韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1994. 6. 제 33권 제 1호 83-89

로렌즈 공간에서의 칼레만 부등식과 강유일성 정리 [1]

김 연 미 (홍익대)

1. 서론

유클리드 공간 R^n 에서 작용하는 Laplace operator $\Delta = -\partial^2/\partial x_j{}^2$ 와 R^n 의 연결된 열린 부분 집합 Ω에서 작용하는 함수 $V(x)$ 를 생각해보 자. 다음의 부등식

$$|\Delta u(x)| \leq |V(x)u(x)|,\ x \in \Omega \tag{1.1}$$

이 Sobolev 공간 $H^{2,q}(\Omega)$ 에서 유일확장성 (Unique Continuation Property) 를 가지 고 있다고함은, 거의 모든 곳에서 (1.1)을만족하는 $u \in H^{2,q}(\Omega)$ 가 공집합이 아닌 Ω 의 열 린 부분집합에서 0이 되면 u 가 Ω 에서 항등적으로 0 이 될 때를 의미한다. 또, 어 떤 점 $x_0 \in \Omega$가 존재하여 u 가 x_0 에서 무한서열로 사라질 때, (1.1) 을 만족하는 $u \in H^{2,q}(\Omega)$ 가 Ω 에서 항등 적으로 0이 될 때 위의 부등식은 강유일 확장성(Strong Unique Continuation Property) 를 갖는다고 말한다.

우리는 본 연구에서 Carleman 부등식을 통하여 슈뢰딩거 방정식에 대한 강유일성 정리를 확 립하고자한다. 즉 U 는 유클리드 공간 R^n 의 연결된 열린 부분집합이고, u 를 다음 미 분 방정식 $(\Delta + \sum a_j\partial/\partial x_j + b)\ u = 0$ 의 해라고 가정하자. 이 때 적당한 r 과 s 에 대하여 $a_j \in L^{r,\infty}(loc, R^n)$, $b_j \in L^{s,\infty}(loc, R^n)$ 이다. 만일 u 가 한 점(one point) 에서 무한서열로 사라지면, 이 때 u 는 개집합(open set) U 상에서 항등적으로 0 이 된다.

이것이 강유일확장성(Strong Unique Continuation Property)를 가지고 있다고 불리는 것은, 한 점에서의 운동양태가 이웃에서의 운동 양태를 결정하기 때문이다.

이러한 방향의 작업의 첫 번째 결과는 1939년 T. Carleman [3] 의 연구에서 찾아볼 수 있다. 그 는 $V(x)$ 가 $L^\infty(loc, R^2)$ 일 때 R^2 에서 작용하는 연산자 $P(x, D) = \Delta + V(x)$ 이 (s.u.c.p)를 가지고 있음을 보였다. 이 결과를 증명하기 위하여, 그는 소위 Carleman estimate 라 불리는 방법을 도입하였고 이는 후의 뒤따르는 대부분의 작업에서도 유사 연관된 형태로 나타난다. 이러한 맥 락

[1] 본 논문은 94년도 홍익대학교 교내연구비 지원으로 수행되었음

에서 그의 estimate 를 대충 소개하면 다음의 부등식을 증명하는 것이다. : 임의의 함수 $f \in C^\infty(U)$ 와 Ω 상의 열린집합 U, 그리고 적절한 무게함수(weight function) φ 에 대하여

$$||exp(t\varphi)f||_{L^2(U)} \leq C||exp(t\varphi)\Delta f||_{L^2(U)}$$

이 성립한다. 이 때 상수 C 는 t에 독립적이고, t는 ∞로 수렴하는 모든 실수 급수 를 취할 수 있다.
본 연구의 주된 기여는 Hormander[3] , Jerison[4] 등에 의해 증명된 유일성 정리 (Unique Continuation Theorem) 를 개선하는 데 있다고 하겠다. 그 들은 solution u 가 한 점에서보 다는 열린집합에서 사라진다고 가정하였다. 그러므로 많은 수학자들이 원점에서 사라지는 경우로 관심의 방향을 집중시켜왔다.

