韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1994. 6. 제 33권 제 1호 75-82

양방향 선호도에 기반을 둔 분산 리더 선거 전략에 대한 확률론적인 분석

진 기 범 (숭실대)

요 약

리더를 선출하는 기존의 선거 전략은 노드의 성능을 고려하지 않아서 양질의 리더를 선출할 수 없다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 성능을 고려하여 리더를 선출하는 방안에 대한 연구가 진행 되고 있다. 본 논문에서는 성능을 양방향 지연값을 선호도로 할때, 선거전략중 다수결 선거 전략을 확률론적으로 분석하였다.

1. 서론

공동목적을 위해 어떤 작업을 수행할때 서로 협동하는 자치적인 컴퓨터 또는 노드의 모임을 분산컴퓨터 시스템이라 한다. 작업을 제어할때 중앙집중식으로 할 수있고 분산제어식으로도 할 수 있는데 중앙집중식에서는 노드들 중의 한 노드를 선출하여 그 노드에게 조정역할을 맡겨서 처리한다. 이 방식은 문제를 쉽게 해결해 주지만 리더 고장이 발생하면 시스템 전체의 고장으로 이 어지게 되는 결점을 가지고 있다. 이런 결점을 극복하기 위해서 리더노드에 고장이 발생하면 고장 나지 않은 노드들 중에서 하나를 선출하여 리더 역할을 하게 하여야 한다.[3, 4, 8, 10, 11]. 기존의 리더선거 알고리즘 연구에서는 모든 노드들이 유일한 고유번호를 가지고 있다고 가정하고, 고장나지 않은 노드중에서 가장 큰 고유번호를 갖는 노드나 가장 작은 고유번호를 갖는 노드를 리 더로 선출하고 있다[1, 2, 6, 7, 8, 9]. 이러한 선거 알고리즘들은 알고리즘의 효율성 측면에서 많 은 흥미를 가지게 되나, 리더를 선출할 때에 노드의 성능을 고려하지 않고 단순히 노드의 고유번호만을 고려하므로 선출된 리더가 시스템 성능면에서 리더로서 적절하지 못할 수 있다.

본 연구에서는 선거전략중 다수결 선거 전략을 논문[13]과는 달리 양방향 지연값을 선호도로 하여 확률적으로 분석하였다.

2. 시스템 모델

그래프 $G(V, E)$로 분산시스템을 모델링할 수 있고 노드 사이의 통신채널에 해당하는 링크를 나타내는 모든 간선은 양방향이고 가중치(weight)가 주어 진다고 가정하고, 가중치는 노드사이의 통신에 소요되는 시간, 즉 지연값을 나타낸다고 하자. (i, j)가 간선이면 (j, i)도 역시 간선이고, (i, j)위에서의 지연값은 (j, i)에서의 지연값과는 다를 수 있다.

기존의 방법에서는 노드 j 의 시스템의 전반적인 성능은 이 시스템에서 모든 노드 i로부터 j로 가는 최단 경로의 합으로 정의하였으나, 본 논문에서는 노드 j의 시스템 전반적인 성능을 다른 모든 노드로부터 오는 경로와 가는 경로를 모두 고려한 최단 경로들의 합으로 정의한다[13].

즉, 노드 j의 시스템 전반적인 성능 $D(j)$는 $\sum_{i=l\neq j}^{n} d(j,i) \ + \ \sum_{k=l\neq j}^{n} d(i,k)$ 이다. 단, $d(i, j)$는 노드 i에서 j까지의 최단 경로 지연 값이다. 후보노드중 시스템의 전반적인 성능값이 최소가 되는 노드 k를 최적리더라 한다.
즉, 최적리더 k는 다음 조건을 성립한다.

