

論文94-31B-12-6

점진적 감소 파상 특성을 갖는 변형된 elliptic 함수에 관한 연구

(A Study on the Modified Elliptic Function with Progressively Diminishing Ripple Characteristics)

尹暢煥*, 崔碩佑*, 金東龍*

(Chang Hun Yun, Seok Woo Choi and Dong Yong Kim)

要約

Elliptic 필터는 크기특성이 차단주파수에서 가장 급한 경사를 나타낸다는 점에서 최적이다. 그러나 지연 및 계단응답과 같은 다른 특성들은 다른 함수에 비하여 오히려 좋지않다. 그러므로 본 논문에서는 이러한 단점을 개선하기 위하여 변형된 elliptic 저역통과 필터 함수를 제시하였다. 변형된 elliptic 함수는 통과대역과 저지대역에서 점진적 감소 파상을 갖으며, 기존 함수와 비교하여 작은 극점-Q 값을 갖기 때문에 지연 및 계단응답 특성등이 개선되었다. 그리고 변형된 함수는 우수 및 기수 차수에서 수동 복중단 제자형 회로망으로 합성이 가능하여 모의 기법을 통해 감도 특성이 우수한 능동 RC 및 스위치드 캐패시터 필터를 설계할 수 있다.

Abstract

The elliptic filters are optimal in the sense that the magnitude characteristic exhibits the steepest slope at the cutoff frequency. The other characteristics such as delay and step response, however, are rather undesirable. In this paper, the modified elliptic low-pass filter function is proposed. The modified elliptic function possesses progressively diminishing ripples in both passband and stopband, and the lower pole-Q values when compared to the elliptic counterparts, thus producing the flatter delay characteristics and improved time-domain performances. And it is realizable in the doubly-terminated ladder structures for the order n even or odd, thus lending themselves amenable to high-quality active RC or switched capacitor filters through the simulation techniques.

I. 서론

전기, 전자 필터는 통신등에서 신호 및 영상 처리를 위한 정보전송의 필수적인 장치이다. 이러한 필터

를 설계하는데 사용되는 함수는 형태에 따라 Butterworth, Chebyshev 함수와 같은 전극점(all-pole) 함수와 inverse Chebyshev, elliptic 함수와 같은 유리(rational) 함수로 구분된다. 전극점 함수와 inverse Chebyshev 함수는 주어진 설계명세 조건을 만족하기 위하여 높은 차수(order)를 요구함으로 시스템 구성 시 많은 소자가 필요하다는 단점을 갖는다. 유리함수인 elliptic 함수는 다른 함수와 비

* 正會員, 全北大學校 工科大學 電氣工學科
(Dept. of Elec. Eng., Chonbuk Nat'l Univ.)
接受日字 : 1994年 6月 3日

교하여 가장 낮은 차수로 실현되는 최적 함수이다. 이러한 최적성은 elliptic 함수의 크기특성이 통과대역과 저지대역에서 등파상(equal ripple)을 갖고, 정곡(peak and valley)의 수가 차수 n 과 같으며 천이 영역(transition band)에서의 차단 경사도가 가장 급하다는데 있다. 그러나 elliptic 함수는 자연 및 계단 응답 특성이 다른 함수와 비교하여 좋지 않다는 단점을 갖는다.^[1-2] 그리고 elliptic 함수는 우수(even) 차수에서 3가지 형태로 분류된다.^[3] 원 함수식인 case A는 분모 다항식과 분자 다항식이 차수 n 과 같기 때문에 $\omega = \infty$ 에서 유한값을 갖는다. 이러한 결과로 상호인더턴스를 갖는 변압기등을 사용하지 않고는 수동 복종단 제자형 회로망 합성이 불가능하다.^[4] 원 함수식에서 제일 높은 주파수에 존재하는 극점을 무한대로 이동시킨 case B는 수동 복종단 제자형 회로망으로 합성은 가능하나 전원측과 부하측에 존재하는 저항 $R_1 \neq R_2$ 이므로 최대 전력전송이 이루어지지 않는다. Case C에서의 크기특성은 $\omega = 0$ 에서 최대값을 갖고 $|H(j\infty)| = 0$ 이므로 수동 복종단 제자형 회로망으로 실현이 가능하고 $R_1 = R_2$ 가 된다. 그러나 저지대역의 감쇠가 case B보다 작다는 단점을 갖는다.

