論文94-31B-8-6

비선형 시스템의 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화

(Linearization of Nonlinear Control Systems using a Restricted Class of Dynamic Feedback)

李 鴻 奇*, 全 洪 兌**

(Hong Gi Lee and Hong Tae Jeon)

要 約

Dynamic Feedback 은 (Static) Feedback 에 비해 아주 강력한 제어 수단임은 잘 알려져 있다. 본 논문은 비선형 시스템이 (Static) Feedback 선형화가 가능하지 않을 경우, Dynamic Feedback 을 사용하는 선형화 문제를 다룬다. 일반적인 Dynamic Feedback 선형화 문제는 현재로서 풀기 어려우므로, 그 중간 단계로서 자주 사용하는 제한된 Dynamic Feedback 을 정의하고, 이런 형태의 Feedback 으로 선형화 가능 여부를 판단할 수 있는 필요충분조건을 유도하였다.

Abstract

The dynamic feedback is well-known to be much more powerful tool in control than the static one. This paper deals with the dynamic feedback linearization of the nonlinear systems which are not (static) feedback linearizable. The dynamic feedback linearization problem is, however, too difficult to solve at momemt. Thus, we introduce a restricted class of the dynamic feedback (pure integrators followed by the static feedback), which is often used to study the problems using dynamic feedback, and obtain the necessary and sufficient conditions of the linearization problem using this class of the dynamic feedback.

Ⅰ. 서 론

항공기, 로보트 등의 high-tech 시스템들의 수학적 모델은 다음과 같은 비선형 식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \tag{1a}$$

$$y = h(x)$$

$$x \in R^n, u \in R^m, y \in R^q \tag{1b}$$

*正會員, 中央大學校 制御計測工學科
(Dept. of Control & Instrumentation Eng., Chungang Univ.)
**正會員, 中央大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Chungang Univ.)

※ 본 논문은 국방과학연구소의 장기기초연구비에 의하여 연구되었음.
接受日字 : 1993年 7月 12日

이런 비선형 시스템의 제어는 선형 시스템에 비하여 훨씬 어렵다고 알려져 있다. 따라서, 비선형 시스템을 선형 시스템으로 또는 선형 시스템과 비슷하게 만들어서 제어하려는 노력이 여러가지 방법으로 행하여졌다. 선형 시스템 제어의 경우와 비슷하게 제어의 도구는 state (또는 출력) 의 feedback 과 state 의 좌표변환이지만, 비선형 시스템 제어의 경우 feedback 과 좌표변환을 비선형 함수로 확장하여 허용하기로 한다. 이 feedback 과 좌표변환을 사용하여 시스템을 선형 시스템으로 변환할 수 있으면 시스템 (1a) 는 feedback 선형화가 가능하다고 하고, 이 경우 시스템 (1a) 는 선형 시스템을 제어하는 것과 비슷하다.[1,5,7,11,12,14,17,18,25,26] 그러나, feedback 선형화가 가능하기 위한 필요충분조건이 다소 제약적이어서 (특히, 다입력 시스템의 경우에는) 차선책으로 근사 선형화[13,17,20] 및 부분 선형화[15,21] 등을 고려할 수가 있지만, 이 경우 시스템은 여전히 비선형 시스템이다. 따라서, 선형 시스템의 제어 기법인 선형 dynamic feedback[27] 을 확장한 비선형 dynamic feedback 을 사용함으로써 시스템을 선형화시키는 dynamic feedback 선형화 기법에 대한 관심이 높다. 3절에서 보듯이 dynamic feedback 을 사용하면 다입력 시스템의 경우 선형화 조건이 완화되어 훨씬 더 많은 시스템이 선형화가 가능하게 된다. 비선형 시스템의 dynamic feedback 은 다음과 같이 정의되는데

$$\begin{aligned} \dot{z} &= c(x,z)+d(x,z)v,\ z \in R^p,\ v \in R^m \\ u &= a(x,z)+b(x,z)v \end{aligned} \tag{2}$$

여기서, x는 시스템 (1)의 state 이고 z는 dynamic feedback의 state 이다. (2) 식의 dynamic feedback 을 시스템 (1)에 적용하여 다음과 같은 closed-loop 시스템 (extended 시스템) 을 얻을 수 있는데

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= \begin{bmatrix} f(x)+g(x)a(x,z) \\ c(x,z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(x)b(x,z) \\ d(x,z) \end{bmatrix} v \\ &= f_E(x_E)+g_E(x_E)v \end{aligned} \tag{3}$$

$$x_E = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in R^{n+p}$$

만일 확장된 시스템 (3) 이 (static) feedback 선형화가 가능한 dynamic feedback (2) 가 존재하면 시스템 (1) 은 dynamic feedback 선형화가 가능하다고 한다. 이 선형화 기법의 필요충분조건은 아직 발견되지 않았고, 참고문헌[2,4,10,16] 등에 극히 초보적인 충분조건들만이 제시되었다. 본 논문에서는 일반적인 dynamic feedback 선형화 문제 해결을 위한 중간 단계로서 제한된 dynamic feedback 선형화 문제를 정의하고 이 문제의 필요충분조건을 발견하였다. 또, 이 조건들의 적용을 용이하게 하는 보조 정리 등도 유도하고, 여러 예제들을 통하여 우리의 조건들의 유용성을 보인다. dynamic feedback 을 사용한 입출력 decoupling 등 다른 문제들은 참고문헌[9,22,23,28] 등에서 발견할 수 있다.

