韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1994. 6. 제 33권 제 1호 91-97

Tensor에 의한 곡률 계산

황 철 주 (부산여대)

1. 서언

n 차원 구 S^n의 곡률이 상수인 것은 잘 알려져 있고 그 계산방법도 여러가지가 있다. 가장 우아한 방법중 하나는 측지선을 이용하는 방법이다. (참고 문헌 [1], 59p) 여기서는 가장 계산적인 방법으로 구해보자.

대개 기하학적 사실이 $\left\{ \begin{matrix} h \\ i \quad j \end{matrix} \right\}$ 나 R^i_{jkl} 등의 그늘에서 숨겨지는 경우가 많았다.

또 결과는 제시되지만 계산과정은 비밀에 부쳐져서 저자의 비법등으로 사장되거나 특별한 저서에서만 모습을 드러내기도 하는 경우도 많았다.

실제로 Tensor 계산으로 간단한 예를 처리하지 못하면 기하는 언제나 공허한 느낌을 지울 수 없다. 공식의 계산이 번잡해서 실제로 처리가 잘 안되는 경우도 수없이 많았다. 또한 방대한 수식을 처리할 엄두가 나지 않는다.

이런 저런 이유로 순수한 계산을 투고해 보았다. 아직 더 정제될 수 있지만 중요한 계산 아이디어는 추측할 수 있으리라 본다.

새로운 것은 아니지만 필자는 이런 계산을 본 적이 없다. 방법상의 비교로 해보고 싶은 것이 필자의 바램이다.

2. 내용

R^{n+1} 내의 반경 a인 구면

$$S^n(a) = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in R^{n+1} | (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = a^2\}$$

을 생각하자. $S^n(a)$의 개집합 $U = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in S^n(a) | x_{n+1} > 0\}$ 내의 점 $(x^1, \cdots, x^{n+1})$에 대하여 $(x^1, \cdots, x^n)$을 대응시켜 U내의 국소좌표계

$\{x^1, \cdots, x^n\}$을 도입한다. 이때, $(x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = a^2$에서

$$(dx^{n+1})^2 = \frac{(x^1dx^1 + \cdots + x^n dx^n)^2}{a^2 - [(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2]}$$

이므로, $S^n(a)$의 선소는 다음과 같다.

$$dS^2 = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 + \frac{(x^1dx^1 + \cdots + x^n dx^n)^2}{a^2 - [(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2]}$$

따라서 $S^n(a)$의 Riemann 계량 g 성분은

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{(x^i x^j)}{a^2 - [(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2]} \\ g^{ij} &= \delta_{ij} - \frac{(x^i x^j)}{a^2} \quad (i, j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

이다. 이하 기호는 참고 문헌 [2] 를 따른다.

정 리) $R_{hijk} = \frac{1}{a^2}(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}$ 이므로 $S^n(a)$는 $K = 1/a^2$ 인 정곡률공간이다.

증 명)

$$\left\{ \begin{matrix} & h & \\ i & & j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\sum_k g^{hk}(g_{jk,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k})$$