그러므로 본 논문에서는 통과대역과 저지대역 양쪽에서 점진적 감소 파상(diminishing ripple) 특성을 갖는 변형된 elliptic 함수를 제안한다. 변형된 함수의 크기특성은 $\omega = 0$ 에서 최대값을 갖고 $|H(j\infty)| = 0$ 이기 때문에 $R_1 = R_2$ 가 되어 감도 특성이 우수한 수동 복종단 제자형 회로망으로 실현이 가능하다.^[5] 또한 변형된 elliptic 함수는 작은 극점-Q 값으로 인하여 주파수 영역 및 시간 영역의 특성이 개선 되었다. 그리고 변형된 함수에 대한 설계 예를 통하여 수동 복종단 제자형 회로망으로 실현하였다.

II. 변형된 elliptic 함수

기존의 elliptic 함수는 식(1)과 같다.

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + R_n^2(\omega)}} \quad (1)$$

여기서 $R_n(\omega)$ 은 유리함수이며 다음식과 같다.

$$R_n(\omega) = M \frac{\left(\omega_1^2 - \omega^2 \right) \left(\omega_2^2 - \omega^2 \right) \cdots \left(\omega_{n/2}^2 - \omega^2 \right)}{\left(1 - \omega_1^2 \omega^2 \right) \left(1 - \omega_2^2 \omega^2 \right) \cdots \left(1 - \omega_{n/2}^2 \omega^2 \right)} \quad n : \text{even} \quad (2a)$$

$$R_n(\omega) = N \frac{\left(\omega_1^2 - \omega^2 \right) \left(\omega_2^2 - \omega^2 \right) \cdots \left(\omega_{(n-1)/2}^2 - \omega^2 \right)}{\left(1 - \omega_1^2 \omega^2 \right) \left(1 - \omega_2^2 \omega^2 \right) \cdots \left(1 - \omega_{(n-1)/2}^2 \omega^2 \right)} \quad n : \text{odd} \quad (2b)$$

식(2a), (2b)에서 ω_s 는 저지대역이 시작되는 주파수

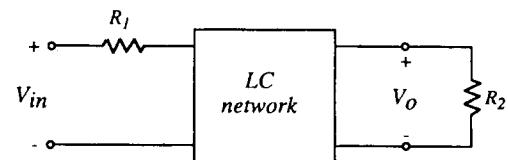
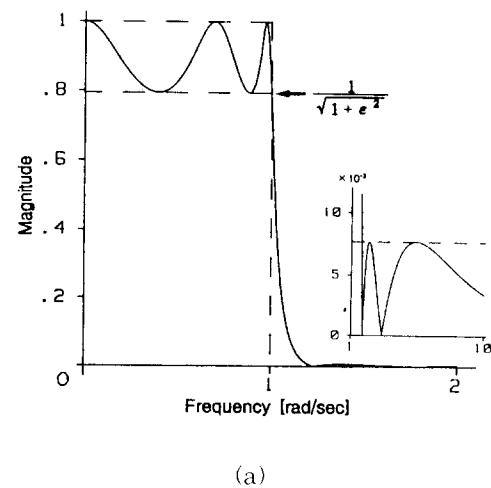
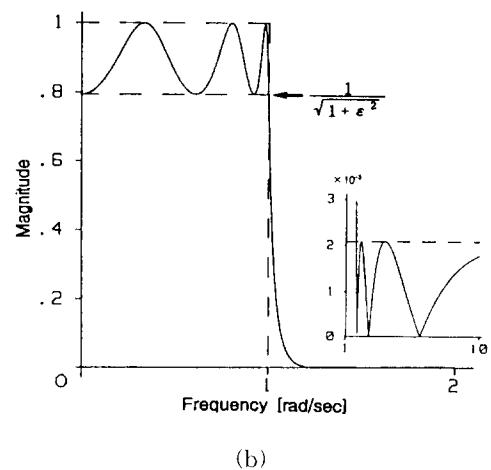


