/2$ ⑥ $z = x \times 4/3$
⑦ $y - z = 3/2 \times x - 4/3 \times x = 20$
⑧ $9x - 8x = 120$ ⑨ $\therefore x = 120$

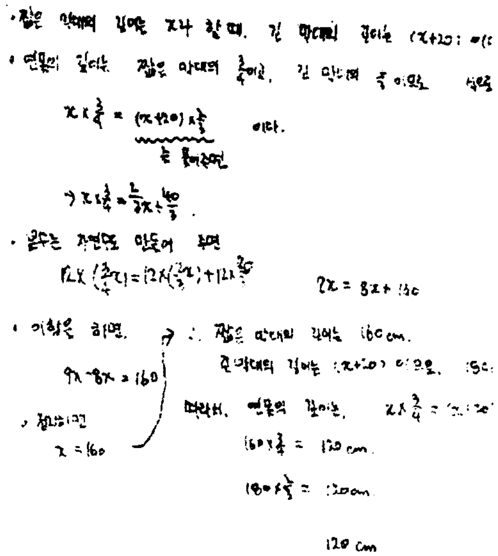
문제에 주어진 정보, 조건, 변수 등을 정리하고, 수식화하는 과정에 여러가지 가능한 방법들의 실행을 가정하여 앞으로 전개될 결과를 예측하고 비교할 수 있는 능력은 메타수준의 문제해결 능력이 된다.

#6. 위 문제에서 두 막대의 길이의 차이가 20cm가 아니라 50cm라면 연못의 깊이는 전보다 ① 더 깊어진다. ② 더 얕아진다. ③ 변함이 없다.

주어진 문제의 풀이가 완료된 후에도 문제의 변수나 조건을 다양하게 변화시키면서 각 경우에 그 결과를 판단하는 능력은 일차적으로 완료된 문제해결의 행위를 한 차원 높여서 발전시키는 계기를 마련하게 된다.

#7. 다음 <그림 4>는 위의 문제를 어떤 학생이 풀어 놓은 것이다. 그 과정을 잘 보고 틀렸

다고 생각되거나 더 좋은 방법이 있다고 생각되는 부분을 고쳐서 주어진 문제의 답을 구하여라.



<그림 4>

자신뿐만 아니라 다른 사람의 문제해결 과정을 수시로 모니터하는 가운데, 문제점의 유무를 검토하며, 또 그 질을 평가할 수 있는 능력은 문제해결을 성공적으로 이끄는데 필수적인 메타인지적 기능이며, 이는 한편으로는 경제적인 문제해결 행위의 필요 조건이 된다.

#8. 다음은 위 문제를 어떤 학생이 풀어 놓은 그대로이다. 이 풀이의 결과는 정답으로 나왔지만, 풀이 과정의 어떤 점을 고쳐야 할 것으로 생각하는가? 고쳐야 할 점이 있으면 원하는대로 고치고, 그 고친 이유를 말하여라.

<그림 생략>

문제의 해결 도중에 수시로 문제해결자가 자신의 해결 과정을 논리적으로 순서에 맞게 진행하려고 하거나, 추후 검토하기에 편리하게 간결하고 깨끗이 정리해 나가려는 의도와 그 의도를 가능케 해주는 능력은 문제해결을 보다 정확하고 능률적으로 이끌 수 있게 하는 메타수준에서 필요한 문제해결의 기능이 된다.

#9. 위 문제의 조건 중에서 "두 막대의 길이의 차이가 20cm 이다."라는 조건을 "큰 막대는 작은 막대의 1.5배 이다."라는 조건으로 바꾸어 새로운 문제를 만들었을 때, 연못의 깊이를 구할 수 있는가? 구할 수 있다면 직접 구하고, 구할 수 없다면 그 이유를 말하여라.

이미 해결이 완료된 문제의 조건, 변수 등의 정보를 변화시켜 보고, 그 결과를 비교 예상하는 능력은 완료된 문제해결을 2차적으로 발전시키는 과정이 된다. 또 이는 문제가 성립되게 하기 위해서 조건이나 변수가 갖추어야 하는 조건 등을 파악하는 훈련의 기회가 되며, 이러한 능력은 문제를 해결하는 방향과는 역의 관계에 있는 문제 구성의 기능으로서 완벽한 문제해결력을 이루기 위해서 필요한 가역적인 메타수준의 능력이라고 할 수 있다.

