論文94-31B-8-4

개선된 Unit 보간 알고리듬을 이용한 강안정화 제어기 설계

(Strong Stabilization Controller Design Using Advanced Unit Interpolation Algorithm)

尹 漢 五*, 申 昌 勳**, 朴 烘 培***

(Han O Yun, Chang Hoon Shin and Hong Bae Park)

要 約

본 논문은 H^{∞} 에 속하는 unit 함수를 구하는 개선된 보간 알고리듬을 제시한다. 제안된 알고리듬은 무한대에서 중근을 갖는 경우에도 보간이 가능한 것으로 기존의 DPL 보간 알고리듬을 근거로 한다. 얻어진 unit 함수를 이용하여 폐루프 시스템을 강안정화시키는 제어기를 설계하고, 다(多) 플랜트의 연립안정화 제어기 설계에도 확장됨을 보여준다. 또한 폐루프 시스템의 내부적 안정성을 검토하여 전달함수의 근이 안정영역에 존재함을 보인다.

Abstract

This paper presents an improved interpolation algorithm which enables to find a unit function in H^{∞}. From the proposed algorithm, the interpolation problem on the infinity point with multiplicity can be solved. This is based on the DPL algorithm, the acquired unit function has low order and can be directly applied to strong/simultaneous stabilization problem in control systems. Finally, we verify that poles of transfer function of closed-loop system exist in stable region, while investgating internal stability.

I. 서 론

고전적 제어이론에서는 플랜트의 차수가 고정되어 있고 매개변수가 일정하다는 전제하에서 제어기를 설계한다. 그러나 실질적으로 플랜트를 정확히 모델화하기가 힘들고 외란(disturbance)이나 섭동(perturbation) 등의 외부입력으로 인하여 플랜트의 동역학이 변하므로 플랜트의 폐루프 안정성을 보장할 수 없다. 그러므로 공칭플랜트를 포함하는 일정범위 내의 플랜트들에 대해서도 안정성을 보장할 수 있는 견실제어(robust control)가 이루어져야 한다.

견실제어이론에서는 모델화 오차, 비선형성, 측정 오차, 및 외란 등의 불확실성(uncertainty)을 가지는 시스템이나 모델화가 어려운 동역학 시스템 등에

*正會員, 龜尾專門大學 電子科
(Dept. of Electronics, Kumi Junior College)
**正會員, 韓國電力公社 技術硏究院
(Reserch Center, KEPCO)
***正會員, 慶北大學校 電子工學科
(Dept. of Electronics, Kyungpook Nat'l Univ.)
接受日字 : 1993年 12月 16日

서 폐루프 안정성을 유지하고 성능최적화를 이루는 제어기의 해석과 설계를 다룬다.

견실제어 분야 중 안정한 제어기로 폐루프를 안정화시키는 강안정화(strong stabilization)와 고정된 제어기로 여러개의 플랜트를 안정화시키는 연립안정화(simultaneous stabilization)는 Youla 등[1], Vidyasagar 등[2] 과 Dorato 등[3]에 의해 많은 연구가 되고 있다. 이들은 플랜트가 갖고 있는 s-평면 우반면 영점들을 보간하여 H^∞ 에 속하는 unit 함수를 찾아 폐루프를 강안정화시키고[1] [3], 또 플랜트들을 연립안정화시키기 위하여 unit 함수가 존재하기 위한 필요충분 조건을 제시하는 알고리듬을 발표하였다.[2] [3]

H^∞ 에 속하는 unit 함수를 찾는 알고리듬에는, Youla 등[1]이 발표한 Euclid 제법을 이용한 것과 Park 등[3]의 양실(positive real)함수을 이용한 것 등이 있다. 후자의 알고리듬은 전자의 알고리듬에 비해 복소점에서도 보간할 수 있으며 상대적으로 보간된 unit 함수의 차수를 낮게 만들 수 있는 장점이 있다. 그러나 이 알고리듬은 무한대에서 다중근을 보간점으로 하는 경우에는 미해결로 남겨 두고 있다.

본 논문에서는 Park 등[3]의 보간 알고리듬을 기초로 하여 무한대에 중근을 가지는 보간점이 포함되어 있는 경우에도 보간할 수 있는 개선된 보간 알고리듬을 제시하고, 얻어진 unit 함수를 이용하여 폐루프를 강안정화시키는 제어기를 설계한다.