그림 1. 수동 복종단 제자형 회로

Fig. 1. Passive doubly-terminated ladder network.



(a)



(b)

그림 2. 기존 elliptic 함수의 크기특성

(a) $n = 5$ 차 (b) $n = 6$ 차

Fig. 2. The magnitude of the elliptic function. (a) $n = 5$ order (b) $n = 6$ order

이고 주어진 ω_s 와 차수 n 에 대하여 ω_i ($i = 1, 2, 3, \dots$)는 제 1 종 Jacobian elliptic 함수와 완전 elliptic 적분을 이용하여 구할 수 있다.

본 논문에서는 함수의 크기특성이 통과대역과 저지대역에서 점진적 감소 파상 특성을 갖도록 하는 간단한 변환법을 제시하여 변형된 함수가 $|\dot{H}(j0)|=1$, $|\dot{H}(j\infty)|=0$ 이 되고 $R_1=R_2$ 가 되어 최대 전력전송이 가능하며 감도 특성이 우수한 그림 1과 같은 수동 복종단 제자형 회로망으로 실현이 가능해 진다.

식(1), (2)로 부터 $n=5, 6$ 차에 대한 크기특성을 그림 2에 나타내었다. 그림 2의 크기 특성 곡선은 통과대역과 저지대역에서 등파상 특성을 나타내며, 우수 차수일 경우 $\omega = \infty$ 에서 유한값을 갖기 때문에 전달함수가 전송영점을 갖지 않고 수동 복종단 제자형 회로망으로 합성이 불가능하다.

따라서 기존의 우수 함수를 그림 2(a)와 같은 기수 함수 형태로 변형하기 위해서는 다음 두 조건을 만족 하여야 한다.

조건 (a) $|\dot{H}(j\infty)|=0$ $n =$ 기수, 우수

조건 (b) $|\dot{H}(j0)|=1$ 과 $|\dot{H}(j1)| = :1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$.

두 조건을 만족하기 위하여 식(1)의 항을 식(3)과 같이 변형하면 식(4)와 같은 변형된 elliptic 함수 $\dot{H}_n(s)$ 를 얻는다.

$$R_n(\omega) \rightarrow \omega R_{n-1}(\omega) \quad (3)$$

$$|\dot{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \omega^2 R_{n-1}^2(\omega)}} \quad (4)$$

여기서

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{R_{n-1}(1)} \text{ 이다.} \quad (5)$$

식(4)의 분모항에 ω^2 이 존재하여 통과대역과 저지대역에서의 파상은 n 이 우수 또는 기수에서 모두 식(6)의 점근선을 따라 감소하므로 조건(a), (b)를 만족한다.

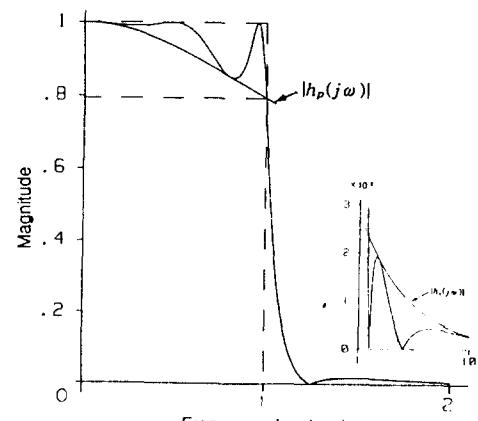
$$|\dot{h}_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \omega^2 R_{n-1}^2(\omega)}} \quad (6a)$$

$$|\dot{h}_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \omega^2 R_{n-1}^2(\omega)}} \quad (6b)$$