Ⅱ. 비선형 시스템의 제한된 dynamic feedback 선형화

(2) 식의 일반적인 dynamic feedback 에 의한 선형화의 필요충분조건을 바로 구하기가 어렵다. 따라서, 다음과 같은 제한적인 dynamic feedback 을 고려하자. 우선 입력에 순수 적분기들만을 걸어준다.

$$\frac{d^{k_i}u_i}{dt^{k_i}} = w_i,\ 1 \le i \le m \tag{4}$$

(4) 식은 state 를

$$z_j^i = u_i^{(j-1)} = \frac{d^{j-1}u_i}{dt^{j-1}},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le k_i$$

라고 두면 다음과 같은 선형 dynamic feedback 이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Dz+Ew \\ u &= Fz+Hw \end{aligned} \tag{5}$$

$$z = \left[z_1^1 z_2^1 \ldots z_{k_1}^1 z_1^2 \ldots z_1^m \ldots z_{k_m}^m\right]^T$$

여기서, 행렬 D, E, F, H 들은 쉽게 알 수 있으므로 생략한다. (5) 식은 입력 u_i 에 k_i 개의 적분기를 적용하여 적분기들의 입력을 새로운 입력 w_i 라고 정의하고 각각의 적분기의 출력을 state z_j^i 라고 순서대로 정의한 것이다. (5) 식의 dynamic feedback 을 시스템 (1) 에 적용하여

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x)+g(x)Fz \\ Dz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(x)H \\ E \end{bmatrix} w \\ &= F(x_E)+\sum_{i=1}^{m} G_i(x_E)w_i \end{aligned} \tag{6}$$

확장된 시스템 (6) 을 얻을 수 있다. 이 확장된 시스

템에 대하여

$$w = \gamma(x_E) + \delta(x_E)v$$

형태의 (static) feedback 을 가하는 방식이 우리가 제시하는 제한적인 dynamic feedback 이고, dynamic feedback 문제의 기초 연구를 하는데 상용되는 수단이다. (참고 문헌 [2-4,19,22,28] 참조.) index 를 $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$으로 하는 순수 적분기를 사용한 후 확장된 state 의 static feedback 을 걸어주는 위의 dynamic feedback을 제한된 dynamic feedback 이라고 부르기로 한다.

정의 1: 만일 시스템 (6) 이 static feedback 선형화가 가능하면, 시스템 (1) 이 index 를 $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$으로 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능하다고 정의한다.

시스템 (6) 에 대하여 distribution Δ_i와 Q_i를 다음과 같이 정의한다:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= sp\{g_i \mid k_i = 0\} \\ \Delta_{i+1} &= \Delta_i + ad_f\Delta_i + sp\{g_j \mid k_j = i+1\}, \quad i \ge 0 \end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned} Q_0 &= sp\{g_i \mid k_i = 0\} \\ Q_{i+1} &= Q_i + ad_f Q_i + sp\{g_j \mid k_j = i+1\}, \quad i \ge 0 \end{aligned} \tag{7b}$$

본 논문에서는 미분 기하학적인 표현과 기본적인 지식이 필요한데, 이는 참고문헌 [8,24] 등에서 쉽게 발견할 수 있다.

Ⅲ. 필요충분조건

이 절에서는 앞에 정의한 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화 문제의 필요충분조건을 유도한다.

정리 1: 만일 시스템 (1) 이 index 를 $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$으로 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능하면, index 를 $\{k'_1, k'_2, \ldots, k'_m\}$으로한 선형화도 가능하다. 여기서

$$k'_i = k_i - k_{min},\ k_{min} = \min\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$$

이다.

즉, 시스템이 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능하면, 입력중 적어도 하나는 순수 적분기를 사용하지 않고 (k_{min}=0으로) 선형화가 가능하다. 정리 1 의 역도 (k_{min}을 임의의 음이 아닌 정수라고 두고) 성립하지만, 우리의 연구 목적인 필요충분조건을 얻는데 도움이 되지 않으므로 생략한다. 정리 1 을 증명하기 위하여서는 (static) feedback 선형화의 필요충분조건을 되새길 필요가 있다. 시스템 (1) 에 대하여

$$\begin{aligned} \bar{D}_0 &= sp\{g_1, \ldots, g_m\} \\ \bar{D}_{i+1} &= \bar{D}_i + ad_f\bar{D}_i,\ i \ge 0. \end{aligned} \tag{8}$$

라고 정의한다.

