

論文94-31B-6-5

## 비선형 시스템의 디지털 Feedback 선형화 기법

## (Digital Feedback Linearization of the Nonlinear Systems)

李鴻奇\*, 全洪兌\*\*, 金贊浩\*\*\*

(Hong Gi Lee, Hong Tae Jeon and Chan Ho Kim)

## 要約

비선형 연속 시스템의 제어에 있어서 샘플링은 피할 수 없다. 본 논문은 이 샘플링의 영향을 없애거나 줄이는 디지털 제어 문제중 Feedback 선형화에 대한 연구이다. 샘플링에 의한 오차 항을  $O(h^5)$ 까지 줄일 수 있는 필요 충분 조건을 유도하였고, 모의 실험을 통하여 이의 유용성 (정밀성과 견실성) 을 확인하였다.

## Abstract

The sampling is inevitable in controlling the nonlinear continuous time systems. This paper deals with digital feedback linearization problem which eliminates or reduces the effect of the sampling. Necessary and sufficient conditions for reducing the sampling error up to  $O(h^5)$  are obtained. Also, the effectiveness of our control scheme in accuracy and robustness is shown by computer simulations.

## 1. 서론

로봇과 항공기 같은 복잡한 시스템의 이용이 증가함에 따라, 최신 제어 기법의 응용에 대한 많은

연구가 진행되고 있다. 또, 이런 복잡한 비선형 시스템의 작동에는 엄격한 제한요소 (정밀성, 안정성 등) 가 요구되므로 고도의 제어기법이 요구된다. 이런 이유로, 최근 20년간 비선형 제어 시스템 이론이 급속도로 발달하였다. 비선형 시스템 제어 이론 연구중 두가지의 큰 흐름은 선형 시스템 이론의 확장과 feedback 선형화 기법이다. 전자는 선형 시스템에 대하여 얻은 결과를 비선형 시스템의 경우에까지 확장시키는 것이고 후자인 feedback 선형화 기법은, 비선형 좌표변환과 feedback 을 사용하여, closed-loop 시스템이 새로운 좌표계에서 선형 시스템이 되게 하는 것이다. 시스템을 선형화 한 후에는 전체 시스템에 선형 시스템 이론을 적용할 수 있으므로, 선형화 기법은 적용 가능할 경우 아주 강력한 비선형 제어 방식이다. 실제 응용적인 측면에서 보면, 비선

\* 正會員, 中央大學校 制御計測工學科  
(Dept. of Control & Instrumentation Eng.,  
Chungang Univ.)

\*\* 正會員, 中央大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Chungang Univ.)

\*\*\* 正會員, 現代중전기(株)  
(Hyundai)

※ 본 논문은 90년 한국과학재단의 신진연구비에 의하여 연구되었음.

接受日字 : 1994年 2月 5日

형 feedback 함수를 컴퓨터를 사용하여 on-line으로 가해줘야 한다. 그러나, 2절에서 보듯이 feedback 선형화가 가능한 연속 비선형 시스템이라도 샘플링 (sampling)을 하면 feedback 선형화 가능 조건이 만족되지 않는다. 그 이유는 연속 비선형 시스템의 비선형 부분을 상쇄하기 위해서는 연속적으로 변하는 feedback이 필요한데, 샘플링 구간 사이에서 상수 (constant) 인 feedback 만을 가할 수 있기 때문이다. 따라서, 현재 최선의 방법은 샘플링에 의한 오차를 샘플링 주파수를 크게 함으로써 줄이려는 시도 뿐이다. 그러나, 샘플링 주파수를 크게하는 것 역시 항상 가능하지 않고, 또 바람직하지도 않다.

본 논문의 목적은 비선형 시스템의 내재된 구조 (inherent structure) 를 이용하여, 고성능이면서도 쉽게 적용할 수 있는 비선형 디지털 제어 시스템 설계 기법을 개발하는 것이다. 2절에서는 샘플링이 선형화에 미치는 영향을 설명하고, 3절에서는 이의 해결책으로서 고차의 디지털 선형화 기법을 제시한다. 마지막으로, 우리의 기법의 효용성을 4절에서 모의 실험을 통하여 입증한다.