2. 본론

한편 이러한 질문이 흥미를 끄는 이유는 수리물리에서 찾을 수있다. 예를 들어 Hilbert space $L^2(R^n)$ 에서 작용하는 self-adjoint operater인 슈뢰딩거 연산자 $H = -\Delta + V(x)$ 를 생각해보자. 여기서 $H_0 = -\Delta$ 는 운동에너지 (kinetic energy) 이고, $V(x)$ 는 위치에너지 (potential energy) 이다. $V(x)$ 는 반드시 연속이거나 부분적으로 유계 (locally bounded) 일 필요도 없다.
H의 spectrum은 고유치(eigenvalue)로 구성된 점(point) spectrum A_p와 고유벡터에 수직인 것들과 관련있는 연속(continuous) spectrum A_{cont}으 로 나누어 진다. One-body physics 에서, 위치에너지 V 는 ∞에서 0 으로 수렴한다. 일반적으로

$$A_{cont} = [0, \infty), A_p \cap A_{cont} = \{0\}$$

이 물리영역 에서 기대되어 진다. 이러한 spectrum의 분해와 양자물리와의 관계는, A_p는 속박상태(bound state)의 에너지를 구성하며, A_{cont}와 연관된 부분공간은 산란 (scattering)에 관계하는 역학상태로 구성된다.
우리가 물리영역에서 $A_p \cap A_{cont} = \{0\}$ 이 되기를 기대하는 이유는, 만일 potential V가 ∞ 에서 0으로 수렴하고 입자 에너지가 양일 때, 양자파동 (qualtum fluctuation)은 궁극적으로 입자의 운동이 속박 되지않는 곳으로 입자를 운반하고 이는 물론 속박상태를 크게 만들어서, $L^2(R^n)$ 에 속 하 지 못하게한다. 1929년 von Neumann과 Wigner[11]는 ∞ 에서 0 으로 수렴하나 양의 고 유치를 갖는 1차원 포텐셜 $V(x)$의 예를 만들었다. 그러므로 어떤 포텐셜에 대하여 양의 포텐셜이 존재하지 않는가를 결정하는 것은 어려운 문제라고 하겠다.

이차원 이상에서 양의 포텐셜을 제거하는 문제는 T.Kato [6], S.Agmon [1], B.Simon [7]등 에 의하여 발전되었다.
Simon [7], Amrien et al. [2], Jerison [4] 등이 사용한 것은 다음과 같은 형태의 Carleman type 부등식이다 :

정 리 1. $n \geq 3$, $p = 2n/(n+2)$이고 $q = 2n/(n-2)$ (즉, $1/p+1/q = 1$ 이고 $1/p-1/q = 2n$). 또 $t \in R\backslash Z$. 이 때 $min|t-k|$ $(k \in Z)$에만 의존하는 상수 C 와 상수 n이 존재하여 모든 함수 $f \in C_{0\infty}(R^n verb|||\{0\})$에 대하여 다음 부등식이 성립한다. $|||x|^{-t}f||_{L^p}(R^n, dx/|x|^n) \leq C|||x|^{-t+2}\Delta f||_{L^p}(R^n, dx/|x|^n)$.
우리가 위의 식을 $1/p = 1/q - 1/w$ 일 때, ∞ 로 수렴하는 t 와 함수 f 에 독립인 상수 C 에 대하여 증명할 수 있으면, $V \in L^w(U)$ 와 $u \in H^{2,q}(U)$ 에 대하여 증명할 수 있 다. 즉 다음의 정리가 성립한다.

따름정리 1. (Jerison[4]) U 는 연결된, R^n $(n \geq 3)$의 부분 개집합으로 0을 포함한다. 만일 $V \in L^{n/2}(U, dx)$이고 $\Delta u \in L^p(U, dx)$, U 상에서 $(\Delta + V)u = 0$, 또 $B = \{x|x < \varepsilon\}$ 이라 하자. 모든 N에 대하여 적분 $\int_B |u(x)|^2\, dx = O(\varepsilon)$ 상에서 $u \equiv 0$ 이다.
한편 저자[12] 에 의해서 다음 형태의 미분 방정식에 대한 강유일성 정리가 증명되었다.

따름정리 2. U 는 $0 \in U \subset R^n$인 열린집합이고, $u \in H^{2,p}(loc, U)$, $p = (6n-4)/(3n-2)$ 이다. 이때 u는 다음의 방정식 $(\Delta + \sum a_j \partial/\partial x_j + b)\, u = 0$ 을 만족한다. 이 때 $a_j \in L^r(loc, R^n)$, 이고 $b_j \in L^s(loc, R^n)$, 또 $r = (3n-2)/2$, $S > n/2$ 를 만족한다. 만일 모든 N에 대하여 $B = \{x \mid |x| < \varepsilon\}$일 때 $\int_B |u(x)|^2\, dx = O(\varepsilon^N)$을 만족하면, U 상에서 $n \equiv 0$이다.