Ⅱ. 수학적 배경

이 장에서는 본문에서 사용되는 용어들을 소개하고자 한다. C_{+e}를 무한대점을 포함한 폐우반면(CRHP: closed right half plane), S를 안정 진유리함수(proper stable rational function)라 정의한다.

Hardy space

BIBO(bounded input bounded output)안정 시스템의 전달함수 공간에 기초를 둔 Hardy space를 실유리함수(real rational function)에 국한하기로 한다.

함수 G(s)가 개우반면(ORHP: open right half plane)에서 해석적이며 유한한 H^∞ -노옴을 가지면 Hardy space H^∞ 라 하며 G(s)의 H^∞ -노옴은

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)| < \infty \qquad (1)$$

와 같이 정의된다.

소인수 분해(coprime factorization)와 Bezout 항등식

전달함수 $G(s)$의 우소인수분해(right coprime factorization) 및 좌소인수분해 (left coprime factorization)는 각각 $G = N_r D_r^{-1} = D_l^{-1} N_l$과 같이 쓸 수 있으며, 여기서 Nr, Nl, Dr 및 Dl 은 안정 진유리함수이다. N_r과 D_r은 우소인수함수, N_l과 D_l은 좌소인수함수이며 S에 속한 U, V가 서로소일때, S에 속하는 X, Y가 존재할 필요충분조건은

$$XU + YV = I \qquad (2)$$

이다.

unit 함수

함수 $G(s)$와 그 역(inverse)이 H^∞ 에 속하면 unit 함수라 한다. 따라서 함수 $G(s) = N(s)/D(s)$가 unit 함수가 되기 위해서는 분모, 분자의 차수가 같아야 하고 모두 Hurwitz 다항식이어야 한다.

Ⅲ. 폐루프 시스템의 강안정화와 연립안정화

이 절에서는 폐루프를 안정화시키는 안정한 제어기를 찾는 강안정화 문제와 두개 이상의 플랜트들을 동시에 안정화시키는 제어기를 구하는 연립안정화 문제에 관하여 논하기로 한다.

1. 강안정화

그림 1의 궤환시스템을 고려하자. 여기서 $P(s)$는 플랜트, $C(s)$는 제어기, u는 입력, y는 출력이다.

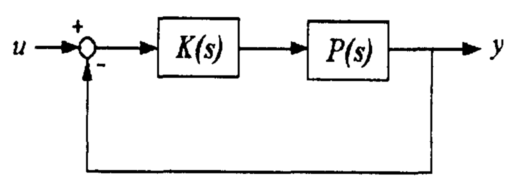

그림 1. 궤환시스템

Fig. 1. Feedback system.

만약 플랜트 $P(s)$가 안정한 $C(s)$로써 안정화된다면 강안정화되었다고 말한다.

정리 1 [5]

플랜트 $P(s)$의 우반면에 있는 영점들 사이의 극점들의 갯수가 짝수이면 $P(s)$는 강안정화 가능이다. 이 성질을 parity interlacing property(p.i.p.)라 부른다. 즉, 플랜트 $P(s)$가 p.i.p.조건을 만족하면 강안정화 가능이다.

다음은 unit 보간법을 도입하여 강안정화를 검토해 보기로 한다. 주어진 플랜트 $P(s)$를 서로소인 $N(s)$와 $D(s)$로 표현하면 $P(s) = N(s)/D(s)$가 되고, 폐루프를 안정화시키는 제어기 $C(s)$는

$$X(s)N(s)+Y(s)D(s) \in U(s) \tag{3}$$

로부터 $Y(s) = 1$, $X(s) = C(s)$로 두면

$$C(s)=\frac{U(s)-D(s)}{N(s)} \tag{4}$$

가 되며, 여기서 $U(s)$는 H^∞ 에 속하는 unit이다.

$U(s)$와 플랜트의 분자 $N(s)$의 폐우반면에서의 영점들에서 $U(\alpha_i) = D(\alpha_i)$가 만족되게 보간하면 안정한 제어기 $C(s)$를 구할 수 있다. 그러므로 강안정화 문제는 H^∞ 에 속하는 unit를 찾는 보간문제로 귀결된다.