II. 샘플링이 비선형 시스템의 선형화에 미치는 영향

다음과 같은 연속형 비선형 제어 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \tag{2.1}$$

여기서,  $x \in R^n$ ,  $u \in R$ 이고  $f(x)$  와  $g(x)$  는 해석적인 (analytic) 벡터 필드 (vector field) 들이라고 가정하고  $f(0)=0$  이다. 연속형 시스템 (2.1) 을 샘플링 간격을  $h(>0)$  로 하여 이산화 시킨 이산형 시스템은

$$x^d(k+1) = F_h(x^d(k), u^d(k)), k=0,1,2,\dots \tag{2.2}$$

이 된다. 여기서,  $x^d(k)=x(kh)$ ,  $u^d(k)=u(kh)$ 이고,  $\Phi_t^x$  를 벡터 필드  $X$  의 flow 라고 할 때 (즉,  $\frac{d}{dt}(\Phi_t^x(x)) = X(\Phi_t^x(x)); \Phi_0^x(x) = x$ ).

$$F_h(x^d(k), u^d(k)) = \Phi_h^{f+gu^d(n)}(x^d(k)) \tag{2.3}$$

로 나타낼 수 있다. flow 의 성질과  $f(0)=0$ 에 의하여  $F_h(0,0)=0$ 임을 쉽게 알 수 있다.

정의 2.1: 이산형 시스템 (2.2) (또는 연속형 시스템 (2.1))에 대하여, 이 시스템을 reachable 선형 시스템으로 변환시키는  $C^\infty$ (smooth) 좌표변환이 존재하면, 시스템 (2.2) (또는 시스템 (2.1))은 좌표변환에 의해 선형화가 가능하다고 정의한다.

정의 2.2: 이산형 시스템 (2.2) (또는 연속형 시스템 (2.1))에 대하여, 어떤  $C^\infty$  비선형 상태 개환 (state feedback)  $u^d=\gamma(x^d, v^d)$  (또는  $u=\alpha(x)+\beta(x)v$ )를 사용하여 폐루프 (closed-loop) 시스템이 좌표변환에 의하여 선형화가 가능하면, 시스템 (2.2) (또는 시스템 (2.1))은 feedback 선형화가 가능하다고 정의한다.

정의 2.3: 연속형 시스템 (2.1)을 이산화한 이산형 시스템 (2.2)가 모든  $h \in (0, \delta)$ 에 대하여 좌표변환에 의해 선형화가 가능한 실수  $\delta(>0)$ 가 존재하면, 시스템 (2.1)은 좌표변환에 의해 샘플링을 전제로한 선형화가 가능하다고 정의한다.

정의 2.4: 연속형 시스템 (2.1)을 이산화한 이산형 시스템 (2.2)가 모든  $h \in (0, \delta)$ 에 대하여 feedback 선형화가 가능한 실수  $\delta(>0)$ 가 존재하면, 시스템 (2.1)은 샘플링을 전제로한 feedback 선형화가 가능하다고 정의한다.

다음과 같은 벡터 필드를 정의한다.

$$V_h^p(x, u) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} (\Phi_{(p-1)h}^f \Phi_h^{f+(u+\epsilon)g} \Phi_{-h}^{f+u g} \Phi_{-(p-1)h}^f)(x) \tag{2.4}$$

$F_h(\cdot, u)$ 가 diffeomorphism (1-1, onto, &  $C^\infty$ ) 이므로, 각각의  $h$  와  $u$  에 대하여  $V_h^p(\cdot, u)$ 는  $R^n$ 에서 잘 정의된 벡터 필드이다. 그러나,  $u_1$ 과  $u_2$  ( $u \neq u_2$ )에 대하여,  $V_h^1(x, u_1)$ 은 일반적으로  $V_h^1(x, u_2)$ 와 같은 벡터가 아닐 수가 있다. 즉,  $V_h^1(x, u)$ 는  $u$  의 함수이다.  $V_h^1(x, u)$ 가 모든  $u$ 에 대하여 같은 벡터이면  $V_h^1(x, u)$ 는  $R^n$ 에서 잘 정의된 벡터 필드가 된다. 또,  $V_h^1(x, u)$ 가 모든  $u$ 에 대하여 같은 벡터가 아니지만 모두 같은 방향이면  $V_h^1(x, u)$ 는 벡터 필드는 아니지만, 이들의 집합  $sp\{V_h^1(x, u) | u \in R\}$ 는 잘 정의된 dimension 이 1인 distribution 이 된다. 이산형 시스템의 선형화 문제에 대한 과거 결과들 [6, 7, 9] 을 적용하여 시스템 (2.1) 의 샘플링을 전제로한 선형화에 관한 기초적인 결과를 다음과 같이 유도할 수 있다.