보조 정리 2: [7,12] 시스템 (1)이 (static) feedback 선형화가 가능하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다:

(1) $\bar{D}_i$, $0 \le i \le n-2$들이 dimension 이 상수인 involutive distribution 이다.

(2) $\dim(\bar{D}_{n-1})=n$.

정리 1 의 증명: k_{min}=0일때는 당연히 성립하므로, $k_{min} \ge 0$라고 가정한다. 시스템 (1) 이 index 를 $\{k_1, \cdots, k_m\}$으로 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능하다고 가정하면, (6) 식의 확장된 시스템의 vector field $F(x_E)$와 $G(x_E)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F(x,z) &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} z_1^i g_i(x) + \sum_{k_i \ge 2}\sum_{j=1}^{k_i-1} z_{j+1}^i \frac{\partial}{\partial z_j^i} \\ G_i(x,z) &= \frac{\partial}{\partial z_{k_i}^i} \end{aligned} \tag{9}$$

vector field F 와 G 에 대하여,

$$\begin{aligned} D_0 &= sp\{G_1, \ldots, G_m\} \\ D_{i+1} &= D_i + ad_F D_i,\ i \ge 0 \end{aligned} \tag{10}$$

라고 정의하면, 시스템 (6) 이 (static) feedback 선형화가 가능하므로, 보조정리 2 에 의해

(1) D_i, $i \ge 0$들이 dimension 이 상수인 involutive distribution 이고

(2) $\dim(D_{n-1+k_{max}}) = n + \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot (k_{max} = \max\{k_1, \cdots, k_m\}$

이다. index 가 $\{k'_1, \cdots, k'_m\}$인 순수 적분기를 사용하여 확장된 시스템의 vector field $F'(x_E)$와 $G'(x_E)$는

$$F'(x,z) = f(x) + \sum_{k_i \ge 1} z_1^i g_i(x) + \sum_{k_i \ge 2}\sum_{j=1}^{k_i-1} z_{j+1}^i \frac{\partial}{\partial z_j^i}$$

$$G_i'(x,z) = \begin{cases} g_i(x), & \text{if } k_i' = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z_{k_i}^i}, & \text{if } k_i' \ge 1 \end{cases} \tag{11}$$

이 되어

$$\begin{aligned} D_0' &= sp\{G_1', \ldots, G_m'\} \\ D_{i+1}' &= D_i' + ad_{F'} D_i', i \ge 0 \end{aligned} \tag{12}$$

라고 정의했을때 이 distribution 들이 보조정리 2 의 조건들을 만족하는 것을 보이면 된다. $k_{min} \ge 1$이므로,

$$D_0 = sp\{G_1, \ldots, G_m\} = sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_{k_1}^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{k_m}^m}\right\}$$

이므로 당연히 involutive 하고, 이런 식으로

$$\begin{aligned} D_{k_{min}} &= sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i} : 1 \le i \le m,\ k_i - k_{min} + 1 \le j \le k_i\right\} \\ &\quad + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_{k_i - k_{min}}^i} : k_i \ge k_{min} + 1\right\} \\ &\quad + sp\{g_i : k_i = k_{min}\} \\ &= sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i} : 1 \le i \le m,\ k_i' + 1 \le j \le k_i\right\} \\ &\quad + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_{k_i'}^i} : k_i' \ge 1\right\} \\ &\quad + sp\{g_i : k_i' = 0\} \\ &= sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i} : 1 \le i \le m,\ k_i' + 1 \le j \le k_i\right\} \\ &\quad + sp\{G_1', \ldots, G_m'\} \end{aligned} \tag{13}$$

여기서, projection mapping $\pi : R^{n+k_1+\cdots+k_m} \to R^{n+k_1'+\cdots+k_m'}$ 을 다음과 같이 정의한다:

$$\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial z_j^i}\right) = 0, \text{if } 1 \le i \le m,\ k_i' + 1 \le j \le k_i \tag{14}$$

(13) 식으로부터

$$D_0' = sp\{G_1', \ldots, G_m'\} = \pi_*\left(D_{k_{min}}\right)$$

이 되는데, $\pi_*(D_{k_{min}})$이 dimension 이 상수인 involutive distribution $D_{k_{min}}$이 되는 필요충분조건은 $D_{k_{min}}$과 $(\pi_*)+D_{k_{min}}$이 dimension ker이 상수인 involutive distribution 이 되어야 한다.[5,17,18] 조건 (1) 로부터 $D_{k_{min}}$은 dimension 이 상수인 involutive distribution 이고, (13) 식으로부터

$$\ker(\pi_*) + D_{k_{min}} = D_{k_{min}}$$

이다. 따라서 $D_0' = \pi_*(D_{k_{min}})$은 dimension 이 상수인 involutive distribution 이다. 또,

$$D_{k_{min}+1} = \ker \pi_* + D_1'$$

이고 $D_{k_{min}+1}$이 dimension 이 상수인 involutive distribution 이므로 $D_1' = \pi_*(D_{k_{min}+1})$은 dimension 이 상수인 involutive distribution 이다. 같은 방법으로 D_i', $i \ge 0$은 dimension 이 상수인 involutive distribution 임을 증명할 수 있다. 또,

$$D_{n-1+k_{max}'}' = D_{n-1+k_{max}-k_{min}}' = \pi_*\left(D_{n-1+k_{max}}\right)$$