2. 연립안정화

플랜트 $P_0(s)$는 안정한 공칭플랜트이고 $P_1(s)$, $P_2(s)$, , $P_l(s)$는 섭동을 가진 플랜트로 안정여부에는 무관하다고 가정한다. 그러면 $P_0(s)$, $P_1(s)$, $P_2(s)$, $P_l(s)$의 $(l+1)$개의 플랜트를 안정화시키는 제어기 $K(s)$를 찾는 문제를 연립안정화문제라 한다. $(l+1)$개의 플랜트들을 안정화시키는 문제는 한개의 안정한 제어기를 사용하여 l개의 플랜트를 안정화시키는 문제로 귀결된다.[5]

그림 2와 같이 안정한 플랜트 $P_0(s)$에 대하여 섭동을 가정한 임의의 플랜트 $P_1(s)$를 고려한 두 플랜트의 연립안정화 제어기를 구하는 문제를 알아보자.

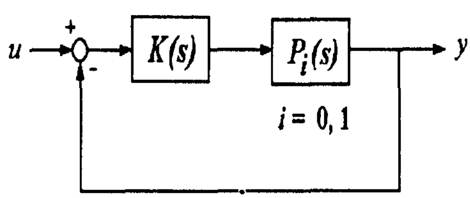

그림 2. 두 플랜트의 연립안정화를 고려한 단위 궤환시스템

Fig. 2. Unity feedback system with two plants.

보조정리 1 [5]

공칭 플랜트 $P_0(s)$가 안정하고 $P_1(s)$가 임의의 플랜트라고 가정할 때 플랜트 $P_0(s)$와 $P_1(s)$는 보조플랜트 $P_A(s) = P_1(s)-P_0(s)$가 강안정화 가능하다면 연립 안정화된다.

플랜트 $P_1(s)$의 소인수분해를 (N_1, D_1)이라 할 때 $(N_A, D_A) = (N_1-P_0D_1, D_l)$ 은 보조플랜트 $P_A(s) =$ P1(s)-P0(s)의 소인수분해가 된다. 왜냐하면 Bezout 항등식

$$X_1(s)\left[N_1(s)-P_0(s)D_1(s)\right]+\left[Y_1(s)-X_1(s)P_0(s)\right]D_1(s)=1 \tag{5}$$

을 만족하기 때문이며, 여기서 $X_1(s)$와 $Y_1(s)$는 서로소이다. 이때 $P_A(s) = P_1(s)-P_0(s)$를 강안정화시키는 제어기 $R(s)$를 가정하면 폐루프를 안정화시킬 조건식

$$D_1(s)+R(s)\left[N_1(s)-P_0(s)D_1(s)\right] \in U(s) \tag{6}$$

로부터

$$R(s)=\frac{U(s)-D_A(s)}{N_A(s)} \tag{7}$$

가 유도되며 unit 보간법으로 구한 $R(s)$로부터 동시안정화 제어기 $K(s)$를 구할 수 있다. 즉 식(6)을 변환하여

$$\left[1-R(s)P_0(s)\right]D_1(s)+R(s)N_1(s) \in U(s) \tag{8}$$

이 되고, 이로부터 동시안정화 제어기 $K(s)$는

$$K(s)=\frac{R(s)}{1-R(s)P_0(s)} \tag{9}$$

으로 구할 수 있으며, 이 제어기는 플랜트 $P_0(s)$와 $P_1(s)$를 각각 안정화시킬 수 있다.

Ⅲ. DPL 보간 알고리듬

이 장에서는 H^∞ 에 속하는 unit 함수를 구하는 DPL 보간 알고리듬[3]을 소개한다. 이 알고리듬은 unit 함수를 구하는 기존의 알고리듬에 비해 보다 낮은 차수의 unit 함수를 얻을 수 있다. 먼저 s-평면 우반면의 단순근을 α_i라 하고 α_i에 대한 보간값을 β_i라 가정할 때 k개의 보간점을 가지고 있다면

$$(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)\ldots(\alpha_k,\beta_k) \tag{10}$$

로 나타낼 수 있으며 보간조건

$$Z(\alpha_i)=\beta_i \quad i=1,2,\ldots,k \tag{11}$$

을 만족하는 PR 함수를 찾는 것이 목적이다.

여기서 사용되는 unit 보간 알고리듬의 기본개념은, PR 함수로 보간될 수 있도록 보간값 β_i에 m승근을 취하는 것이다. 즉 $Z(\alpha_i) = \sqrt[m]{\beta_i}$ 와 같이 바꾸어, 새로운 보간값을 $Z(\alpha_i) = z_i$로 나타낸다.