보조 정리 2.1: 연속형 시스템 (2.1) 이 좌표변환에 의해 샘플링을 전제로한 선형화가 가능하기 위한 필요충분 조건은 아래의 세 조건을 만족하는  $\delta(>0)$  가 존재하여야 한다: 모든  $h \in (0, \delta)$ 에 대하여,

- (1)  $\{V_h^1(0,0), V_h^2(0,0), \dots, V_h^n(0,0)\}$ 가 선형 독립 (linearly independent) 이고,
- (2) 모든  $u_1$ 과  $u_2$ 에 대하여  $V_h^1(x, u_1) = V_h^1(x, u_2)$ ,
- (3)  $[V_h^1, V_h^1] = 0$ , 랭  $1 \leq i, j \leq n+1$ .

보조 정리 2.2: 연속형 시스템 (2.1) 이 샘플링을 전제로한 feedback 선형화가 가능하기 위한 필요충분 조건은 아래의 세 조건을 만족하는  $d(>0)$  가 존재하여야 한다: 모든  $h$  에 대하여,

- (1)  $\{V_h^1(0,0), V_h^2(0,0), \dots, V_h^n(0,0)\}$ 가 선형 독립 (linearly independent) 이고,
- (2) 모든  $u_1$ 과  $u_2$ 에 대하여  $V_h^1(x, u_1)$ 과  $V_h^1(x, u_2)$ 는 평행하고,
- (3)  $1 \leq i \leq n-1$ 에 대하여,  $\{V_h^1, V_h^2, \dots, V_h^n\}$ 은 involutive distribution 이다.

정리 2.3: 연속형 시스템 (2.1)이 좌표변환에 의해 샘플링을 전제로한 선형화가 가능하기 위한 필요충분 조건은 연속형 시스템 (2.1)이 좌표변환에 의하여 선형화가 가능하여야 한다.

증명: (충분 조건): 연속형 시스템 (2.1) 이 좌표변환에 의하여 선형화가 가능하다고 가정하자. 즉,

$$\dot{z} = Az + Bu$$

가 되는 좌표변환  $z=T(x)$  가 존재한다. 이 경우 이산화된 시스템 (2.2)에 대해서도 좌표변환을  $x^d(k)=T(x^d(k))$ 라고 정의하면,

$$\begin{aligned} z^d(k+1) &= e^{hA} z^d(k) + \int_0^h e^{A(h-\tau)} B d\tau u^d(k) \\ &= A_h^d z^d(k) + B_h^d u^d(k) \end{aligned} \quad (2.5)$$

이 되어 선형 시스템이 된다. 따라서, 시스템 (2.1) 은 좌표변환에 의해 샘플링을 전제로한 선형화가 가능하다.

(필요 조건): 시스템 (2.1)이 좌표변환에 의해 샘플링을 전제로한 선형화가 가능하다고 가정하자. 보조 정리 2.1 에 의하여, 모든  $h \in (0, \delta)$ 에 대해  $V_h^p(x, u)$ ,  $p \geq 1$ 가  $u$  에 종속되지 않는  $\delta(>0)$  가 존재한다. 따라서,  $V_h^p(x, u)$ 는 잘 정의된  $R^n$ 에서의 벡터 필드가 된다. (2.4) 식에 정의한  $\beta_j$ 는 다음과 같이 전개할 수 있는데 [5,15],

$$V_h^{-1}(\cdot, u) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i h^{i+1}}{(i+1)!} ad_i^* u^i g = \sum_{j=0}^{\infty} u^j \beta_j(h) \quad (2.6)$$

$$\beta_j(h) = \sum_{i=j+1}^{\infty} (-1)^{i+1} h^i \beta_i^*, j \geq 0 \quad (2.7)$$