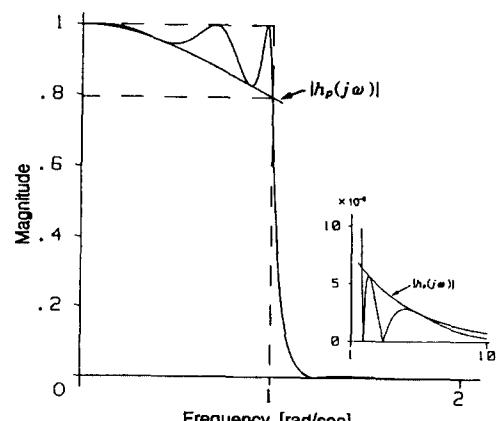
이상의 결과를 $n=5, 6$ 차에 대해서 그림 3에 나타내었다.

변형된 함수는 그림 3과 같이 점진적 감소 파상으로 인하여 극점-Q 값^[6]이 기존 함수 보다 작아지므로 자연 특성이 보다 더 평탄하게 되고, 시간 영역

에서의 단위 계단응답 특성도 개선된다. 또한 전체 저지대역에서의 감쇠는 더 커졌으며 통과대역에서의 손실은 더 작아진다. 그리고 천이영역에서의 차단 경사도는 식(7)과 같이 동일 차수의 elliptic 함수에 비하여 완만하지만 기존의 $n-1$ 차 보다는 더 급격하게 된다.



(a)



(b)

그림 3. 변형된 elliptic 함수의 크기특성 (a) $n=5$ 차 (b) $n=6$ 차

Fig. 3. The magnitude of the modified elliptic function. (a) $n=5$ order (b) $n=6$ order

$$\left. \frac{d|\dot{H}_n(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=1} = -\frac{\varepsilon^2 [1 + F(n)]}{(1 + \varepsilon^2)^{3/2}} \quad (7a)$$

$$\left| \frac{dH_{n-1}(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=1} = -\frac{\varepsilon^2 F(n)}{(1+\varepsilon^2)^{3/2}} \quad (7b)$$

여기서 $F(n) = \frac{1}{2} R_{n-1}^2(1) \cdot \left[\frac{d}{d\omega} R_{n-1}(\omega) \right]_{\omega=1}$ 이다.

통과대역 손실 α_p 와 저지주파수 ω_s 에서의 감쇠 α_s 가 설계명세조건에 의해 주어질 때 기존 함수의 차수 n 을 구하는 수식은 식(8)과 같다.^[7]

$$f = \sqrt{1 - (\omega_c / \omega_s)^2} \quad (8a)$$

$$q_o = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{f}}{1 + \sqrt{f}} \quad (8b)$$

$$q = q_o + 2q_o^5 + 15q_o^9 + 150q_o^{13} \quad (8c)$$

$$D_{old} = \frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1} \quad (8d)$$

$$n \geq \frac{\log(16D_{old})}{\log(1/q)} \quad (8e)$$

변형된 함수의 차수 n 을 구하는 수식은 식(8a)~(8c) 및 $\alpha_p = 10\log(1+\varepsilon^2)$ 와 $\alpha_s = 10\log[1+\lambda^2\omega_s^2R_{n-1}^2(\omega_s)]$ 를 이용하여 식(9)와 같이 구할 수 있다.

$$D = \frac{1}{\omega_s^2} \cdot \frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1} \quad (9a)$$

$$n \geq 1 + \frac{\log(16D)}{\log(1/q)} \quad (9b)$$

그리고 식(4)로 부터 구한 변형된 elliptic 함수는 다음과 같은 형태의 유리 함수로써 나타낼 수 있다.