PR 함수를 이용한 알고리듬[7]은 보간점 α_1에 대하여 보간값을 $Z(\alpha_i) = z_i$ 혹은 $Z(\sigma_1 + j\omega_1) = R_1 + jX_1$ 으로 나타내고, 사상은

$$W(s) = \frac{a_1(s)Z(s) + b_1(s)}{c_1(s)Z(s) + d_1(s)} = T_1[Z(s)] \qquad (12)$$

으로 정의한다. 식(12)의 역사상은

$$Z(s) = \frac{d_1(s)W(s) - b_1(s)}{-c_1(s)W(s) + a_1(s)} = T_1^{-1}[W(s)] \qquad (13)$$

이다. 여기서 복소수 $\alpha_1 = \sigma_1 + j\omega_1$에 대하여

$$\begin{aligned} a_1(s) &= I_1^{(1)}s^2 + |\alpha_1|^2 \\ b_1(s) &= -I_2^{(1)}s \\ c_1(s) &= -I_3^{(1)}s \\ d_1(s) &= I_4^{(1)}s^2 + |\alpha_1|^2 \end{aligned} \qquad (14)$$

이고 실수 α_1에 대하여

$$\begin{aligned} a_1(s) &= s_1 \\ b_1(s) &= -sz_1 \\ c_1(s) &= -s \\ d_1(s) &= \alpha_1 z_1 \end{aligned} \qquad (15)$$

이다. 그리고 Youla 지수 I_i는

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} &= \frac{\frac{R_1}{\sigma_1} - \frac{X_1}{\omega_1}}{\frac{R_1}{\sigma_1} + \frac{X_1}{\omega_1}} \\ I_2^{(1)} &= \frac{2|z_1|^2}{\frac{R_1}{\sigma_1} + \frac{X_1}{\omega_1}} \\ I_3^{(1)} &= \frac{2}{\frac{R_1}{\sigma_1} - \frac{X_1}{\omega_1}} \\ I_4^{(1)} &= \frac{1}{I_1^{(1)}} \end{aligned} \qquad (16)$$

이다. Youla 지수가 양일 때, $Z(s)$가 PR이고 $Z(\alpha_1) = z_1$ 값으로 보간된다면 $W(s) = T_1[Z(s)]$ 역시 PR이다. 역으로 W가 PR이면 $Z(s) = T_1^{-1}[W(s)]$ 역시 PR이고 $Z(\alpha_1) = z_1$을 보간한다.[7]

순방향사상은 k개의 보간점 z_{11}, z_{12}, , z_{1l}를 PR함수 $Z(s)$로 보간하는 문제를, $(k-1)$개의 보간점 T1 (z_{12}), $T_1(z_{13})$, , $T_1(z_{1k})$를 PR함수 $W(s)$로 보간하는 문제로 변환한다. 계속해서 새로운 보간값 $z_{22} = T_1(z_{12})$는 $(k-2)$개의 보간점을 PR함수로 보간하는 문제로 변환하는데 사용되며 한개의 보간값이 나타날 때까지 이 과정을 계속한다. 최종적인 보간배열의 형태는 그림 3과 같다.

$$\begin{array}{cccc} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1k} \\ & z_{22} & \cdots & z_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & z_{kk} \end{array}$$

그림 3. 보간 배열의 형태

Fig. 3. Interpolation array pattern.

보간점이 복소수와 실수를 동시에 가지는 경우에는 복소수를 선두에, 실수를 후미에 놓아서 z_{kk}가 실수값이 되도록 한다. 복소점 보간의 경우에 식(12)와 식(13)은 실사상이므로 $\omega_i > 0$인 점에서만 보간하면 공액복소점은 자연히 보간된다.

보간문제에 있어서 해가 존재할 충분조건은 보간배열에서 대각성분에 관한 Youla 지수가 양이면 되고 대각성분이 실수이면 보간된 값이 양이면 된다. 이것은 Nevanlinna-Pick 행렬의 non-negative definite 조건과 같은 것이다.[7]

만약 z_{kk}가 실수라면, 역사상에 의해

$$Z(s) = T_1^{-1}T_2^{-1}\ldots T_{k-1}[Z_k(s)] \qquad (17)$$

인 SPR함수가 구해진다.

만약 z_{kk}이 복소수라면, $Z_{k-1}(s)$는

$$Z_{k-1}(s) = \frac{d_{k-1}(s)Z_k(s) - b_{k-1}(s)}{-c_{k-1}(s)Z_k(s) + a_{k-1}(s)} \qquad (18)$$

에 의해 보간되어야 하고, $Z_k(s)$는 임의의 양실함수이다. 가장 간단한 선택은 $Z_k(s) = 0$으로 두는 경우이다.