$$\beta_0^* = \frac{1}{i!} ad_i^{-1} g, i \geq 1 \quad (2.8a)$$

$$\beta_j^* = \frac{1}{i!} (ad_j \beta_{j-1}^* + ad_g \beta_{j-1}^*), j \geq 1, i \geq j+2 \quad (2.8b)$$

$$\beta_j^{i+1} = 0, j \geq 1. \quad (2.8c)$$

여기서,  $V_h^1(\cdot, u)$ 는  $u$  의 함수가 아니므로,

$$V_h^{-1} = \beta_0(h) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i h^{i+1}}{(i+1)!} ad_i^* g \quad (2.9)$$

비슷한 방법으로,  $p \geq 1$ 에 대해

$$V_h^p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} h^i}{i!} \{p^i - (p-1)^i\} ad_i^{p-1} g \quad (2.10)$$

임을 보일 수가 있다. 여기서,

$$X^p = \sum_{j=1}^p V_h^j = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{h^u}{u!} (-1)^{u+1} p^u ad_u^{p-1} g \quad (2.11)$$

라고 정의하면, 보조정리 2.1 의 조건 (1) 에 의하여  $\{X^p, p=1, \dots, n\}$ 들은 선형 독립이다. 그런데, 윗식에서  $\{X^p, p=1, \dots, n\}$ 들의  $\{\frac{h^p}{p!} ad_i^{p-1} g, p=1, \dots, n\}$ 에 대한 계수들은 Vandermonde 행렬이 되므로  $\{g(0), ad_i g(0), \dots, ad_i^{n-1} g(0)\}$ 들 역시 선형 독립이 된다. 또,  $V_h^1(\cdot, u)$ 가  $u$ 의 함수가 아니므로, 모든  $h \in (0, \delta)$ 에 대하여  $\beta_1(h)=0$ 이고 따라서  $\beta_1^*=0, i \geq 2$ 이다.  $\beta_1^* = \frac{1}{3!} ad_g(ad_i g)$  이므로  $ad_g(ad_i g)$ 이다.  $1 \leq i \leq p$ 에 대하여  $ad_g(ad_i^* g)=0$  라고 가정하자. 그러면,

$$\beta_1^{p+3} = \frac{1}{(p+3)!} ad_g(ad_i^{p+1} g) \quad (2.12)$$

이므로  $ad_g(ad_i^{p+1} g)=0$  가 된다. 따라서, 수학적 귀납법에 의해,  $ad_g(ad_i^* g)=0, i \geq 0$  이다. 이 조건과  $\{g(0), ad_i g(0), \dots, ad_i^{n-1} g(0)\}$ 의 선형 독립 조건으로부터 연속형 시스템 (2.1) 은 좌표변환에 의하여 선형화가 가능하다.[14]

샘플링을 전제로 한 feedback 선형화를 고려한다.  $n=1$  일때는, 시스템 (2.2) 가 feedback  $F_h(x^d, u^d) = v^d$ 를 사용함으로써 feedback 선형화가 가능하다. 따라서,  $n \geq 2$ 인 경우를 고려한다.

정리 2.4:[1] 연속형 시스템 (2.1) 이 샘플링을 전제로 한 feedback 선형화가 가능하면, 시스템 (2.1) 은 feedback 선형화가 가능하다.

그러나, 정리 2.4 의 역은 성립하지 않는다. 우리의 과거 연구 [1] 에서 보듯이  $n=2$  일 때, 샘플링을 전제로 한 feedback 선형화가 가능하기 위한 필요충분 조건은 좌표변환만을 사용하여 선형화가 가능하여야 된다는 아주 제한적인 조건이다. 그러면, 현재 사용하고 있는 feedback 선형화 기법을 분석해 보자. 만일 연속형 시스템 (2.1) 이 feedback 선형화가 가능하고 하면, 좌표변환  $z=T(x)$  를 사용하여 시스템 식이

$$\dot{z}_i(t) = z_{i+1}(t), 1 \leq i \leq n-1 \quad (2.13)$$

$$\dot{z}_n(t) = c(z(t)) + d(z(t))u(t)$$

이 되게 만들 수 있다.<sup>13)</sup> 여기서, feedback

$$u(t) = -\frac{c(x(t))}{d(x(t))} + \frac{1}{d(z(t))}v(t) = \alpha(z(t)) + \beta(z(t))v(t) \quad (2.14)$$