$$H(s) = K \prod_{i=1}^{n/2} \frac{s^2 + c_i}{(s - p_i)(s - \bar{p}_i)} \quad n : \text{even} \quad (10a)$$

$$H(s) = \frac{K}{s - \sigma_0} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{s^2 + c_i}{(s - p_i)(s - \bar{p}_i)} \quad n : \text{odd} \quad (10b)$$

III. 설계 예

식(11)과 같은 설계명세조건을 만족하는 기존의 elliptic 함수와 변형된 elliptic 함수를 구하기 위하여 식(8), (9)로 부터 차수를 계산하면 각각 $n=5$, 1 차 및 $n=5.9$ 차이다. 그러나 실제 설계에서의 차수는 정수이므로 두 함수 모두 $n=6$ 차이며, 식(1)과 식(10)으로 구한 함수는 식(12)와 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_p &= 2 \text{ dB} \\ \alpha_s &\geq 43 \text{ dB at } \omega_s = 1.2 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (11)$$

$$H(s) = K \frac{(s^2 + c_{11})(s^2 + c_{12})(s^2 + c_{13})}{(s^2 + a_{11}s + b_{11})(s^2 + a_{12}s + b_{12})(s^2 + a_{13}s + b_{13})} \quad (12a)$$

$$a_{11} = 0.4353211 \quad b_{11} = 0.1686972 \quad c_{11} = 1.4950350$$

$$a_{12} = 0.2087443 \quad b_{12} = 0.6844517 \quad c_{12} = 2.2359899$$

$$a_{13} = 0.0513069 \quad b_{13} = 0.9831437 \quad c_{13} = 12.9526713$$

$$\dot{H}(s) = K \frac{(s^2 + c_1)(s^2 + c_2)}{(s^2 + a_1s + b_1)(s^2 + a_2s + b_2)(s^2 + a_3s + b_3)} \quad (12b)$$

$$a_1 = 0.8477647 \quad b_1 = 0.2601910 \quad c_1 = 1.5211268$$

$$a_2 = 0.3632298 \quad b_2 = 0.6202414 \quad c_2 = 2.9683674$$

$$a_3 = 0.0736160 \quad b_3 = 0.9793796$$

표 1. 극점, 영점 비교

Table 1. Comparison of poles and zeros.

Elliptic 함수 ($n = 6$)			
P_i	\bar{P}_i	Q_i	C_i
-0.2176606 ± j 0.3483118		0.9435	1.4950350
-0.1043722 ± j 0.8207059		3.9633	2.2359899
-0.0256534 ± j 0.9912041		19.3256	12.9526713

변형된 elliptic 함수 ($n = 6$)			
P_i	\bar{P}_i	Q_i	C_i
-0.4238824 ± j 0.2837512		0.6017	1.5211268
-0.1816149 ± j 0.7663273		2.1682	2.9683674
-0.0368080 ± j 0.9889513		13.4432	

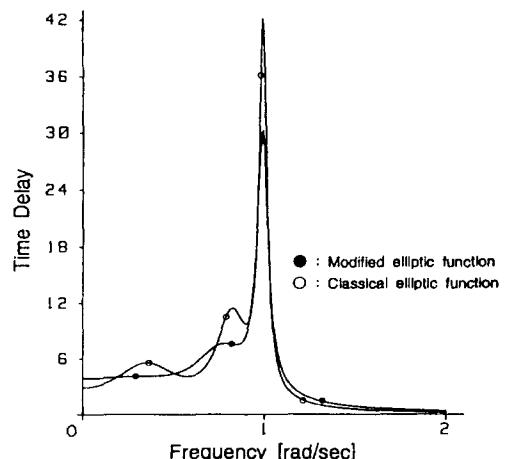


그림 4. 지연특성 곡선의 비교, $n=6$

Fig. 4. The delay curve comparison, $n=6$.