보간점 $s = \alpha_i$가 중근일 경우에는

$$U(a_i) = D(a_i) \qquad (19)$$

로부터 $s = \alpha_i$에서

$$\frac{dU(s)}{ds} = \frac{dD(s)}{ds} \qquad (20)$$

가 성립하며, 여기서 $U(s)$는 unit 함수이다. 보간값의 Youla 지수가 양이 되기 위하여 m승근을 취한

것을 고려하면 $U(s)$ = $[Z(s)]^m$으로부터

$$U'(s)=m[Z(s)]^{m-1}Z'(s) \tag{21}$$

가 성립하고 $s=\alpha_i$에서 $Z(\alpha_i)=z_i$일 때

$$Z_1'(\alpha_1)=\frac{U'(\alpha_1)}{m(z_1)^{m-1}}=z_1' \tag{22}$$

이 된다. 이것을 이용하면 보간점 α_i에서 $U(\alpha_i)=\beta_1$, $U'(\alpha_i)=\beta_1'$을 보간한다는 것은 $Z(\alpha_i)=z_1$과 $Z'(\alpha_i)=\alpha_i'$을 보간하는 SPR 함수를 찾는 것으로 귀결된다. 즉, 주어진 보간값 β_1을 m승근 취한 새로운 보간값 z_1과 z_1'을

$$z_1=\beta_1^{1/m},\ z_1'=\frac{\beta_1'}{m\,\beta_1^{(1-1/m)}} \tag{23}$$

으로 취하여 순방향사상으로부터 z_{22}를 얻는다. 이때 순방향사상은 실수값 α_i에 대하여

$$W(s)=\frac{Z(s)-s_1Z(s)}{Z(s)+s_1Z(s)} \tag{24}$$

으로 주어진다.[7]

결론적으로, $Z(\alpha_i)=\sqrt[m]{\beta_i}$를 보간하는 함수 $Z(s)$를 구하였다면 $U(\alpha_1)=\beta_1$를 보간하는 unit 함수는

$$U(s)=[Z(s)]^m \tag{25}$$

에 의해 구해진다.

Ⅳ. 개선된 DPL 보간 알고리듬

이 장에서는 무한대에 중근을 가지는 보간점이 포함되어 있는 경우에도 보간할 수 있는 개선된 DPL 보간 알고리듬을 제안한다.

1. 무한대 중근의 보간

폐루프를 강안정화시키는 제어기는 $C(s)$ = $[U(s) - D(s)]$ / $N(s)$이다. 여기서 $D(s)$, $N(s)$는 각각 플랜트의 분모, 분자이므로 $N(s)$의 C_{+e}영점은 제어기의 불안정한 극점이 된다. 따라서 이러한 $N(s)$의 영점을 상쇄시켜야 안정한 제어기를 구할 수 있다. 이를 위해 제어기의 분자도 $N(s)$의 영점과 동일한 영점을 가져야 하므로 $U(\alpha_1)$ - $D(\alpha_1)$ = 0을 만족해야 한다.

$N(s)$의 C_{+e}영점이 무한대에서 중근일 경우에는 $\alpha_1=\infty$(중근)에서 U [∞(중근)] $-D$ [∞(중근)] = 0을 만족해야 하므로, 함수 $U(s)$ - $D(s)$는 상대적 차수(relative degree)가 2이상인 진유리함수이어야 한다. 즉, $U(s)$ - $D(s)$의 분자의 최고차항과 다음차항의 계수가 0이 되게 하는 $U(s)$를 구하면 이와같은 조건을 만족시킬 수 있다.

2. 개선된 보간 알고리듬

보간점 α_i가 무한대에 중근만으로 주어진다면 $U(s)$ - $D(s)$ = 0의 최고차항과 다음차항의 계수가 0이 되도록 계수를 비교하여 쉽게 $U(s)$를 찾을 수 있다. 그러나 보간점 α i가 무한대에 중근 및 다른 실수점들을 포함한 경우에는, 두 보간조건을 동시에 만족하는 알고리듬이 요구된다. 이 문제는 DPL알고리듬을 도입함으로써 해결할 수 있다. 앞에서 설명한 보간배열의 맨 끝에 $D(s)$ = $D_1(s)$를 배치하여 재구성한 보간배열은 그림 4와 같다.