를 적용하면

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= z_{i+1}(t), 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n(t) &= v(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

인 선형 시스템이 된다. 그러나, 실제 응용면에서, feedback (2.14) 식이 비선형 함수이므로 이 feedback 을 마이크로 프로세서 등의 디지털 장비를 사용하여 구현할 수 밖에 없다. 따라서, 샘플링은 필수적이어서, 실제 (2.14) 식의 연속인 feedback 을 가할 수 없고, 대신

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{c(z^d(k))}{d(z^d(k))} + \frac{1}{d(z^d(k))}v^d, kh \leq t < (k+1)h \\ (z^d(k) &= z(kh) \& v^d(k) = v(kh)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

인 상수 (constant) feedback 을 가할 수 밖에 없는 데, 이 경우 closed-loop 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= z_{i+1}(t), 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n(t) &= x(z(t)) - d(z(t)) \left[ \frac{c(z^d(k))}{d(z^d(k))} + \frac{d(z(k))}{d(z^d(k))}v^d(k), kh \leq t < (k+1)h \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

가 되어 여전히 비선형 시스템이다. 즉, 샘플링 구간 사이에서 상수인 feedback 으로 (2.13) 식의 비선형 항을 상쇄시킬 수가 없다. 다음은 시스템 (2.17) 을  $kh \leq t < (k+1)h$ 에서 우리가 원하는 선형 시스템

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= z_{i+1}(t), 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n(t) &= v^d(k) \end{aligned} \quad (2.18)$$

과 비교해 보자. (2.18) 식의 이산화된 시스템은 다음과 같다.

$$z^d(k+1) = A_h z^d(k) + B_h v^d(k) \quad (2.19)$$

$$A_h = \begin{bmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \dots & \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & h & \dots & \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_h = \begin{bmatrix} \frac{h^n}{n!} \\ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots \\ \frac{h^2}{2!} \\ \frac{h}{1} \end{bmatrix}$$

(2.17) 식의 이산화된 시스템은, Taylor 정리에 의하여,

$$z_n^d(k+1) = z_n^d(k) + h\dot{z}_n(kh) + \frac{h^2}{2!}\ddot{z}_n(kh) + \dots \quad (2.20)$$

이 되어  $\dot{z}_n(kh) - v(kh) = v^d(k)$  이지만  $\ddot{z}_n(kh) \neq 0$  이다. 따라서,

$$z_n^d(k+1) = z_n^d(k) + hv^d(k) + O(h^2) \quad (2.21)$$

이 되어

$$z^d(k+1) = A_h z^d(k) + B_h v^d(k) + O(h^2) \quad (2.22)$$

이므로 샘플링에 의한 오차가 샘플링 구간  $h$ 에 대해  $O(h^2)$ 이 된다. 즉, (2.16) 식의 샘플링된 feedback 을 사용하는 것은 Euler 근사 방법에 지나지 않는다.

### III. 비선형 시스템의 새로운 디지털 제어 기법

2절의 후반부에서 기존의 비선형 제어 방식은 샘플링 구간  $h$ 에 대해 1 차 까지 근사시키는 Euler 근사 방법에 지나지 않는다는 것을 보였다. 그림 3.1에 있는 연속적인 곡선이 (2.13) 식의 비선형 항들을 상쇄하는 데 필요한 (2.14) 식에 주어진 feedback 함수라고 가정하면 실제 우리가 가하는 디지털 feedback (2.16)은 그림 3.1의 계단식의 step 입력이다. 여기서, 그림 3.1의 step 입력과 다른, 그림 3.2에 주어진 step 입력으로 closed-loop 시스템의 작동이 시스템 (2.19)에 가까워 질 수 있다. 그러므로, 본 논문의 목적은 연속형 시스템 (2.1)의 이산화 모델인 시스템 (2.2)를, 샘플링 구간  $h$ 에 대해, 선형 시스템 (2.19)에 더 높은 차수까지 근사