위의 정리를 증명하기위하여 필요로 되는 Carleman 부등식은 다음과 같다:
모든 함수 $f \in C_\infty(U\backslash\{0\})$ 와 Ω상의 열린 개집합 U, 적절한 무게 함수 φ, (이 때 φ는 방사함수(radial function)이고 방사적으로 감소) 에 대하여 다음 부등식 $||exp(t\ \varphi)\nabla f||_{L^2(U\backslash 0)} \leq C||exp(t\ \varphi)\Delta f||d_{L^p(U\backslash 0)}$ 이 성립한다. 이 때, $1/p - 1/2 = 2/(3n-2)$ 이고, 상수 C는 t에 독립이고 t는 ∞로 수렴하는 실수들이다.

위의 부등식을 증명하기 위하여 우리는 조화 해석학 (Harmonic Analysis)의 다양한 테크닉 을 이용한다. 즉 Fourier 적분 연산자 이론의 미분연산자 이론 (Pseudodifferential Operator Theories) 등이 활용되며, Jerison[4] 에 의해

개발된 $\Omega = d/dy - y$ 형태의 연산자의 좌 역연산자 (Left Inverse Operator) 를 구하고 또, 이 역 연산자의 심볼 측정 (Symbol Estimate) 도 구해야한다. 즉, $B\Omega = I$, $B(exp(-y/2)) = 0$을 만족하는 연산자 B가 R상에서 유일하게 존재한다. 이 때, B는 다음을 만족한다. $Bf(y) = (1/2\pi)\int F(y,\eta)exp(iy\eta)f\wedge(\eta)d\eta$, 여기서 $F(y,\eta) = 2^{1/2}\int_0^\infty exp(-s^2-2sy)ds\ exp(-iy\eta-(y^2+\eta^2)/2)\int_0^\infty exp(-s^2-s(y-i\eta))ds$. 그러므로 연산자 $\partial/partialy - ay + b$ 가 주어지면 $\sigma(y,\eta;a,b) = a^{-1/2}F(a^{1/2}y - b/a^{-1/2}, \eta a^{-1/2})$는 $\partial/\partial y - ay + b$ 의 좌 역연산자의 심볼이다. 또한 다음의 심볼 측정도 가능하 다.

$$|(\partial/\partial y)^j(\partial/\partial\eta)^1 F(y,\eta)| \le C_{j,l}(1+|y+i\eta|)^{-1-j-l}$$

이 외에도 Sogge's Restriction Theorem [8] 등이 주된 tool로 사용되었다.실제로 그는 [9] 에서 일반 타원 연산자 (General Elliptic Operators) 에 대한 이론을 포물선형 연산자 (Parabolic type operator)에도 응용하였으며 기본 아이디어는 타원와 본질적으로 같다고 볼 수있다.
이러한 정리들은 앞에서 어급한 양자역학의 Spectrum 분해와 연결되어 3차원 이상에 서 양의 포텐셜을 제거하는 문제를 해결해준다.

3. 로렌즈 공간상의 칼레만 부등식

한편 E.M.Stein은 [10]에서 D.Jerison 과 G.C.Kenig [5] 의 결과를 개선하여 $L^p(R^n)$ 공간이 아 닌 Lorentz 공간에서 Carleman 부등식을 증명하였다. 이를 소개하면,

정 리 3 (Stein) [10] n은 3 이상이고, $p = 2n/(n-2), q = 2n/(n+2)$으로 가정하자. (즉, $1/p + 1/q = 1$, 이고 $1/p - 1/q = 2/n$). γ를 0보다 크고, $\gamma \in \{j + (n/p)\}_{j=0,1}$ 을 만족한다고 가정하자. δ 를 $\delta = dist\{\gamma, \{j + (n/p)\}\}_{j=0,1}$ 으로 놓자. 이 때 δ 와 n에만 의존하는 상수 C가 존재하여 모든 함수 $f \in C_{0\infty}(R^n\backslash\{0\})$ 에 대하여 다음을 만족한다.

$$|||x|^{-\gamma} f\,||_{L^{p,q}}(R^n) \le C||\,|x|^{-\gamma}\Delta f||_{L^q}(R^n)$$

일반적으로 Lorentz norm이 $L^p(R^n)$의 norm 보다 크거나 같으므로 유일 확장성을 더욱 강 화 시켰다고 볼 수있다.