이므로

$$\begin{aligned} \dim\left(D_{n-1+k_{max}'}'\right) &= \dim\left(D_{n-1+k_{max}}\right) - \dim(\ker \pi_*) \\ &= \left(n + \sum_{i=1}^m k_i\right) - \sum_{i=1}^m \left(k_i - k_i'\right) \\ &= n + \sum_{i=1}^m k_i' \end{aligned}$$

따라서, 시스템 (1) 은 index 를 $\{k_1', \cdots, k_m'\}$으로 하는 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능하다. (Q.E.D.)

정리 3: 만일 시스템 (1) 이 index 를 $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$($k_{min}=0$)으로 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능하면, $k_{max} \le n$으로 하는 선형화가 가능하다.

증명: 시스템 (1) $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$이 index 를 으로 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능하고 $k_{max} \ge n+1$이라고 가정하자.

$$Q_{p-1} \subset Q_p \quad \dim\left(Q_{k_{max}-1}\right) \le n$$

이므로

$$Q_{\alpha-1} = Q_\alpha$$

가 되는 α ($1 \le \alpha \le k_{max}-1$)가 존재한다.

$$k'_i = \begin{cases} k_i, & \text{if } k_i \le \alpha \\ k_i - 1, & \text{if } k_i \ge \alpha + 1 \end{cases}$$

라고 정의하여 시스템 (1) 이 index $\{k'_1, k'_2, \cdots, k'_m\}$를 으로 (즉, $k'_{max}=k_{max}-1$로 하여) 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능함을 보인다. 우선,

$$Q'_p = Q'_{p-1} + ad_F Q'_{p-1} + sp\{g_i | k'_i \le p\}$$
$$Q_p = Q_{p-1} + ad_F Q_{p-1} + sp\{g_i | k_i \le p\}$$

이므로

$$Q'_p = Q_p, \text{ for } 0 \le p \le \alpha - 1$$

또,

$$\begin{aligned} Q'_\alpha &= Q'_{\alpha-1} + ad_F Q'_{\alpha-1} + sp\{g_i | k'_i \le \alpha\} \\ &= Q_{\alpha-1} + ad_F Q_{\alpha-1} + sp\{g_i | k_i \le \alpha + 1\} \\ &= Q_\alpha + ad_F Q_\alpha + sp\{g_i | k_i \le \alpha + 1\} \\ &= Q_{\alpha+1} \end{aligned}$$

임을 쉽게 알 수 있다. 이런 방법으로

$$Q'_p = Q_{p+1}, \text{ for } p \ge \alpha$$

임을 쉽게 보일 수 있다. 여기서, $0 \le p \le \alpha - 2$에 대하여

$$D_p = Q_p + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i} | k_i \ge 1, k_i - p \le j \le k_i\right\}$$

가 dimension 이 상수인 involutive distribution 이므로

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_j^i}, Q_p\right] \subset Q_p, \ k_i \ge 1, \ k_i - p \le j \le k_i$$

따라서

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_j^i}, Q_p\right] \subset Q_p, \ 1 \le k'_i \le \alpha - 1, \ k'_i - p \le j \le k'_i.$$

또, $0 \le p \le \alpha - 2$ 일때 Q_p 의 성질에 의하여,

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_j^i}, Q_p\right] \subset sp\{0\} \subset Q_p, \ k_i \ge 1, \ j \ge 2.$$

이므로

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_j^i}, Q_p\right] \subset Q_p, \ k_i = \alpha, \ k_i - p \le j \le k_i$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_j^i}, Q_p\right] \subset Q_p, \ k_i \ge \alpha + 1, \ k_i - 1 - p \le j \le k_i$$

따라서,

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_j^i}, Q_p\right] \subset Q_p, \ k'_i \ge \alpha, \ k'_i - p \le j \le k'_i.$$

이전의 결과와 종합하면

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_j^i}, Q_p\right] \subset Q_p, \ k'_i \ge 1, \ k'_i - p \le j \le k'_i,$$

따라서

$$\begin{aligned} D'_p &= Q'_p + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i} | k'_i \ge 1, k'_i - p \le j \le k'_i\right\} \\ &= Q_p + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i} | k'_i \ge 1, k'_i - p \le j \le k'_i\right\} \end{aligned}$$

은 $0 \le p \le \alpha - 2$에 대하여 dimension 이 상수인 involutive distribution 이다.