$$D(k) \le D(j),\ 1 \le j \le n,\ j \neq k$$

최적리더를 뽑는 선거전략 [13]중 우수한 선거전략이라고 한 플루앞(Plu_app) 전략과 보다(Borda) 전략과 3장에서 확률론적으로 분석한 다수결전략이 있는데 각 전략에 대해서 기술하면 다음과 같다.
후보노드 중 선호도가 가장 좋은 노드에게 1표를 던져서 최다 득표한 노드를 리더로 뽑는 다수결 전략과 각 노드에게 후보노드 중 가장 선호하는 노드에게 2표를, 선호도가 평균 이상인 노드들에게 각각 1표씩 주어 최다 득표한 노드가 리더로 뽑히는 플루앞전략과, 각 노드에게 후보노드들에 대한 선호도순으로 1표씩 차등으로 표를 던져서 최다 득표한 노드를 리더로 뽑는 보다(Borda)전략이 있 다.

3. 확률론적인 분석

최적리더를 선출하는 전략중에서 플루앞 전략은 각노드에서 후보 노드에게 2표 이상을 투표할수 있고 단방향 지연값을 선호도로 하는 보다 전략과 양방향 지연값을 선호도로 하는 보다2전략은 (후 보노드수 - 1) 이하의 투표를 한다. 선거에 참여중인 노드에게 두표 이상의 투표를 하는 선거전략 온 일반적인 확률론적 분석을

할수 없다. 이에 본 절에서는 각 노드에서 후보 노드에게 한장의 투 표를 하는 양방향 지연값을 선호도로 하는 다수결2전략에 대해서는 다음과 같이 확률론적으로 분석 을 하고, 이 분석결과와 시뮬레이션 결과와 비교 하였다.
2절에서 이용되는 용어의 정의와 정리를 기술하겠는데 기존에 이미 증명이 된 정리들 이므로 증명 과정은 생략하겠다[12].

3.1 표기법

[정 의] 순서 통계량(N-th order statistic)

모집단 분포(x의 확률밀도함수) $f(x)$ 로 부터의 크기 n인 임의 표본 $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ 에서 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ 을 값의 크기의 순위에 따라서 $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_i < \ldots < Y_n$ 과 같이 배열할 Y_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ 을 임의표본 $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$의 i번때 순서통계량 이라 한다.

[정 리 (1)]

모집단 분포 $f(x)$ $(a < x < b)$ 로 부터의 크기 n 인 임의표본 $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ 의 i번째 순서통계량을 y_i 라고 하면 i번째 순서 통계량 Y_i 의 확률밀도함수 $g_i(y_i)$ 다음과 같다.

$$g_i(y_i) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\,[F(y_i)]^{n-1}\,[1-F(y_i)]^{n-1}\,f(y_i)$$

$$\text{단}\quad F(y) = \int_a^y f(t)dt \quad (a < y_i < b)$$

[중심극한의 정리 (2)]

평균이 μ, 모분산이 σ^2 인 모집단으로 부터의 크기 n인 임의 표본을 $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ 이라 할때

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

단 $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ 의 분포는 $n \to \infty$ 일때 극한으로서 $N(0,1)$에 접근한다.

[중심극한의 정리 (3)] 모평균이 μ, 모분산이 σ^2 인 모집단으로 부터의 크기 n인 임의의 표본을 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 이라 하고 $n \to \infty$ 일때,

(1) 합 $\sum_{i=1}^{n} X_i$의 분포는 $N(n\mu, \ n\sigma^2)$에 접근한다.

(2) 표본평균 $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ 의 분포는 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 에 접근한다.

[정 리 (4)]

r계의 순차적인 단계들이 독립적이고 동일한 지수 분포를 갖는 다면, 결과하는 확률밀도함수

$$F(t) = \frac{\lambda^r \ t^{r-1} \ e^{-\lambda t}}{(r-1)!n}, \quad t > 0, \quad \lambda > 0, \quad r = 1, 2, \ldots$$

이고, 확률분포함수

$$F(t) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

인 r-단계 얼랑(Erlang)분포 이다.