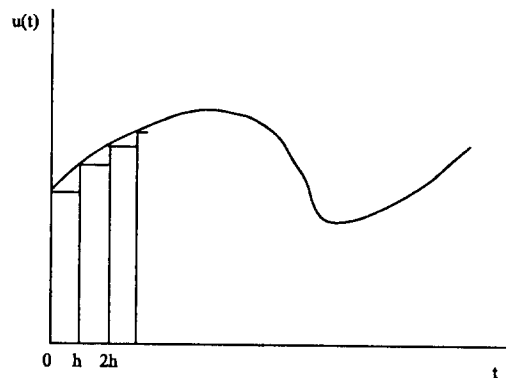


그림 3.1. 기존의 디지털 feedback 제어  
Fig. 3.1. Sampled feedback control.

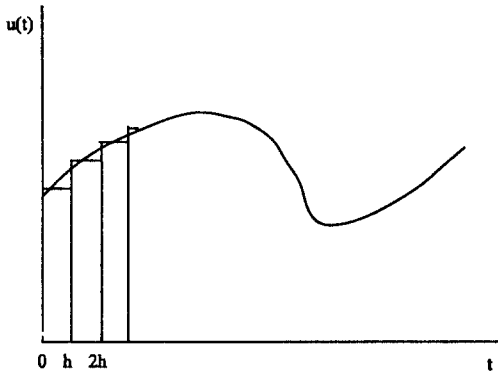


그림 3.2. 새로운 디지털 feedback 제어

Fig. 3.2. A new(sampling interval dependent)sampled feedback control.

시키는 새로운 디지털 제어 기법을 얻는 것이다. 물론, 이 기법은 feedback 제어 입력과 좌표 변환이 샘플링 구간 h 의 함수가 되어야 한다. 이 기법을 수학적으로 표현하면 다음과 같다:

정의 3.1: 이산형 비선형 시스템 (2.2) 에 대하여, 좌표 변환

$z^d(k)=T_h(x^d(k))$  ( $T_h(\cdot)$ 는 invertible) 과 feedback  $u^d(k)=\gamma_h(x^d(k), v^d(k))$  를 사용하여 closed-loop 시스템이, 어떤  $\delta(>0)$  에 대하여, reachable 선형 시스템

$$z^d(k+1) = A_h z^d(k) + B_h v^d(k) + O(h^{\rho+1}), h \in (0, \delta) \quad (3.1)$$

으로 변환이 가능하면, 비선형 시스템 (2.1) 은 차수  $\rho$ 에 의하여 디지털 feedback 선형화가 가능하다고 정의한다.

정리 3.1: (a) 연속형 비선형 시스템 (2.1) 이  $\rho=1$  에 의하여 디지털 feedback 선형화가 가능하기 위한 필요 충분 조건은 "시스템 (2.1) 이 feedback 선형화가 가능하여야 한다" 이다.

(b) 연속형 비선형 시스템 (2.1) 이  $\rho=2$  에 의하여 디지털 feedback 선형화가 가능하기 위한 필요 충분 조건은 "시스템 (2.1) 이 feedback 선형화가 가능하여야 한다" 이다.

증명: (a) (필요 조건): 시스템 (2.1) 이  $\rho=1$  에 의해 디지털 feedback 선형화가 가능하다고 가정하면,

$$\begin{aligned} z_i \circ \Phi_h^{f+ug} &= z_i + h z_{i+1} + O(h^2), 1 \leq i \leq n-1 \\ z_n \circ \Phi_h^{f+ug} &= \eta(z, u) + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u}(0,0) \neq 0$$

이 되는 좌표변환  $z=T_h(x)$ 가 존재한다.  $z_i$ 를 h 에 대해 Taylor series 로 전개하여

$$z_i = \sum_{q=0}^{\infty} h^q \varphi_i^q(x) \quad (3.3)$$

라고 가정하자.

$$\begin{aligned} z_i \circ \Phi_h^{f+ug} &= \sum_{q=0}^{\infty} h^q \varphi_i^q(x) \circ \Phi_h^{f+ug} = \varphi_i^0 + h \varphi_i^1 + h \{ f(\varphi_i^0) + g(\varphi_i^0) u \} + O(h^2) \\ &= z_i + h z_{i+1} + O(h^2) \end{aligned}$$