$$Q'_{\alpha-1} = Q_{\alpha-1} = Q_\alpha$$

이므로

$$Q'_p = Q_{p+1}, \text{ for } p \ge \alpha - 1.$$

이고, $p \ge \alpha - 1$에 대하여

$$D_{p+1} = Q_{p+1} + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i} | k_i \ge 1, k_i - 1 - p \le j \le k_i\right\}$$

이 dimension 이 상수인 involutive distribution 이므로

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_j^i}, Q_{p+1}\right] \subset Q_{p+1}, \ k_i \ge 1, \ k_i - 1 - p \le j \le k_i,$$

따라서

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_j^i}, Q'_p\right] \subset Q'_p, \ k'_i \ge 1, \ k'_i - p \le j \le k'_i.$$

그러므로, $p \ge \alpha - 1$에 대하여,

$$D'_p = Q'_p + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i} | k'_i \ge 1, k'_i - p \le j \le k'_i\right\}$$

은 dimension 이 상수인 involutive distribution

이다. 마지막으로,

$$\dim\left(Q_{n+k_{\max}}\right)=\dim\left(Q'_{n+k'_{\max}}\right)=n$$

이므로

$$\dim\left(D'_{n+k'_{\max}}\right)=n+\sum_{i=1}^{m}k'_i$$

이다. 그러므로, 시스템 (1) 은 index 를 $\{k'_1, k'_2, \cdots, k'_m\}$으로 하는 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능하다. (Q.E.D.)

따름정리 4: 만일 시스템 (1)이 index 를 $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$으로 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능할때, 가 되는 가 존재하면 index 의 최대값을 원래 index 의 최대값보다 하나 작게 하는 선형화가 가능하다.

정리 1과 정리 3에서 제한된 dynamic feedback 선형화 가능여부를 점검하는 데, 유한한 index 집합에 대해서만 고려하면 된다. 따라서, 점검할 수 있는 (ckeckable) 필요충분조건을 얻었다. 다음의 정리에서는 이 유한한 index 집합에 대해 조건을 점검하는데, 보다 체계적이고 효율적으로 점검하는 방법을 찾는다.

정리 5: 만일 시스템 (1) 이 index 를 $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$으로 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능하면,

(a) Q_i, $i\geq 0$들은 dimension 이 상수인 involutive distribution 이다.

(b) $\triangle_i$, $i\geq 0$들은 dimension 이 상수인 involutive distribution 이다.

증명:

(a) 만일 시스템 (1) 이 index 를 $\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$으로 제한된 dynamic feedback 을 사용한 선형화가 가능하면, D_i, $i\geq 0$들은 dimension 이 상수인 involutive distribution 이다. 여기서,

$$D_0=Q_0$$

이고, $p\geq 1$에 대하여

$$D_p=Q_p+sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_j^i}\,|\,k_i\geq 1,\ k_i-p\leq j\leq k_i\right\}$$

$$Q_p\subset sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

이므로, Q_p, $p\geq 0$들은 dimension 이 상수인 involutive distribution 이다.

(b) 조건(a)로부터 조건(b)를 유도한다. (7)식의 정의에 의하여,

$$\Delta_i=sp\{V_1(x),V_2(x),\ldots,V_\alpha(x)\}$$

라면,

$$\begin{aligned}Q_i&=sp\{V_1(x)+\lambda_1(z)W_1(x),\ldots,V_\alpha(x)+\lambda_\alpha(z)W_\alpha(x)\}\\&=sp\{U_1(x,z),\ldots,U_\alpha(x,z)\}\end{aligned}$$

$$\lambda_i(0)=0$$

이다. 즉,

$$U_i(x,0)=V_i(x)$$

(a) 에 의해서

$$\left[U_i,U_j\right]\in sp\{U_1,\ldots,U_\alpha\}$$

이므로,

$$\begin{aligned}\left[U_i,U_j\right]_{z=0}&\in sp\{U_1,\ldots,U_\alpha\}|_{z=0}\\&=sp\{U_1,\ldots,U_\alpha\}\end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}\left[U_i,U_j\right]&=\left[V_i(x)+\lambda_i(z)W_i(x),V_j(x)+\lambda_j(z)W_j(x)\right]\\&=\left[V_i,V_j\right]+\lambda_i(z)\left[W_i,V_j\right]+\lambda_j(z)\left[V_i,W_j\right]+\lambda_i(z)\lambda_j(z)\left[W_i,W_j\right]\end{aligned}$$

이므로

$$\left[U_i,U_j\right]_{z=0}=\left[V_i,V_j\right]$$

즉,

$$\left[V_i,V_j\right]\in sp\{V_1,\ldots,V_\alpha\}$$

따라서, $\triangle_i$, $i\geq 0$들은 dimension 이 상수인 involutive distribution 이다. (Q.E.D.)

정리 5(a) 의 증명에서 역으로, 조건(a) 가 만족하면 시스템이 제한된 dynamic feedback 선형화가 가능하다는 것도 쉽게 증명할 수 있다. 또, 정리 5 (b) 의 대우 조건 (contrapositive) 을 이용하면, 제한된 dynamic feedback 선형화가 가능한 index 를 발견하는데, 불필요한 계산 등을 사전에 제거할 수 있어서, 훨씬 더 쉽게 필요충분조건을 점검할 수 있다. 이를 다음 절의 예제에서 보인다.