3.2 다수결 2전략에 대한 확률론적인 분석

[정 리 1]

지연 모델에서 가중치 행열의 원소는 매개변수(parameter) λ를 갖는 동일한 지수 분포로 부터 뽑힌다고 가정하자. 다수결 선거 전략은 각 노드 i가 $min\,(W_{ij} + W_{ji})$ 인 후보노드 j에게 1장의 표를 주어 최다 득표한 후보노드가 리더가 되는 선거 전략 이다. 후보노드 j가 리더로 선출되었을때, j가 최적의 리더일 확률은 다음과 같다.

$$Pr(\sum_i W_{ij} + W_{ji} < \sum_i W_{ik} + W_{ki} \ (\forall k \neq j))$$
$$= \sum_{i=1}^{R} N_i r \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \prod_{k=2}^{R} F_k(x) dx$$

(증 명) 선거결과 벡터(vote vector) $(a_i)_{1\le i\le p}$ 라 하고
(단 a_i : 후보노드 i가 이 선거전략에서 득표한수, a_i의 범위 : $0 \sim n, \sum_i a_i = n$)
$W_{ij} + W_{ji}$ 의 분포에서 j 번째 값이 최소인 경우를 고려하면 이분포는 매개변수 λ를 갖는 얼랑(Erlang) 분포가 된다.

$$g_1(x) = \frac{d}{dx}{}_nC_1 F(x)([1 - F(x)]^{n-1})(\text{ 단}, F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x})$$

$W_{ik} + W_{ki}$의 분포에서 $k_{(\neq j)}$ 번째값이 두번째, 세번째, ... 로 분포될 확률밀도 함수는

$$g_2(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=2}^{n}{}_nC_k F(x)([1 - F(x)]^{n-k})(\text{ 단}, F(x) = 1 - e^{-x} - \lambda x e^{-\lambda x})$$

가중치 행열 $(W_{ij}+W_{ji})$ 에서 원소들 중 a_i 개는 $g_1(x)$ 의 분포를 따르고, $(n-a_i)$ 개는 $g_2(x)$ 분포를 따른다. 투표 노드 i 가 a_i 를 투표하여 리더로 선출될때 n 이 충분히 크면 선호도 i 에 대한 가중치 들의 합의 분포 $\sum_{k=1}^{n}(W_{ik} + W_{ki})$ 는 정규분포 $N(\mu_i, \sigma^2)$ 에 근사한다.
단, $\mu = a_i\mu_i + (n - a_i)\mu_2, \sigma^2 = a_i\sigma_1^2 + (n - a_i)\sigma_2^2$

$\mu_1 : g_1(x)$ 의 평균 $\sigma_1^2 : g_1(x)$의 분산

$\mu_2 : g_2(x)$ 의 평균 $\sigma_2^2 : g_2(x)$의 분산이다.

선거결과 벡터 a_i가 주어졌을때 각 $W_{ij} + W_{ji}$에서 각 i번째 값들의 분포의 확률밀도 함수를 F_i라 하면 f_i는 평균 μ, 분산 σ인 정규분포이다.
그러므로 주어진 벡터 a_i에 대하여 최적 리더를 뽑을 확률은

$$\begin{aligned} Pr(\sum_{i=1}^{n}(W_{ij} + W_{ji}) &< \sum_{i=1}^{n}(W_{ik} + W_{ki})) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x) \prod_{k=1,k\neq j}^{p} F_k(x)dx \end{aligned}$$

모든 가능한 선거 결과 벡터들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(n, 0, 0, \cdots, 0)$$

$$(n-1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

$$\vdots$$

$$(\lceil \frac{n}{p} \rceil \cdots \lfloor \frac{n}{p} \rfloor)$$

분할수(partition number)를 이용하여 구해진 순서가있는 선거 결과 벡터의 갯수를 R 라 할때

$$N_i = n_i \cdot {}_nC_{a_1} \cdot {}_{n-a_1}C_{a_2} \cdots {}_{n-\sum_{j=1}^{p-1} a_j}C_{a_p}$$

단, n_i : (a_i) 의 순열의 수
N_i : n개의 노드가 p 개의 후보에 대한 다수결 선거 전략에 의한 선거결과 벡터 (a_i) 의 수이다.