이므로  $z_2 = f(\varphi_1^0) + O(h)$ 이고  $g(\varphi_1^0) = 0$  이다. 즉,

$$\varphi_2^0 = f(\varphi_1^0) \& g(\varphi_1^0) = 0 \quad (3.4)$$

또,

$$\begin{aligned} z_3 \circ \Phi_h^{f+ug} &= \sum_{q=0}^{\infty} h^q \varphi_3^q(x) \circ \Phi_h^{f+ug} = \varphi_3^0 + h \varphi_3^1 + h \{ f(\varphi_2^0) + g(\varphi_2^0) u \} + O(h^2) \\ &= z_3 + h z_4 + O(h^2) \end{aligned}$$

이므로

$$\varphi_3^0 = f(\varphi_2^0) \& g(\varphi_2^0) = 0 \quad (3.5)$$

이런 방법으로,

$$\begin{aligned} z_{n-1} \circ \Phi_h^{f+ug} &= \varphi_{n-1}^0 h \varphi_{n-1}^1 + h \{ f(\varphi_{n-1}^0) + g(\varphi_{n-1}^0) u \} + O(h^2) \\ &= z_{n-1} + h z_n + O(h^2) \end{aligned}$$

이므로

$$\varphi_n^0 = f(\varphi_{n-1}^0) \& g(\varphi_{n-1}^0) = 0 \quad (3.6)$$

(3.4) - (3.6) 식에 의하여,

$$ad_i^j g(\varphi_i^0(x)) = 0, 0 \leq i \leq n-2 \quad (3.7)$$

임을 쉽게 보일 수 있다. 마지막으로,

$$z_n \circ \Phi_h^{f+ug} = \varphi_n^0 + h \varphi_n^1 + h \{ f(\varphi_n^0) + g(\varphi_n^0) u \} + O(h^2)$$

에서  $g(\varphi_n^0) \neq 0$  이므로

$$ad_j^{n-1} g(\varphi_1^0(x)) \neq 0 \quad (3.8)$$

(3.7) 식과 (3.8) 식에 의하여  $\text{span}\{g, ad_i g, \dots,$

$\text{ad}_f^{n-2}g$ )는 involutive distribution 이고  $\{g(0), \text{ad}_f g(0), \dots, \text{ad}_f^{n-2}g(0)\}$ 가 선형 독립이므로 시스템 (2.1)은 feedback 선형화가 가능하다.

(충분조건): 만일 시스템 (2.1)이 feedback 선형화가 가능하면, 일반성을 잃지 않고 좌표변환에 의하여 시스템 (2.13)을 가정할 수 있다. 만일

$$f(z_n) + g(z_n)u(t) + O(h) = v^d(k), kh \leq t < (k+1)h \quad (3.9)$$

를 만족하는 임의의 feedback 을 사용하면, closed-loop 시스템은 (3.1) 식을 만족한다.

(b) (필요조건): 시스템 (2.1)이  $\rho=2$ 에 의해 디지털 feedback 선형화가 가능하면  $\rho=1$ 에 의해 디지털 feedback 선형화가 가능하므로 정리 3.1(a)에 의해 시스템 (2.1)은 feedback 선형화가 가능하다.

(충분조건): 정리 3.1(a)의 충분조건 증명중 (3.9)식의 feedback대신에

$$f(z_n) + g(z_n)u \frac{h}{2!} + \left\{ f(f(z_n)) + g(f(z_n))u + f(g(z_n))u + g(g(z_n))u^2 \right\} + O(h^2) = v^d(k) \quad (3.10)$$

을 만족하는 feedback 을 사용하면, closed-loop 시스템은 (3.1) 식을 만족한다. (Q.E.D.)

정리 3.1(b)에 의하면, (3.9)식의 feedback을 사용하는 기존의 디지털 제어 방식에 비해 더 정밀한 디지털 제어가 가능함을 알 수 있다. 즉, (3.10)식의 디지털 feedback을 사용하여 (3.1)식의 오차항을  $O(h^2)$ 에서  $O(h^2)$ 으로 줄일 수 있다.  $\rho \geq 3$ 인 경우의 필요충분 조건들은 정리 3.1의 조건보다 더 제약적이다.