[3] 다음의 문제가 성립될 수 있는 문제인지 실제로 풀어 보지 않은 상태에서 알아 보아라. 성립될 수 있는 문제이면 실제로 풀어보고; 성립될 수 없는 문제이라면 그 이유를 말하고, 성립될 수 있게 문제의 조건을 바꾸어 보아라. A 분단의 평균은 62점이고, B 분단의 평균은 72점이며, 두 분단의 평균은 57.5점이다. A, B 두 분단의 사람 수의 비를 구하여라.

실제로 문제를 풀어 보기에 앞서 주어진 문제를 대체적으로 파악하는 과정은 문제해결의 초기 단계에서 주어진 문제를 전체적으로 볼 수 있는 안목을 훈련하게 되는 좋은 기회가 된다.

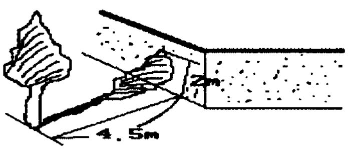
[4] ① 직사각형 모양의 밭이 있다. 영철이가

이 밭의 주위를 걸었더니 440보이었다. 가로의 길이가 세로의 길이보다 20보 더 많았다. 영철이의 걸음의 폭이 80cm 이면 이 밭의 넓이는 몇 m^2 가 되는가?

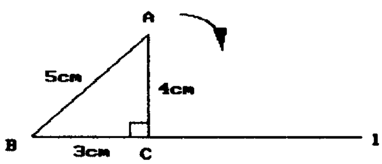
② 지름이 20cm, 높이가 24cm 인 원기둥 모양의 통에 물이 가득 들어 있다. 이 통을 그림과 같이 수평면과 45도의 각을 이루게 기울였을 경우 남은 물의 양을 구하여라.

③ <그림 4>와 같이 벽에서 4.5m 떨어진 곳에 나무가 한 그루 서있다. 나무 그림자가 그림과 같이 벽에 드리워져 있을 때 길이가 1m 인 나무의 그림자 길이는 1.2m 이었다. 그림의 나무의 높이는 얼마인가?

④ <그림 6>에서 삼각형 ABC가 직선 위를 한 바퀴 회전하였을 때 점 B가 움직인 거리를 구하여라. 원주율은 3으로계산하여라.



<그림 5>



<그림 6>

#1. 위의 문제들 중에서 그 문제를 풀기 위해서 필요한 수학의 내용에 대하여 이미 배운 것으로 생각되는 문제를 골라라.

#2. 위의 각 문제들이 해당되는 수학교과서의 단원명을 말하여라.

#3. 위의 문제들 중에서 그 문제를 풀기 위해서 필요한 수학의 내용이나 방법 등에 대하여 현재 완전히 알고 있다고 생각되는 문제를 골라라.

#4. 위의 문제들을 실제로 풀어볼 때 가장 어렵다고 생각되는 문제의 번호부터 쉽다고 생각되는 번호까지 배열해 보아라. 그리고 어렵게 생각되는 이유가 있으면 말하여라.

#5. 위의 문제들을 직접 풀어 본다면 어떤 문제를 맞출 수 있는지 말하여라. 위의 문제를 직접 풀어 보아라.

위의 다섯 개 문항들은 모두 주어진 문제를 직접 풀어 보지 않은 상태에서도 각 문제들에 대하여 문제해결자 자신이 소유하고 있는 문제해결과 관련된 요소들을 다양하게 회상, 검토, 평가 등을 해보게 함으로써 메타수준에서의 문제해결의 제 요소에 대한 관리의 기능을 자극 훈련케 하며, 넓게는 자신의 수학 학습 전반에 대한 메타수준에서의 조직화, 체계화 등의 관리를 유도한다고 할 수 있다. 이와 같이 문제해결 전반에 대한 관리의 능력은 기존의 문제해결 행위를 효과적으로 처리, 정리케하여 앞으로의 새로운 문제해결에 성공적으로 임할 수 있게 하는 역할을 담당한다고 할 수 있다.