α_1	α_2	α_3	…	α_{k-1}	s
β_{11}	β_{12}	β_{13}	…	$\beta_{1(k-1)}$	$D_1(s)$
	β_{22}	β_{23}	…	$\beta_{2(k-1)}$	$D_2(s)$
		β_{33}	…	$\beta_{3(k-1)}$	$D_3(s)$
			⋱	⋮	⋮
				$\beta_{(k-1)(k-1)}$	$D_{k-1}(s)$
					$D_k(s)$

그림 4. $D(s)$가 배치된 보간배열

Fig. 4. Interpolation array with $D(s)$.

$(k-1)$번의 순방향사상을 통하여 무한대가 아닌 $(k-1)$개의 실수점들은 모두 없어지고, 함수 $D_1(s)$로부터 $(k-1)$번의 순방향사상으로 구하여진 $D_k(s)$만 남게 된다. 따라서 $(k-1)$번의 순방향사상 이후에는 무한대가 아닌 점을 고려하지 않아도 되므로 무한대에 중근을 가지는 경우만 보간조건을 만족하도록 $U_k(s)$ - $D_k(s)$의 최고차항과 다음차항의 계수가 0이 되도록 계수를 비교하여 $U_k(s)$를 구할 수 있다.

이렇게 구한 $U_k(s)$를 $(k-1)$번 역사상하면 무한대에 중근을 가지는 경우뿐만 아니라 무한대점 이외의 다른 실수점에서도 보간조건을 만족하는 unit 함수 $U(s)$ = $U_1(s)$를 구할 수 있다.

보간배열을 구성할 때 대각성분이 양이 되도록 보간값에 m승근을 취하였다면 $D_1(s)$도 m승근을 취하여야 한다. 따라서, $X_1(s)=\sqrt[m]{D_1(s)}$로 두고 보간배열을 재구성하여야 하며, 재구성한 보간배열은 그림 5와 같다.

multiplicity $= m$,

$$
\begin{array}{cccccc}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{k-1} & s \\
z_{11} & z_{12} & z_{13} & \cdots & z_{1(k-1)} & X_1(s) \\
 & z_{22} & z_{23} & \cdots & z_{2(k-1)} & X_2(s) \\
 & & z_{33} & \cdots & z_{3(k-1)} & X_3(s) \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & z_{(k-1)(k-1)} & X_{k-1}(s) \\
 & & & & & X_k(s)
\end{array}
$$

그림 5. $X(s)$가 배치된 보간배열
Fig. 5. Interpolation array with $X(s)$.

이 보간배열의 보간조건을 만족하는 함수 $Z(s)$ = $Z_1(s)$를 구하여 unit 함수 $U_1(s)$ = $[Z_1(s)]$ m을 구할 수 있다.

다음은 $X_1(s)$를 (k-1)번 순방향사상시킨 함수 $X_k(s)$로부터 $Z_k(s)$ - $X_k(s)$의 최고차항과 다음차항의 계수가 0이 되게 하는 $Z_k(s)$를 구하는 과정을 설명한다.

$D_k(s)$와 $X_k(s)$의 최고차항과 다음차항의 계수만 순방향사상에 관계되므로, 일반적으로

$$D_1(s) = \frac{s^n + as^{n-1} + \dots}{s^n + bs^{n-1} + \dots} \tag{26}$$

로 나타낼 수 있고, $Z_k(s)$ - $X_k(s)$의 최고차항과 다음차항의 계수가 소거될 수 있도록

$$X_1(s) = \sqrt[m]{D_1(s)} \tag{27}$$

를 정리하면

$$X_1(s) = \frac{s^n + \frac{(m-1)b+a}{m} s^{n-1} + \dots}{s^n + bs^{n-1} + \dots} \tag{28}$$

로 나타낼 수 있다. 이것을 (k-1)번 순방향사상시켰을때 구하여지는 $Z_k(s)$ - $X_k(s)$는

$$X_k(s) = \frac{A_k s^{n+(k-1)} + C_k s^{n+(k-2)} + \dots}{B_k s^{n+(k-1)} + D_k s^{n+(k-2)} + \dots} \tag{29}$$

이다. 여기서 A_k, B_k, C_k와 D_k의 초기값은

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 1 \\
B_1 &= 1 \\
C_1 &= \frac{(m-1)b+a}{m} \\
D_1 &= b
\end{aligned} \tag{30}
$$

이고, A_k, B_k, C_k와 D_k의 일반식은 l = 1, 2, …, k-1일때

$$
\begin{aligned}
A_{l+1} &= z_{ll} B_l \\
B_{l+1} &= A_l \\
C_{l+1} &= z_{ll} D_l - \alpha_l A_l \\
D_{l+1} &= C_l - \alpha_l z_{ll} B_l
\end{aligned} \tag{31}
$$