정 리 4 (Stein) [10] Ω는 R^n의 연결된 열린 부분집합이고, V는 $V \in L^{n/2,\infty}(loc,\Omega$ 이라고 하자. 차원에만 의존하는 상수 ε_n이 존재하여, 만일 모든 $x_0 \in \Omega$에 대

하여 $lim\ \sup\ \rho \to 0||V||_{L^{n/2,\infty}(B(x,\rho))} \leq \epsilon_n$ 이면, 미분 부등식 $|\Delta f(x)| \leq |V(x)||f(x)|$은 $H^{2,q}(\Omega, loc)$에서 강유일 확장성 을 갖는다. 이 때, $q = 2n/(n+2)$, $n > 2$이다. 여기에서 $L^{n/2,\infty}(loc, \Omega)$ 은 약한 형태의 (weak type) $n/2$ 로렌즈 공간이다.

[12] 에서 저자는 Schrodinger 연산자 $\Delta + V$에 대한 강유일확장성정리를 L^p 공간에 서의 Carleman 부등식을 이용하여 증명하였다. 본 작업에서는 Lorentz 공간에서의 Carleman 부등식을 소개하고 따라서 본 공간에서의 Schrodinger 방정식 $\Delta u(x) + \Sigma a_j \partial/\partial x_j u(x) + bu(x) = 0$ 에 대한 강유일확장성정리를 유도하고자 한다.

정 리 5. n은 3이상으로 가정하자. n에만 의존하는 상수 C가 존재하여 모든 함수 $f \in C_{0\infty}(R^n \backslash \{0\})$에 대하여 다음이 성립한다.

$$||exp(t\ \varphi)U\ ||_{L^{q,p}R^n \backslash \{0\}} \leq C||exp(t\ \varphi)\Delta u||_{L^p(R^n \backslash 0)}.$$

이 때 $(1/p, 1/q)$ 는 꼭지점 $A(1/2, 1/2), B(n/(2n-2), 1/q_b), C((n^2+2n-4)/(2n-2), 1/q_c)$를 갖는 열린 삼각형 ABC상의 모든 점이고 $n/(2n-2) - 1/q_b = (n^2+2n-4)/(2n-2) - 1/q_c = 2/n$를 만족한다.

정 리 6. n은 3이상이고, $p = (6n-4)/(3n-2)$ 즉, $1/p - 1/2 = 1/r,\ r = (3n-2)/2$이다. n에만 의존하는 상수 C가 존재하여 모든 $t \in R$와 모든 $f \in C_{0\infty}(R^n \backslash \{0\})$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$||exp(t\ \varphi)\nabla u||_{L^{2,p}(R^n \backslash 0} \leq C||exp(t\ \varphi)\Delta u||_{L^p(R^n \backslash 0)}$$

따름정리 U는 원점을 포함하는 R^n의 연결된 열린 부분집합이라 가정하자. 이 때, $u \in H^{2,p}(loc, U)$ 이고 $p = (6n-4)/(3n-2)$, 또 u는 미분 방정식

$$\Delta u(x) + \Sigma a_j \partial/\partial x_j u(x) + bu(x) = 0 \tag{1.2}$$

이 때 $a_j \in L^{r,\infty}(loc, R^n), b \in L^{s,\infty}(loc, R^n)$ 이고 $r = (3n-2)/2, s > n/2$을 만족한다.만일 u가 0에서 무한 order로 사라지면 U상에서 $u \equiv 0$.

따름정리의 증명 작은 부분 집합 $A \subset U$ 를 선택하자 (이의 크기는 추후 결정한다). 정리 5와 6으로 부터 우리는 다음을 얻는다.

$$||exp(t\ \varphi)b\ ||_{L^{q,p}(A)} + ||exp(t\ \varphi)\nabla u||_{L^{2,p}(A)}$$

$$\leq C||exp(t\ \varphi)\Delta u||_{L^p(R^n\setminus A)} + C||exp(t\ \varphi)\Delta u\ ||_{L^p(A)}$$

u는 (1.2)의 해이므로,

$$\begin{aligned}||exp(t\ \varphi)\Delta u||_{L^p(A)} \quad & \leq ||exp(t\ \varphi)bu||_{L^p(A)} \\ & +||expt(t\ \varphi)a\nabla u||_{L^p(A)}\end{aligned}$$