[5] ① 어떤 자연수의 5배에서 7을 뺀 수는 그 자연수의 2배보다 크다고 한다. 이러한 자연수 중 가장 작은 것을 구하여라.

② A 지점에서 40km 떨어진 B 지점까지 가는데, 처음에는 3km/시로 걸어서 가다가 도중에 30km/시로 차를 타고 가려고 한다. 전체 걸린 시간을 2시간 32분으로 하려면 몇 km를 걸어서 가야 하는가?

③ 80원 짜리 우표와 110원 짜리 우표를 합하여 10장을 사고 그 값은 1000원 이하가 되게 하려고 한다. 가능한 한 110원짜리 우표를 많이 사려고 한다면 몇 장까지 살 수 있는가?

④ 강당의 긴 의자에 학생들이 앉는데 한 의자에 4명씩 앉으면 12명이 남고, 5명씩 앉으면 7개의 의자가 남는다고 한다. 의자의 개수가 가장 많은 경우는 몇 개인가?

#1. 위의 각 문제를 풀기 위해서 식을 세우면 한 문제는 나머지 세 문제와는 다른 종류의 식으로 풀게 된다. 그 문제는 어느 것인가?

#2. # 1 에서 같은 종류의 식을 만들어 풀게 되는 세 문제 중 한 문제는 나머지 두 문제와 서로 다른 종류로 구분되는 문제이다. 그 문제는 어느 것인가? 그 문제가 나머지 두 문제들과 같은 종류의 문제가 되게 하기 위해서는 문제를 어떻게바꾸면 되겠는가?

[6] 다음의 풀이 과정은 어떤 문제의 바른 풀이 과정이다. 이를 보고 그 문제를 만들어 보아라.

$y = x^2 + 2tx + 4t = (x + 1)^2 - t^2 + 4t$

꼭지점의 좌표는 $(-t, -t^2 + 4t)$

$x = -t, y = -t^2 + 4t$

즉, $y = -x^2 - 4x$

그런데 $t \geq 0$ 이므로 $x \leq 0$.

따라서 구하는 것은 $y = -x^2 - 4x$ $(x \leq 0)$이를 그래프로 나타내면

[7] 다음 문제의 풀이 과정에서 빠뜨린 과정을 찾아 내어 그 위치를 표시하고 적어 보아라.

문제: 점 P(a, b) 가 직선 $y = 2x$ 위를 움직일 때 점 (a+b, ab)는 어떤 자취를 그리게 되는가?

풀이: (a, b) 는 $y = 2x$ 위에 있으므로

$b = 2a.a + b = x, ab = y$ 라 하면

$x = 3a, y = 2a^2$

즉, a 를 소거하면 $y = 2/9\ x^2$

따라서 구하는 자취는 $y = 2/9\ x^2$ 이다.

[8] 다음 문제의 풀이 과정에서 빠뜨린 과정이 있다. 이를 찾아서 적당한 장소에 써 넣어라.

문제: t 가 변할 때 $y = x^2 + 2x \cos t + 1$ 의 꼭지점의 자취를 구하여라.

풀이: $x^2 + 2x \cos t + 1$

$= (x^2 + 2x \cos t + \cos^2 t) + 1 - \cos^2 t$

$= (x + \cos t)^2 + 1 - \cos^2 t$

즉, $x = -\cos t,\ y = 1 - \cos^2 t$

따라서 구하는 자취는 $y = 1 - x^2$

[9] 강당의 긴 의자에 학생들이 앉으려고 한다. 한 의자에 4 명씩 앉으면 12명이 남고, 5 명씩 앉으면 7 개의 의자가 남는다고 한다. 의자의 개수가 가장 많은 경우는 모두 몇 개인가?

#1. 위 문제를 어떤 학생이 다음과 같이 풀었다. 각 풀이 과정은 어디부터 틀렸는지 알아 보고 두 풀이 방법 중 어느 것이 더 좋다고 생각하는가? 그 이유를말하여라.