$$\begin{aligned} g_{ij,k} &= \frac{(x^i x^j)_k x_{n+1}^2 - (-2x^k)x^i x^j}{(x_{n+1}{}^2)} g_{ij} \\ &= \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{x_{n+1}{}^2} \\ &= \frac{(x^i x^j)_k}{x_{n+1}{}^2} + \frac{2x_k x_i x_j}{(x_{n+1}{}^2)^2} \\ &= \frac{\delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i}{x_{n+1}{}^2} + \frac{2x_k}{x_{n+1}{}^2}(g_{ij}\delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}{}^2}\{(\delta_{ik}x_j - \delta_{jk}x_i - \delta_{ij}x_k) + 2x_k g_{ij}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} &= \frac{1}{{x_{n+1}}^2}\{(\delta_{ji}x^k + \delta_{ki}x^j - \delta_{jk}x^i) + 2x^i g_{jk}\} \\
\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} &= \frac{1}{{x_{n+1}}^2}\{(\delta_{ij}x^k + \delta_{kj}x^i - \delta_{ik}x^j) + 2x^j g_{ik}\} \\
-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \frac{1}{{x_{n+1}}^2}\{(-\delta_{ik}x^j + \delta_{jk}x^i - \delta_{ij}x^k) + 2x^k g_{ij}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{ij,k} &= \frac{\delta_{ik}x^j + \delta_{jk}x^i}{{x_{n+1}}^2} + \frac{2x_i x_j x_k}{({x_{n+1}}^2)^2} && (1) \\
g_{ik,j} &= \frac{\delta_{ij}x^k + \delta_{kj}x^i}{{x_{n+1}}^2} + \frac{2x_i x_j x_k}{({x_{n+1}}^2)^2} && (2) \\
g_{jk,i} &= \frac{\delta_{ij}x^k + \delta_{ki}x^j}{{x_{n+1}}^2} + \frac{2x_i x_j x_k}{({x_{n+1}}^2)^2} && (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)+(3)-(1) &= 2\frac{\delta_{ij}x^k}{{x_{n+1}}^2} + 2\frac{x_i x_j x_k}{({x_{n+1}}^2)^2} \\
&= \frac{2x^k}{{x_{n+1}}^2}(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{{x_{n+1}}^2}) \\
&= \frac{2x^k}{{x_{n+1}}^2} g_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} & h & \\ i & & j \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2}\sum_k g^{hk}\frac{2x^k}{{x_{n+1}}^2} g_{ij} = g_{ij}\sum_k g^{hk}\frac{x^k}{{x_{n+1}}^2} \\
&= g_{ij}\sum_k(\delta_{hk} - \frac{x^h x^k}{a^2})\frac{x^k}{(x_{n+1})^2} \\
&= g_{ij}(\frac{x^k}{(x_{n+1})^2} - \frac{1}{a^2}x_k\frac{\sum^n x_k^2}{{x_{n+1}}^2}) \\
&= g_{ij}(\frac{x^k}{(x_{n+1})^2} - \frac{x^k}{a^2}\frac{a^2 - {x_{n+1}}^2}{{x_{n+1}}^2})
\end{aligned}$$

$$= \quad g_{ij}\frac{x^k(a^2 - a^2 + x_{n+1}{}^2)}{a^2 x_{n+1}{}^2}$$

$$= \quad g_{ij}\frac{x^k}{a^2}$$

$$R_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix} & h & \\ i & & k\end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{pmatrix} & h & \\ i & & j\end{pmatrix}$$

$$+\sum\{\begin{pmatrix} & h & \\ j & & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & t & \\ i & & h\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} & h & \\ k & & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & t & \\ i & & j\end{pmatrix}\}$$

$$= \frac{1}{a^2}\{\frac{\partial}{\partial x_j}(x^h g_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(x^h g_{ij})\}$$

$$+\sum_t \frac{1}{a^4}\{(x^k g_{jt})(x^t g_{ik} - x^h g_{kt})(x^t g_{ij})\}$$

$$= \frac{1}{a^2}\{\delta_{jh}g_{ik} + x^k\frac{\partial}{\partial x_j}(g_{ik}) - \delta_{kh}g_{ij} - x^k\frac{\partial}{\partial x_k}(g_{ij})\}$$

$$+\frac{1}{a^4}\sum_t\{(x^k g_{ik})(x^t g_{jk} - x^h g_{ij})(x^t g_{kt})\}$$

$$= \frac{1}{a^2}(\delta_{jh}g_{ik} - \delta_{kh}g_{ij}) + \frac{1}{a^2}x^h(\frac{\partial}{\partial x_j}(g_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(g_{ij}))$$

$$+ \frac{1}{a^4}x^h\sum_t(g_{ik}x^t g_{jk} - g_{ij}x^t g_{kt})$$

$$\diamond \mathrm{A} = \frac{1}{a^2}x^h\frac{1}{x_{n+1}^2}(\delta_{ij}x^k - \delta_{ik}x^j)$$