P_r (정확한 후보를 선출)
$= \frac{1}{P^n} \sum_{i=1}^{R} N_i\ P_r$

(후보 j가 최소의 지연값을 갖는다 : $a_j = a_1$)

$= \sum_{i=1}^{R} N_i r \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \prod_{k=2}^{p} F_k(x) dx$

(단, r 은후보 1을 포함 해서 같은 득표수의 노드의 수) 그림 (2) 는 위 [정리 1] 의 P_r (정확한 후보를 선출) 을 수치계산으로 구한 결과와 시뮬레이션을 통하여 얻은 결과와의 비교를 보여주고 있다.

3.3 근사식의 검토

근사식에 가중치 $W_{i\ j}$ 는 매개변수(PARAMETER) $\lambda = 1$를 갖는 지수분포로부터 선택이 되었다. 각노드에 대하여 10,000개의 가중치 행렬위에 다수결2선거 전략을 실행할때 후보 노드는 노드전체를 대상으로 하였다. 시뮬레이션에 의해 구한결과와 [정리 1]의 근사식의 확률값을 구한 결과는 다음 표와 같다.

노드수	근사식을이용하여 구한확률	시뮬레이션으로 구한확률
9	40.0(%)	44.3(%)

그림(2)

4. 결론

본 연구에서 제안한 양방향 지연값을 선호도로한 다수결 2전략을 확률론적으로 분석 하였고 단방 향 지연값을 선호도로 하는 다수결선거전략보다 성능이 더 우수함을 분석하였고, 시뮬레이션을 통하여 보였다.

향후 연구에서는 노드수를 증가하고 연결확률은 더 세분해서 모의실험하여 양방향 지연값을 선호 도로 하는 다른 선거전략에 대한 연구를 하고, 링크의 고장과 각 선거전략 사이의 관계는 더욱 더 분명히 하고자 한다.

참고서적

[1] HOSAME ABU-AMARA, "Fault-Tolerant Distributed Algorithm for Election in Complete Networks", IEEE Trans. on Computer Vol.37, NO.4. PP. 449 - 453,(April 1988).
[2] B.Awerbuch, "Optimal Distributed Algorithms for Minimum weight Spanning Tree, Counting, Leader Election and related problem", ACM STOC PP.230-240,1987.
[3] K.Birman. et al, "Implementing Fault Tolerant Distributed object", IEEE Trans. on Software Engineering., Vol. SE-11, No.6 PP.502-508, (Jun 1985)
[4] P.H.Enslow, "what is a distributed data processing system?", computer, pp.13-21, (Jan 1978).
[5] Michael J.Fisher, Nancy A.Lynch and Michael S.Paterson "Impossibility of Distributed Consensus with one Faulty" Journal of ACM, Vol,32, NO.2, PP.374-382, (April 1985).
[6] G.Fredrickson and N.Lynch,"Electing a Leader in a Synchronous Ring ", JACM, vol.34, No.1, PP.98-115,(Jan 1987).
[7] E.Gafni, "Improvements in the Time complexity of Two Message - Opti-

mal Algorithms", ACM STOC, pp.175-207, 1985.

[8] H. Garcia-Molina,"Election in a Distributed computer syste", IEEE Trans. on computer, vol.c-31, no.1, pp.48- 59, (Jan 1982).

[9] c Oded Goldreich and Liuba shrira, "On the complexity of computation in the presence of link failures the cass of a ring; ", Distributed Computing 5:121 - 131, 1991.

[10] D.MENASCE, R. MUNTZ and J. POPEK, "A Locking protocol for resource Coordination in Distributed Databases", ACM TODS, Vol. 5, No.2, PP. 103 - 138,(June 1980).

[11] R.G.Smith, "The contract net protocol:High level communication and control in a distributed problem solver," in proc. lst INT. conf. Distributed comput. syst, Huntsville, AL, pp. 185 - 192, (Oct 1979).

[12] Trived, K, Probability and statistics with Reliability, Queueing and Computer Science Applications, prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.

[13] Singh, Suresh Prakash, "Preference-based leader election in distributed system", ph. D. Dissertation, university of Massachusetts, 1990.