풀이 1: 의자 = x 라고 하면,

학생수 = $4x + 12$ 또는 $(x - 7) \times 5$

따라서 $4x + 12 = (x - 7) \times 5$ 이므로

$4x + 12 = 5x - 35$

$4x - 5x = -35 - 12$

$-x = -23$ 즉, $x = 23$

풀이 2: 학생수 = x, 의자수 = y 라고 하면

$x = 4y + 12,$

$5(y - 8) \leq 4x + 12 \leq 5(y - 7)$

$5(y - 8) \leq 4y + 12 \leq 5y - 35$

$y \leq 52,\ 47 \leq y$

즉, $47 \leq y \leq 52$

[10] 포물선 $y = x^2 + ax + b$ 는 점 (2, -1)을 지나고, $y = x^2 + px + q$ 는 점(2, 15) 를 지난다. 두 포물선이 y 축에 대하여 대칭일 때, a, b, p, q 를 구하여라.

#1. 다음은 위 문제의 풀이 과정을 순서 없이

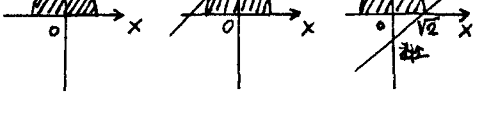
#1. 다음은 위 문제의 풀이 과정을 순서 없이 나열한 것이다. 이 중에 미지수 a, b, p, q 를 구하기 위해서 직접적으로 필요한 과정을 골라라. 그리고 위 문제의 해결 과정에 적합하도록 배열하여라.

① y 축에 대하여 대칭이므로
$-a/2 = -(-p/2) \therefore p = -a$
② 점 (2, 15) 를 지나므로 $2p + q = 11$
③ $y = (x + p/2)^2 - (p^2 - 4q)/4$
④ $a^2 - 4b = p^2 - 4q$ 에서 $q = b$
⑤ 점 (2, -1) 을 지나므로 $2a + b = -5$
⑥ $y = (x + q/2)^2 - (a^2 - 4b)/4$
⑦ p, q 를 식 ( ) 에 대입하면
$-2a + b = 11$
⑧ 두 식 ( ), ( ) 을 연립하여 풀면
$a = -4, b = 3$
⑨ ( ) 를 이용하여 풀면 $p = 4, q = 3$
⑩ $a = -4, b = 3, p = 4, q = 3$

#2. 위의 풀이 과정들을 다음과 같이 세 개의 그룹으로 나누어 볼 수 있다. 다음의 ② 에 적합한 것을 써 넣어라. 그리고 각 그룹에 속하는 해결 과정의 번호를 각각 적어라.

① 두 포물선의 꼭지점의 좌표를 구한다.
② (   )
③ 만들어진 4 개의 식으로 부터 4 개의 미지수를 각각 구한다.

[11] 다음 <그림 7>은 어떤 문제를 풀기 위하여 필요한 그래프를 순서에 따라 그려 놓은 것이다. 이 그림을 보고 그 문제를 만들어라.



<그림 7>

문제: 두 부등식 (   ), (   ) 을 동시에 만족하는 ( ),( ) 의 값에 대하여 (   ) 의 최대, 최소의 값을 구하여라.