$$\diamond \mathrm{B} = \frac{1}{a^4}x^k\{g_{ik}\sum_t x^t(\delta_{jt} + \frac{(x_j x_t)}{x_{n+1}^2}) - g_{ij}\sum_t x^t(\delta_{kt} + \frac{x_k x_t}{x_{n+1}^2})\}$$

$$= \frac{1}{a^4}x^k\{(g_{ik}x^j - g_{ij}x^k) + (g_{ik}\sum_t\frac{x_j x_t^2}{x_{n+1}^2} - g_{ij}\sum_t\frac{x_k x_t^2}{x_{n+1}^2})\}$$

$$= \frac{1}{a^4}x^k\{(\delta_{ik}x^j + \frac{x_i x_j x_k}{x_{n+1}^2} - \delta_{ij}x_k + \frac{x_i x_j x_k}{x_{n+1}^2})$$

$$
\begin{aligned}
&+(g_{ik}\frac{x_j(a^2-x_{n+1}^2)}{x_{n+1}^2} - g_{ij}\frac{x_k(a^2-x_{n+1}^2)}{x_{n+1}^2})\} \\
= & \frac{1}{a^4}x^h(g_{ik}x_j - g_{ij}x_k)\frac{a^2}{x_{n+1}^2} = \frac{g_{ik}x_j - g_{ij}x_k}{a^2x_{n+1}^2}x_h \\
= & \frac{x^k}{a^2x_{n+1}^2}(\delta_{ik}x_j - \delta_{ij}x_k) = -\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Therefore $R_{ijk} = \frac{1}{a^2}(\delta_{jh}g_{ik} - \delta_{kt}g_{ij})$

$$
\begin{aligned}
R_{hijk} &= \sum R_{ijk}g_{th} \\
&= \frac{1}{a^2}\sum_t(\delta_{jt}g_{ik} - \delta_{kt}g_{ij})g_{th} \\
&= \frac{1}{a^2}\sum_t(g_{ik}g_{jh} - g_{ij}g_{kh})
\end{aligned}
$$

쌍곡공간 H^n의 곡률방정식은 구조방정식을 이용하여 계산(참고 문헌[6], 400p) 할 수 있으나 tensor계산으로 구해본다.

정 리) R^n의 반공간

$$
\begin{aligned}
H^n &= \{(x^1,\cdots,x^n) \;\; x^n > 0\} \\
dS^2 &= \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2}{(x^n)^2}
\end{aligned}
$$

으로 정의하면, H^n은 Riemann다양체이다. 이때, 곡률 tensor는 $R_{hijk} = -(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})$ 이다. 따라서 H^n은 음의 곡률 -1을 갖는 정곡률공간이다.

증 명)

$$
g_{ij} = \frac{1}{x_n^2}\delta_{ij}, \;\; g_{ik,k}\frac{-2}{x_n^2}\delta_{nk}\delta_{ij}, \;\; g^{ka} = x_n^2\delta_{ka}
$$