이 성립한다. 여기서 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$이다.
이 때 Holder의 부등식을 이용하면, 윗 식은

$$||exp(t\ \varphi)u||_{L^{q,p}(A)}||b||_{L^{s,\infty}(A)} + ||exp(t\ \varphi)\nabla u||_{L^{2,p}(A)}||a||_{L^{r,\infty}(A)}$$

을 유계로 갖는다. 정리하면

$$\begin{aligned}&||exp(t\ \varphi)u||_{L^{q,p}(A)} + ||exp(t\ \varphi)\nabla u||_{L^{2,p}(A)} \\ &\leq C||exp(t\ \varphi)\Delta u||_{L^p(R^n\setminus A)} \\ &+C||exp(t\ \varphi)u||_{L^{q,p}(A)}||b\ ||_{L^{s,\infty}(A)} \\ &+C||exp(t\ \varphi)\nabla u||_{L^{2,p}(A)}||a||_{L^{r,\infty}(A)}\end{aligned}$$

이 성립한다.
아이디어는 우측의 두 항을 좌측에 대하여 지워버리는 것이다. 우라가 A충분히 작게 선택하여 $||b||_{L}s, \infty(A)$ 와 $C||a||L^{r,\infty(\infty)} \leq 1/4$ 를 만족할 수 있게 한다면, 이와 같은 말소가 가능하다. 그런 후에 우리는 다음을 얻는다.:

$$||exp(t\ \varphi)u||_{L^{q,p}(A)} + ||exp(t\ \varphi)\nabla u||_{L^{2,p}(A)} \leq C||exp(t\ \varphi)\Delta u||_{L^p(R^n\setminus A)}$$

이제 $\varphi(y)$ 는 방사적으로 감소하므로, 한 점 $\rho \in \partial A$. 그러면

$$\begin{aligned}&||exp(t\ \varphi(\rho))u||_{L^{q,p}(A)} + ||exp(t\ \varphi(\rho))\nabla u||_{L^{2,p}(A)} \\ &\leq C||exp(t\ \varphi)u||_{L^{q,p}(A)} + ||exp(t\ \varphi)\nabla u||_{L^{2,p}(A)} \\ &\leq C||exp(t\ \varphi)\Delta u||_{L^p(R^n\setminus A)} \\ &\leq C'\end{aligned}$$

이다.
한편 $\varphi(\rho)$ 는 정해진 값이므로, t를 무한으로 보내면, A에서 $u \equiv 0$인 것은 자명하다.

참고문헌

1.S.Agmon,Unicit et convexit dans les probl mes diff rentials, Sem.Math.Sup.,No 13, Presses Univ. Montr al, 1966.

2.W.Amrien, A.B rthier, and V.Georgescu, Lp estimates for the Laplacian and unique continuation, Ann.Inst. Fourier (Gernoble) 31 (1981), 153-168

3. T.Carleman, Sur un probl me d'unicit pour les syst mes d' quations aux d riv es partielles deux variables ind pentantes, Ark.Mat. B 26 (1939), 1-9

4. D.Jerison, Carleman Inequalities for the Dirac and Laplace Operators and Unique continuation, Advances in Mathematics 62 (2) (1986), 118-134.

5. D.Jerison and C.E.Kenig, Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schroinger operators, Ann. of Math. 121 (1985)

6. T.Kato, Growth Properties of solutions of the reduced wave equation with variable coefficients, Comm Pure Appl. Math. (12) (1959), 403-425.

7. B.Simon, Schrodinger semigroups, Bull. Amer. Math. Soc. 7(3) (1982) 447-526.

8. C.Sogge, Oscillatory Integrals and Spherical Harmonics, Thesis,Priinceton University Press,Princeton,N.J.,1985

9. C.Sogge,A strong unique continuation theorem for second order elliptic differential operators, Amer.J.Math. 112(1990) 943-984

10. E.M.Stein, Appendix to "Unique continuation," Ann. of Math.(2) 121 (1985),489-494.

11. J. von Neumann and E.Wigner, ber merk rdige discrete Eigenwerte, Phys. Z.30 (1929), 465-467.

12. Y.M.Kim, Carleman Inequalities for the Dirac Operators and Strong unique continuation, M.I.T.thesis (1989), to appear in the proceedings in A.M.S.

13. E.M.Stein, Singular Integrals and Differentiability Propeerties of Functions, Prrinceton Univ.Press, Princeton, N.J.,1970