III. 결 언

수학 문제해결력을 훈련시키거나 평가하기 위하여 사용해온 기존의 방법들은 훈련과 평가의 양면에서 모두 종합적이고 일체적인 성격을 갖고 있다. 문제해결력은 인간의 지적 능력 중 고급의 종합된 기능성을 갖는 능력임을 부인할 수 없다. 그러나 이를 훈련시키거나 평가하는데 있어서 종합적인 방식을 취할 때 문제해결의 훈련시 학습자의 입장에서는 어려움을, 가르치는 입장에서는 비능률을 느낄 것으로 생각 된다. 뿐만 아니라 문제해결력을 평가할 때도 종합적이고 일체적인 방법의 사용은 측정과 평가에 있어서 수량화나 객관화의 어려움이 따르므로 평가 도구로서의 신뢰성을 상실하게 된다. 이와 같은 문제점을 보완하기 위하여 문제해결력의 지도와 평가에 있어서 종합적이고 일체적인 성격을 피하고 분석적이고 분자론적인 방법을 택하는 것이 보다 효과적이라고 생각한다. 즉, 수학 문제의 해결 과정에서 추출할 수 있는 일반적인 문제해결력을 여러 개의 부분적인 문제해결의 능력으로 세분하여, 각 부분적인 문제해결 능력의 훈련, 평가를 가능케 하는 문제를 고안해서 보다 분명하고 단순화된 작업이 되게 함으로써, 문제해결력의 훈련에서는 집약적이고 직접적인 효과를 얻을 수 있고, 평가에 있어서는 보다 객관적이고 과학적인 방법이 되는 효과를 거둘 수 있다고 생각한다.

그러나 이와 같은 방식의 문제해결 훈련과 평가에 있어서의 관건이 되는 것은 그 매체인 문제의 개발에 있다. 이와 같은 조건을 충족시킬 수 있는 문제는 앞 장에서 제시한 바와 같이 세분된 문제해결의 부분적인 능력의 개입을 분명하게 조장하는 상황에 문제해결자가 이르도록 하는 문제가 된다. 즉, 문제해결력의 지도

와 평가에서 목적하는 부분적인 문제의 해결력이 개입될 수 밖에 없는 상황까지의 문제해결의 과정과 정보을 제시하고, 그 상황에서 문제해결자로 하여금 현재 요구되는 부분적인 문제해결력이나 기능만을 보여 주도록 요구하는 방식의 문제 개발이다. 물론 이러한 문제는 기존의 문제와는 외형상이나 내용면에서 여러가지로 다른 새로운 모습을 취하게 된다. 그러나 이러한 문제를 통한 문제해결력의 지도 - 또는 스스로의 문제해결력 학습 - 를 함으로써 목적하는 부분적인 문제해결력을 집약적이고 직접적으로 경험, 학습케 할 수 있으며, 또한 평가하고자 하는 부분적인 문제해결력을 문제해결자가 소지하고 있는가의 여부를 분명하게 노출시킬 수 있게 된다. 물론 이와 같은 방법이 갖는 문제점은 문제해결의 과정이 일련의 유기적으로 연결된 지적 행위이며, 따라서 문제해결력은 종합적이며 구성적인 성향을 갖고 있다는 점에 기인할 수 있다. 그러나 우선 분자적으로 문제해결의 훈련, 평가가 이루어진 후 다시금 이를 종합적으로 훈련, 평가하는 작업이 연결되면 이러한 문제점도 어느 정도는 해결될 수 있을 것으로 생각한다. 또한 이와 같은 방식의 문제 개발은 기존의 수학 교과서나 참고서의 문제를 앞 장에서 제시된 유형으로 변형하여 다양한 구성이 가능하므로 한편으로는 학교 수학에서 문제해결을 자연스럽게 수용하는 방법이 되며, 또 한편으로는 문제해결을 학교 수학교육의 과정이며 목적으로서 흡수 융화가 가능케 할 수 있을 것으로 생각한다.

앞서 언급한 방식을 통한 부분적인 문제해결력의 훈련과 평가는 일련의 문제해결 과정에서 볼 때, 각 episode 가 연결되는 부분에서 요구하는 메타인지적인 문제해결력과 전체적인 문제해결을 통제, 유도, 조절, 관리하는 등의 메타수준의 문제해결 기능의 훈련과 평가의 신뢰성 있는 방법이 된다고 할 수 있다.

참 고 문 헌

Krulik S. and R.E. Reys(Eds.). (1980). Problem Solving in School Mathematics. N.C.T.M.

Lester, F. (1977). Ideas about Problem Solving: A Look at Some Psychological Research. Arithmetic Teacher 25 (November). 12-15.

Leater, F. (1980). Research on Mathematical Problem Solving. In R.J. Shumway (Ed.), Research in Mathematics Education.

Schoenfeld, A.H. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, Inc.