$$
(ijk) = \frac{1}{2}(g_{jk,i} + g_{ki,j} + g_{ij,k})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x_n^3}(-\delta_{ni}\delta_{jk} - \delta_{nj}\delta_{ki} + \delta_{ij}\delta_{nk}) \\
(ijkl) &= 3\frac{1}{x_n^4}\delta_{nl}(\delta_{ni}\delta_{jk} + \delta_{nj}\delta_{ki} - \delta_{ij}\delta_{nk}) \\
(ilk,j) &= 3\frac{1}{x_n^4}\delta_{nj}(\delta_{ni}\delta_{lk} + \delta_{nl}\delta ki - \delta_{il}\delta_{nl}) \\
\begin{pmatrix} & k & \\ i & & j \end{pmatrix} &= \frac{1}{x_n}\delta_{ka}(-\delta_{ni}\delta_{ja} - \delta_{nj}\delta_{ai} + \delta_{ij}\delta_{na} \\
&= \frac{1}{x_n}(-\delta_{ni}\delta_{jk} - \delta_{nj}\delta_{ki} + \delta_{ij}\delta_{nk} \\
(jli,k) &= 3\frac{1}{x_n^4}\delta_{nk}(-\delta_{nj}\delta_{li} - \delta_{nl}\delta_{ij} + \delta_{jl}\delta_{ni} \\
(ilr) &= \frac{1}{x_n^3}(-\delta_{ni}\delta_{lr} - \delta_{nl}\delta_{ri} + \delta_{il}\delta_{nr}) \\
\begin{pmatrix} & r & \\ j & & k \end{pmatrix} &= \frac{1}{x_n}(-\delta_{nj}\delta_{kr} - \delta_{nk}\delta_{rj} + \delta_{jk}\delta_{nr} \\
(ilr)\begin{pmatrix} & r & \\ j & & k \end{pmatrix} &= \frac{1}{x_n^4}(\delta_{ni}\delta_{nj}\delta_{lk} + \delta_{ni}\delta_{nk}\delta_{lj} - \delta_{ni}\delta_{jk}\delta_{nl} \\
&\quad +\delta_{nl}\delta_{nj}\delta_{ki} + \delta_{nl}\delta_{nk}\delta_{ij} - \delta_{nl}\delta_{jk}\delta_{ni} \\
&\quad -\delta_{il}\delta_{nj}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{nk}\delta_{nj} - \delta_{il}\delta_{jk}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \Gamma_{jli}}{\partial x_k} = (jli,k) = \frac{3}{x_n}\delta_{nk}(\delta_{nj}\delta_{li} + \delta_{nl}\delta_{ij} - \delta_{jl}\delta_{ni})
$$

$(ilr)\begin{pmatrix} & r & \\ j & & k \end{pmatrix}$ 의 항중에서 l, k 에 대칭인 항을 빼면

$$
= \frac{1}{x_n^4}(\delta_{ni}\delta_{nk}\delta_{ij} - 2\delta_{ni}\delta_{jk}\delta_{ni} + \delta_{nl}\delta_{nj}\delta_{ki} - 2\delta_{il}\delta_{nj}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{jk})
$$

또한 같이해서

$$
\begin{aligned}
(jlik) &= \frac{3}{{x_n}^4}\delta_{nk}(\delta_{nj}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ni}) \\
R_{ijkl} &= \frac{1}{{x_n}^4}(3\delta_{nk}\delta_{nj}\delta_{il} - 3\delta_{nk}\delta_{jl}\delta_{ni} - 3\delta_{nl}\delta_{nj}\delta_{ik} + 3\delta_{nl}\delta_{jk}\delta_{ni}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\delta_{ni}\delta_{nk}\delta_{lj} - 2\delta_{ni}\delta_{jk}\delta_{ni} + \delta_{nl}\delta_{nj}\delta_{ki} - 2\delta_{il}\delta_{nj}\delta_{kn} \\
& +\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ni}\delta_{nl}\delta_{kj} + 2\delta_{ni}\delta_{jl}\delta_{nk} - \delta_{nk}\delta_{nj}\delta_{li} \\
& +2\delta_{ik}\delta_{nj}\delta_{ln} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \\
= \ & \frac{1}{{x_n}^4}(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \\
= \ & (-1)(g_{ki}g_{jl} - g_{ki}g_{jl})
\end{aligned}
$$

참고서적

1. 지 동 표, 국소적 형태의 Atiyah-Singer 지표이론, 민음사, 1983
2. 박 을 용, 리이만 기하학, 민음사, 1987.
3. 엄 상 섭, 리이만 기하학, 수학사, 1982.
4. Martin M.Lipschutz, Differential Geometry, Mcgraw-Hill
5. David C.Kay, Tensor Calcular, McGRAW-HILL,INC., 1988.
6. Willam M.Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, 1975.