Ⅳ. Examples

Example 1: 다음의 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}=f(x)+u_1g_1(x)+u_2g_2(x)$$

$$f(x)=\begin{bmatrix}x_2\\0\\x_4\\0\end{bmatrix},g_1(x)=\begin{bmatrix}x_2\\0\\0\\1\end{bmatrix},g_2(x)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

간단한 계산에 의하여

$$ad_fg_1(x)=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\end{bmatrix},ad_fg_2(x)=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix},[g_1,g_2]=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

가 되어 $\overline{D_0}$=sp{g_1,g_2}가 involutive 가 아니므로 static feedback 선형화가 불가능함을 알 수 있다. 제한된 dynamic feedback 선형화 가능 여부를 판단하기 위하여 $(k_1,k_2)=(0,1),(0,2),\cdots,(4,0)$의 각 경우에 대하여 조건을 점검하여야 하는데, 정리 5 를 이용하여 불필요한 조건들은 건너뛸 수 있다. 즉, sp{g_1,g_2,ad_fg_1} 은 involutive 가 아니므로 $(k_1,k_2)=(0,1)$로서는 dynamic feedback 선형화가 불가능하다. sp{g_1,g_2,ad_fg_2}는 involutive distribution 이므로 $(k_1,k_2)=(1,0)$을 index 로 하는 선형화 가능 여부는 다음과 같이 점검할 수 있다.

$$\Delta_1=sp\{g_1,g_2,ad_fg_2\}$$
$$\Delta_2=sp\{g_1,g_2,ad_fg_2,ad_fg_1,ad_f^2g_2\}=sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_4}\right\}$$

이므로 involutive 하다.

$F=f+z_1g_1$

이므로

$$Q_1=sp\{g_1,g_2,ad_Fg_2\}=sp\{g_1,g_2,ad_fg_2+z_1[g_1,g_2]\}$$
$$Q_2=sp\{g_1,g_2,ad_Fg_2,ad_Fg_1,ad_F^2g_2\}=sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_4}\right\}$$

가 되어 Q_1과 Q_2는 involutive 이다. 또,

$$D_1=Q_1+sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}\right\}$$
$$D_2=Q_2+sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}\right\}$$

는 involutive 이다. 따라서, 주어진 시스템은 index 를 로 하는 dynamic feedback 선형화가 가능하다.

Example 2: 다음의 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}=f(x)+u_1g_1(x)+u_2g_2(x)$$
$$f(x)=\begin{bmatrix}x_2\\0\\x_2+x_3+x_4\\0\end{bmatrix},g_1(x)=\begin{bmatrix}x_2\\0\\0\\1\end{bmatrix},g_2(x)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

이때 간단한 계산에 의하여

$$ad_fg_1(x)=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\end{bmatrix},ad_fg_2(x)=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$$
$$ad_f^2g_1(x)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},ad_f^2g_2(x)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$
$$[g_1,g_2]=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

가 되어 D_0=sp{g_1,g_2}가 involutive 가 아니므로 static feedback 선형화가 불가능함을 알 수 있다. 또, sp{g_1,g_2,ad_fg_1}과 sp{g_1,g_2,ad_fg_2}은 invo-lutive 하지 않다는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서, 주어진 시스템은 $(k_1,k_2)=(0,1)$ 또는 $(1,0)$ 로서 (즉, 적분기를 1개만 사용해서는) 선형화가 불가능하다.

sp{g_1,ad_fg_1}은 involutive 하지만 sp{$g_1,g_2,ad_fg_1,ad_f^2g_1$} 이 involutive 하지 않으므로, $(k_1,k_2)=(2,0)$ 로서 선형화가 가능하지 않다.

sp{g_1,ad_fg_2}이 involutive 하고, sp{$g_1,g_2,ad_fg_2,ad_f^2g_2$}도 역시 involutive 하므로, $(k_1,k_2)=(2,0)$로 하는 dynamic feedback 선형화 가능 여부를 다음과 같이 판단할 수 있다.