이다. $X_k(s)$가 구하여지면

$$Z_k(s) = \frac{ps+qb}{s+rc}, \quad p,q,r > 0, \tag{32}$$

라 두고 $Z_k(s)$ - $X_k(s)$의 최고차항과 다음차항의 계수가 0이 되도록 양수 p, q, r을 결정한다. 그러면

$$
\begin{aligned}
& A_k s^{n+k} + (C_k + rA_k) s^{n+(k-1)} + \dots \\
&= pB_k s^{n+k} + (pD_k + qB_k) s^{n+(k-1)} + \dots
\end{aligned} \tag{33}
$$

에서 A_k과 B_k는 양수이므로

$$p = \frac{A_k}{B_k} > 0 \tag{34}$$

이고, 양수인 q, r을 구하기 위하여 qB_k - rA_k = C_k - pD_k에서 C_k - pD_k가 양수이면 r = 1>0 이라 두고

$$q = \frac{C_k - pD_k + A_k}{B_k} > 0 \tag{35}$$

을 구할 수 있고, C_k - pD_k가 음수이면 q = 1>0이라 두고

$$r = -\frac{C_k - pD_k + B_k}{A_k} > 0 \tag{36}$$

을 구할 수 있다.

이와같이 p, q, r을 대입하여 구한 $Z_k(s)$를 (k-1)번 역사상하여 $Z_1(s)$를 구한다. 그러면 구하고자 하는 unit 함수는 $U_1(s)$ = $[Z_1(s))]$ m으로 구할 수 있다.

따라서 두개의 플랜트를 연립안정화시키는 제어기 $K(s)$는 식(9)로 부터

$$K(s) = \frac{R(s)}{1 - R(s)P_0(s)}, \quad R(s) \in S \tag{37}$$

이고, 여기서 $R(s)$는 구한 unit 함수와 식(7)의

$$R(s) = \frac{U(s) - D_A(s)}{N_A(s)} \tag{38}$$

을 이용하여 얻을 수 있다.

V. 예 제

이 장에서는 예제를 통하여 제안된 알고리듬의 타당성을 확인해보기로 한다.

주어진 플랜트가 $P(s)=\dfrac{(s-1)(s-4)}{(s-3)(s-2)(s+1)(s+2)}$ 일 때 소인수분해를 통하여 분자와 분모를 각각

$$N(s)=\frac{(s-1)(s-4)}{(s+1)^3(s+2)},\ D(s)=\frac{(s-3)(s-2)}{(s+1)^2} \tag{39}$$

와 같이 구한다. 보간조건은 무한대점과 실수점에서 각각

$$\begin{aligned} &U(1)=\frac{1}{2},\ U(4)=\frac{2}{25} \\ &U[\infty(\text{중근})]-D[\infty(\text{중근})]=0 \end{aligned} \tag{40}$$

이고 순방향사상을 통하여 보간배열

$$\begin{array}{llll} m=2 & & & \\ & 1 & 4 & s \\ & 0.7071 & 0.2828 & X_1(s) \\ & & 6 & X_2(s) \\ & & & X_3(s) \end{array} \tag{41}$$

를 얻었고

$$X_1(s)=\sqrt[2]{D(s)}=\frac{s^2-\frac{3}{2}s+\ldots}{s^2+2s+\ldots} \tag{42}$$

로부터 제안된 알고리듬을 통해 $X_3(s)$의 계수와 $Z_3(s)$ - $X_3(s)$의 분자의 최고차항 및 다음차항의 계수가 0이 되도록 $Z_3(s)$를

l = 1, 2

k	A_k	B_k	C_k	D_k
1	1	1	-1.5	2
2	0.7071	1	0.4142	-2.2071
3	6	0.7071	-16.071	-23.5858

$$Z_3(s)=\frac{8.48528s+268.7868}{s+1} \tag{43}$$

로 구하였다. 이것을 역사상하여 구한 $U_1(s)$는

$$\begin{aligned} U_1(s)&=[Z_1(s)]^2 \\ &=\left\{\frac{\left[(s+3.04385E-2)^2+4.81468^2\right](s+32.79446)}{(s+5.94925E-4)\left[(s+18.17737)^2+28.11002^2\right]}\right\}^2 \end{aligned} \tag{44}$$