두 함수의 크기특성을 그림 2(b)와 그림 3(b)에 나타내었다. 그림 3(b)와 같이 변형된 함수는 점진적 감소 과정 특성을 갖기 때문에 통과대역에서의 전체 손실량은 작고 $|H(j0)|=1$, 이며, ω_s 부근을 제외한 전체 저지대역에서의 감쇠는 크고 $|H(j\infty)|=0$ 이 된다. 그리고 두 함수의 극점, 영점 및 극점-Q 값을 표 1에 제시하였다.

표 1에 제시한 것과 같이 변형된 함수의 극점-Q 값은 기존의 함수값에 비하여 작으므로 그림 4에서처럼 지연특성 곡선이 더 평탄하여 주파수 영역의 특성이 우수함을 알 수 있다. 그림 6은 단위 계단응답을 비교한 것으로 적은 오우버슈트(overshoot)와 빠른 정착시간(settling time)의 특성을 갖는 변형된 함수가 시간 영역에서의 특성이 우수함을 나타낸다.

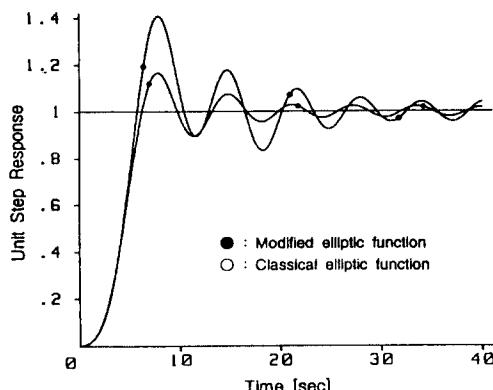


그림 5. 단위 계단응답의 비교. $n=6$

Fig. 5. The unit step response comparison.
 $n=6$.

IV. 변형된 함수의 수동 복종단 제자형 회로망의 실현

변형된 elliptic 함수를 그림 1과 같은 수동 복종단 제자형 회로망으로 실현하기 위하여 전달함수를 식 (13)으로 정의하고, Feldtkeller 방정식인 식(14)를 이용하면

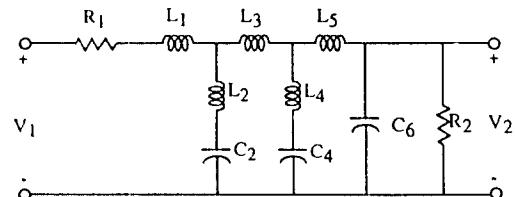
$$\dot{H}(s) = \frac{P(s)}{E(s)} = \frac{P_c(s) + P_o(s)}{E_c(s) + E_o(s)} \quad (13)$$

$$E(s)E(-s) = P(s)P(-s) + F(s)F(-s) \quad (14)$$

구동점 함수는 식(15)와 같다.^[8]

$$\cdot Y(s) = R_i \left[\frac{E_c(s) + F_c(s)}{E_o(s) - F_o(s)} \right] \quad (15)$$

식(15)와 식(12b)로부터 극점을 제거하는 연분수 전개로 합성된 수동 복종단 제자형 회로망은 그림 6과 같다.



$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = 1 [\Omega] \\ L_1 &= 1.04564 \quad L_2 = 0.766913 \quad L_3 = 1.34252 \quad L_4 = 0.223562 \quad L_5 = 1.53212 [H] \\ C_2 &= 0.836332 \quad C_4 = 1.5069 \quad C_6 = 1.55377 [F] \end{aligned}$$

그림 6. 변형된 elliptic 함수의 수동 회로망. $n=6$
Fig. 6. The passive network of the modified elliptic function. $n=6$.