$F=f+z_1g_1$

이므로

$$Q_0=sp\{g_2\}$$
$$Q_1=sp\{g_2,ad_Fg_2\}=sp\{g_2,ad_fg_2+z_1[g_1,g_2]\}$$
$$Q_2=sp\{g_1,g_2,ad_Fg_2,ad_F^2g_2\}=sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_4}\right\}$$

이므로 involutive 하다. 그러나,

$$D_1 = Q_1 + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_1^1}, \frac{\partial}{\partial z_2^1}\right\}$$

은 involutive 하지 않으므로, $(k_1, k_2)=(2, 0)$로서 제한된 dynamic feedback 선형화가 가능하지않다.

$$Q_0 = sp\{g_2\}$$
$$D_0 = Q_0 + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_3^1}\right\}$$
$$Q_1 = sp\{g_2, ad_F g_2\} = sp\{g_2, ad_f g_2 + z_1^1[g_1, g_2]\}$$
$$D_1 = Q_1 + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_2^1}, \frac{\partial}{\partial z_3^1}\right\}$$
$$Q_2 = sp\{g_2, ad_F g_2, ad_F^2 g_2\}$$
$$D_2 = Q_2 + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_1^1}, \frac{\partial}{\partial z_2^1}, \frac{\partial}{\partial z_3^1}\right\}$$
$$Q_3 = sp\{g_1, g_2, ad_F g_2, ad_F^2 g_2, ad_F^3 g_2\} = sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_4}\right\}$$
$$D_3 = Q_3 + sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_1^1}, \frac{\partial}{\partial z_2^1}, \frac{\partial}{\partial z_3^1}\right\}$$

들이 involutive 하므로, $(k_1, k_2)=(3, 0)$ 로서 제한된 dynamic feedback 선형화가 가능하다.

Example 3: Example 2 의 시스템에서 $g_1(x)$만 다음과 같이 바꿔보자.

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이때, $\mathbf{ad}_f g_1$, $ad_f g_2$, $ad_f^2 g_1$, $ad_f^2 g_2$는 Example 2 에서와 같다. 그러나,

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

가 되어

$$Q_1 = sp\{g_2, ad_F g_2\} = sp\{g_2, ad_f g_2 + z_1[g_1, g_2]\}$$

가 involutive 하지 않으므로, $k_1 \geq 2$ & $k_2=0$로서도 제한된 dynamic feedback 선형화가 가능하지 않는다. 그러므로, 주어진 시스템은 제한된 dynamic feedback 선형화가 가능하지 않다.

V. 결 론

본 논문은 (1)식의 비선형 시스템이 (static) feedback 선형화가 가능하지 않을 때, 더 강력한 제어 수단인 dynamic feedback 을 사용하여 선형 시스템으로 변환 시키는 문제를 다뤘다. 그러나, (2)식의 일반적인 dynamic feedback 을 사용한 문제의 필요충분조건은 얻기 힘들다. 따라서, 이 문제 해결의 중간 단계로서 자주 고려되는 (4), (5)식의 제한적인 dynamic feedback (pure integrators followed by static feedback) 을 사용한 선형화 문제의 필요충분조건을 정리1과 정리3에서 유도하였다. 또, 정리5는 정리1과 정리3의 조건들의 만족 여부를 점검하는 데 불필요한 계산들을 피할 수 있게 한다. 이의 유용성을 4절의 간단한 예제들에서 보였다. 본 논문의 필요충분조건을 이용하여 (static) feedback 선형화가 가능하지 않은 시스템에 대하여 제한적인 dynamic feedback 선형화가 가능한 지 여부와 선형화 시키는 데 필요한 dynamic feedback 은 구할 수 있지만, 제한적인 dynamic feedback 선형화가 가능하지 않다고 하여 (일반적인) dynamic feedback 선형화가 가능하지 않다고는 하지 못한다. 예를 들어, 전 절의 예제3의 시스템인 경우 제한적인 dynamic feedback 선형화는 불가능하지만,

$u_1=v_1-v_2$
$u_2=v_2$
(여기서, v_1과 v_2는 새로운 입력)

라고 하면,

$$\dot{x} = f(x) + v_1\tilde{g}_1(x) + v_2\tilde{g}_2(x)$$
$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{g}_1(x) = g_1(x)\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{g}_2(x) =$$

가 되어

$$ad_f\tilde{g}_1(x) = ad_f g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, ad_f^2\tilde{g}_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

가 됨을 쉽게 알 수 있다. 따라서, $\mathrm{sp}\{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, ad_f\tilde{g}_2\}$가 involutive 하고,

$$\mathrm{sp}\{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, ad_f\tilde{g}_1, ad_f\tilde{g}_2, ad_f^2\tilde{g}_2\} = \mathrm{sp}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right\}$$

$$\mathrm{sp}\{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, ad_f\tilde{g}_2\} = \mathrm{sp}\{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, ad_f\tilde{g}_2 + z_1[\tilde{g}_1, \tilde{g}_2]\} = \mathrm{sp}\{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, ad_f\tilde{g}_2\}$$

가 되어 위 두 distribution 들도 역시 involutive 하다. 그러므로, 예제3에 주어진 시스템은 위의 static feedback 을 먼저 가한 후 새로운 입력 v_1과 v_2에 대해 index 를 $(k_1, k_1)=(1,0)$로 하는 순수 적분기를 걸어준 후에 extended state 에 대한 static feedback 으로서 선형화가 가능하다. 여기서, 사용한 전체 feedback 은 static feedback, 순수 적분기, static feedback 을 차례로 사용하였으므로, 우리가 정의한 제한적인 dynamic feedback 의 범주를 벗어난다.