이다. 결국 플랜트의 강안정화 제어기 $C(s)$는

$$C(s)=\frac{-1943.129(s+0.20411)(s-0.603323)(s+1)(s+2)\left[(s+17.77915)^2+16.96329^2\right]}{(s+5.94925E-4)^2\left[(s+18.17737)^2+28.11002^2\right]^2} \tag{45}$$

로 구해진다. 그러므로 폐루프 시스템의 내부적 안정[5] 은

$$H_{12}(P.C)=\frac{(s+0.0005949)^2(s-1)(s-4)\left(s^2+36.35474s+1120.59\right)^2}{(s+1)^3(s+2)\left(s^2+0.04628918s+23.15896\right)\left(s^2+0.07549399s+23.20549\right)(s+32.79215)(s+32.79677)} \tag{46}$$

로 안정영역에 있음을 알 수 있고, 연립안정화 제어기 $K(s)$를 구하는 문제는 강안정화 제어기 $C(s)$를 식(37)의 $R(s)$로 대체하여 구할 수 있다.

VI. 결 론

본 논문에서는 H^∞ 에 속하는 unit 함수를 보간하는 문제에서 무한대에 중근의 보간점이 포함되어 있는 경우에도 보간이 가능한 개선된 알고리듬을 제시하였다. 무한대에 중근을 가지는 경우, 보간조건 $U[\infty(\text{중근})]$ - $D[\infty(\text{중근})]$ = 0은 함수 $U(s)$ - $D(s)$의 상대적 차수가 2이상인 진유리함수이어야 한다는 것과 등가이며, 함수 $U(s)$ - $D(s)$의 분자의 최고차항과 다음차항의 계수를 0으로 만들어 주는 $U(s)$를 구함으로써 보간조건을 만족시킬 수 있다.

제시된 알고리듬은 DPL 보간 알고리듬에 기초를 두고 있으므로 다른 알고리듬 [1] 에 비해 낮은 차수의 unit 함수를 구할 수 있으며, 강안정화와 연립안정화 문제를 해결하는데 사용된다.

그리고 무한대에 다중근을 가지는 경우에도 보간이 가능한 알고리듬의 일반화에 지속적인 연구가 요구된다.

參 考 文 獻

[1] D. C. Youla, J. J. Bongiorno, and C. N. Lu, "Single-loop feedback stabilization of linear multivariable plants," *Automatica*, vol. 10, pp. 159-173, Mar. 1974.

[2] M. Vidyasagar and N. Viswanadham, "Algebraic design techniques for reliable stabilization," *IEEE Trans. Automat.*

Contr., vol. AC-27, no. 5, pp. 1085-1095, Oct. 1982.

[3] P. Dorato, H. B. Park, and Y. Li, "An algorithm for interpolation with units in H^∞ with applications to feedback stabilization," *Automatica*, vol. 25, no. 3, pp. 427-430, May 1989.

[4] J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Funtions in the Complex Domain*, AMS Collo. Publ., Providence, R. I., 1935.

[5] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis*: A Factorization Approach, Cambridge, MA: The MIT Press, 1985.

[6] P. Drato (ed.), *Robust Control*, IEEE Press, New York, 1987.

[7] D. C. Youla and Saito, "Interpolation with positive-real functions," J. *Franklin Inst.*, vol. 284, no. 2, pp. 77-108, Aug. 1967.

[8] H. B. Park, "Nominal H^2 feedback system optimization with simultaneous stabilization constraints," Ph. D. Thesis, Univ. of New Mexico, July 1988.

[9] 尹漢五, "플랜트 세개를 연립안정화하는 제어기의 설계 알고리듬," 경북 대학교 대학원 박사학위논문, 1992.

[10] K. R. Lee, H. O. Yun, H. B. Park, and S-. J. Kim, "Simultaneous stabilization with multiple domains of stability and H^2 optimization," *KITE J. of Electronics Engineering*, vol. 2, no. 1, PP. 62-68, June 1991.

著 者 紹 介

申 昌 勳(正會員)

1968年生. 1992年 2月 경북대학교 전자공학과 졸업. 1994年 2月 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1994年 2月 ~ 현재 한국전력공사 기술연구원 원자력연구실 근무. 주관심 분야는 견실제어, 최적제어, 퍼지제어 등임.

尹 漢 五(正會員) 第 29卷 B編 第 3號 參照

1993年 2月 경북대학교 전자공학과 졸업(공학박사). 현재 구미전문대학 조교수

•

朴 烘 培(正會員) 第 29卷 B編 第 3號 參照

현재 경북대학교 전자공학과 조교수