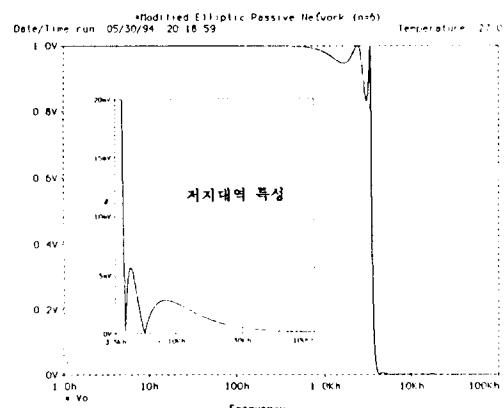


그림 7. 수동 저역통과 필터의 SPICE 시뮬레이션
Fig. 7. SPICE simulation of the passive low-pass filter.

그림 6의 규준화된 소자값을 음성 신호처리 대역 주파수인 3400Hz로 스케일링 한 후 SPICE 시뮬레이션한 특성 곡선은 그림 7과 같으며 그림 3의 함수 시뮬레이션과 동일하게 통과대역 및 저지대역에서 점진적 감소 과정 특성을 나타내었다.

V. 결 론

본 논문에서 제시한 변형된 elliptic 저역통과 필터

함수는 통과대역과 저지대역에서 점진적 감소 파상 특성을 갖고, 우수 또는 기수 차수 모두에 대해서 $\omega = 0$ 에서는 통과대역의 최대값, $|H(j\infty)| = 0$ 이 됨을 입증하였다. 또한 설계명세조건을 만족할 수 있는 변형된 함수의 차수를 구하는 수식을 제시하였다. 그리고 기존의 함수와 달리, 우수 차수에서 한가지 형태만을 갖는 변형된 함수는 case B 및 C와 같은 변환없이 우수 또는 기수 차수에 대해서 수동 복종단 제자형 회로망으로 합성이 가능하였다. 그 결과 수동 회로망의 우수한 감도 특성이 유지되는 개구리 도약법 및 FDNR법을 이용하여 능동 RC 및 스위치드 캐패시터 필터로 응용할 수 있다. 더나아가 변형된 함수는 기존 함수에 비하여 작은 극점-Q 값을 갖기 때문에 주파수영역의 위상 및 지연 특성이 우수하고, 시간영역의 단위계단응답이 개선되었다. 그러므로 본 논문에서 제시한 변형된 elliptic 함수를 각종 신호처리용 필터 설계에 응용하면 필터 특성을 개선할 수 있을 것이다.

参考文獻

- [1] H. K. Kim, *Network Analysis and Synthesis : Electrical and Electronic Filter Design*, KAAE : Seoul, 1990.
- [2] H. J. Carlin and J. L. Wu, "Amplitude selectivity versus delay in minimum-phase lossless filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-23, pp. 447-455, July 1976.
- [3] L. P. Huelsman and P. E. Allen, *Introduction to the Theory and Design of Active Filters*, McGraw-Hill : New York, 1980.
- [4] R. Schaumann, M. S. Ghausi and K. R. Laker, *Design of Analog Filters*, pp. 350-399, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- [5] G. C. Temes and H. J. Orchard, "First-order sensitivity and worst case analysis of doubly terminated reactance two-ports," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CT-20, pp. 567-571, Sept. 1973.
- [6] H. K. Kim, "The effects of lower Q values on the filters having equal ripples in passband," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-39, pp. 305-309, Apr. 1992.
- [7] A. Antoniou, *Digital Filters : Analysis and Design*, New York : McGraw-Hill, 1979.
- [8] D. J. M. Baez Lopez, "Synthesis and sensitivity analysis of elliptic networks," Ph. D. Dissertation, University of Arizona, 1979.

著者紹介

尹暢 烏(正會員) 第 31 卷 B 編 第 5 號 參照
현재 전북대학교 전기공학과 박사
과정

崔碩佑(正會員) 第 31 卷 B 編 第 5 號 參照
현재 전북대학교 전기공학과 시간
강사

金東龍(正會員) 第 31 卷 B 編 第 5 號 參照
현재 전북대학교 전기공학과 교수