일반적인 dynamic feedback 문제를 해결하기 위해 위에 제시한 static feedback 과 순수 적분기를 번갈아 쓰는 방법을 생각해 볼 수 있으나, 현재로서는 성패를 예측하기 힘들다.

参考文獻

[1] R.W. Brockett, "Feedback invariants for nonlinear systems," IFAC Congress, Helsinki, 1978.

[2] B. Charlet, J. Levine, and R. Marino, "Dynamic feedback linearization with application to aircraft control," Proceedings of 27th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, Texas, 1988, pp.701-705.

[3] B. Charlet, J. Levine, and R. Marino, "On dynamic feedback linearization," Systems & Control Letters, Vol.13, 1989, pp.143-151.

[4] B. Charlet, J. Levine, and R. Marino, "New sufficient conditions for dynamic feedback linearization," Geometric Methods in Nonlinear Control Theory, IFAC, 1989.

[5] J.W. Grizzle, "Feedback linearization of discrete-time systems," in Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.83, Springer-Verlag, 1986, pp.273-281.

[6] L.R. Hunt, M. Luksic, and R. Su, "Exact linearization of input-output systems," *Int. J. Control*, Vol.43, 1986, pp.247-255.

[7] L.R. Hunt, R. Su, and G. Meyer, "Design for multi-input nonlinear system," in Differential Geometric Control Theory, R.W. Brockett, et al. (ed), Boston: Brikhauser, 1983, pp.268-293.

[8] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, 2nd ed., Spring-Verlag, 1989.

[9] A. Isidori, "Control of nonlinear systems via dynamic state feedback," Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory, M. Fliess and M. Hazewinkel (ed.), Reidel, 1986, pp.121-145.

[10] A. Isidori, C.H. Moog, and A. De Luca, "A sufficient condition for full linearization via dynamic state feedback," Proceedings of 25th IEEE Conference on Decision and Control, Athens, Greece, 1986, pp.203-208.

[11] B. Jakubzyk, "Feedback linearization of discrete-time systems," Systems & Control Letters, Vol.9, 1987, 411-416.

[12] B. Jakubzyk and W. Respondek, "On the linearization of control systems," Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Physics, Vol.28, 1980, pp.517-522.

[13] A.J. Krener, "Approximate linearization by state feedback and coordinate change," Systems & Control Letters, Vol.5, 1984, pp.181-185.

[14] A.J. Krener, "On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems," SIAM J. Control, Vol.11, 1973, pp.670-679.

[15] A.J. Krener, A. Isidori, and W. Respondek, "Partial and robust linearization by feedback," Proceedings of 22nd IEEE Conference on Decision and Control, San Antonio, TX, 1983,

pp.126-130.

[16] W. Kang, "Controller form, invariants and dynamic feedback linearization: From approximation point of view," Proc. of 1992 American Control Conference, 1992, pp.3076-3080.

[17] H.G. Lee, Linearization of Nonlinear Discrete Time Control Systems, Ph.D. Dissertation, Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Texas at Austin, TX, August 1986.

[18] H.G. Lee, A. Arapostathis, and S.I. Marcus, "On the linearization of discrete time systems," *International Journal of Control*, Vol.45, No.5, 1987, pp.1803-1822.

[19] H.G. Lee, H.T. Jeon, and W.Y. Yang, "A simplified algorithm for synthesis problems via dynamic feedback," *KITE J. of Electronics Engineering*, Vol. 1, 1990, pp.22-27.

[20] H.G. Lee and S.I. Marcus, "Approximate and local linearization of nonlinear discrete-time systems," *International Journal of Control*, Vol. 44, No.4, 1986, pp.1103-1124.

[21] R. Marino, "On the largest feedback linearizable subsystem," Systems & Control Letters, Vol.6, 1986, pp.345-351.

[22] H. Nijmeijer, "Local (dynamic) input-output decoupling of discrete time nonlinear systems," *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, Vol.4, 1987, pp.237-250.

[23] H. Nijmeijer and W. Respondek, "Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.33, 1988, pp.1065-1070.

[24] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer-Verlag New York Inc., 1990.

[25] R. Su, "On the linear equivalents of nonlinear systems," Systems & Control Letters, Vol.2, 1982, pp.48-52.

[26] H.J. Sussmann, "Lie brackets, real analyticity and geometric control," Differential Geometric Control Theory, R.W. Brockett, et al.(ed), Boston: Birkhauser, 1983, pp.1-116.

[27] W. Wonham, Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, 2nd ed., Springer-Verlag New York Inc., 1979.

[28] 이 홍기, 전 홍태, "비선형 시스템의 Dynamic Feedback 을 이용한 합성," 대한전자공학회 논문지, 28-B권, 1991, pp.19-26

著者紹介

李 鴻 奇(正會員) 第 31卷 第 6號 參照
현재 중앙대학교 제어계측공학과 부교수

全 洪 兌(正會員) 第 31卷 第 6號 參照
현재 중앙대학교 전자공학과 부교수