정리 3.2: 연속형 비선형 시스템 (2.1)이  $\rho=4$ 에 의하여 디지털 feedback 선형화가 가능하기 위한 필요충분 조건은 다음과 같다:

- (1) 시스템 (2.1)이 feedback 선형화가 가능하다.
- (2)  $\text{ad}_g \text{ad}_f g \in \text{span}\{g\}$
- (3)  $L_{\text{ad}_f^j g}(\varphi) = 0, 0 \leq j \leq n-2$  &  $L_{\text{ad}_f^{n-1} g}(\varphi) \neq 0$  (3.11)

를 만족하는  $\varphi$ 는

$$L_{\text{ad}_f^j g} L_k L_f^j(\varphi) + L_{\text{ad}_f^j g} L_k L_f^{n-1}(\varphi) = 0, 0 \leq j \leq n-3 \quad (3.12)$$

을 만족하여야 한다.

증명: (필요조건): 이 정리의 증명은 정리 3.1의 증명과 아주 유사하다. 다만, 샘플링 구간  $h$ 에 대한

Taylor series 에서 더 높은 차수까지 비교하여야 하므로 약간 더 복잡할 뿐이다. 우선 스칼라 (scalar) 함수  $\alpha$ 에 대해,

$$\begin{aligned} \langle L_k^0, L_f^j \rangle(\alpha) &= L_f^j(\alpha), i=0,1,\dots \\ \langle L_k^{i+1}, L_f^j \rangle(\alpha) &= \sum_{j=0}^i L_f^j L_k \langle L_k^i, L_f^{j-i} \rangle(\alpha), k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

라고 정의한다. 그러면,

$$z_i \circ \Phi_h^{i+uk} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^q \sum_{j=0}^q \frac{h^q}{(q-j)!} u^r \langle L_k^q, L_f^{q-j-r} \rangle(\varphi_i^r) \quad (3.14)$$

$$z_n \circ \Phi_h^{i+uk} = z_n + hv + O(h^2) \quad (3.15)$$

이므로

$$v = \sum_{q=0}^4 \sum_{r=0}^q \sum_{j=0}^{q-1} \frac{h^{q-1}}{(q-j)!} u^r \langle L_k^q, L_f^{q-j-r} \rangle(\varphi_n^r) + O(h^4) \quad (3.16)$$

이 되어

$$L_k(\varphi_n^0) \neq 0 \quad (3.17)$$

임을 알 수 있다. 또,

$$z_{n-1} \circ \Phi_h^{i+uk} = z_{n-1} + h z_n + \frac{h^2}{2!} v + O(h^3) \quad (3.18)$$

이므로

$$\begin{aligned} O(h^3) &= \sum_{q=1}^3 \sum_{r=0}^q \sum_{j=0}^{q-1} \frac{h^q}{(q-j)!} u^r \langle L_k^q, L_f^{q-j-r} \rangle(\varphi_{n-1}^r) \\ &\quad - \sum_{q=0}^2 h^{q+1} \varphi_n^q - \sum_{q=1}^3 \sum_{r=0}^q \sum_{j=0}^{q-1} \frac{h^{q+1}}{(q-j)! 2!} u^r \langle L_k^q, L_f^{q-j-r} \rangle(\varphi_n^r) \end{aligned} \quad (3.19)$$

가 되어  $h$ 에 대한 정함수의 계수들을 비교하여

$$\varphi_n^0 = L_f(\varphi_{n-1}^0), L_k(\varphi_{n-1}^0) = 0 \quad (3.20a)$$

$$\varphi_n^1 = L_f(\varphi_{n-1}^1), L_k(\varphi_{n-1}^1) = 0 \quad (3.20b)$$

$$\varphi_n^2 = L_f(\varphi_{n-1}^2) - \frac{1}{12} L_f^3(\varphi_n^0) \quad (3.20c)$$

$$L_k(\varphi_{n-1}^2) = \frac{1}{12} \langle L_k, L_f \rangle(\varphi_n^0) \quad (3.20d)$$

$$L_k^2(\varphi_n^0) = 0 \quad (3.20e)$$

$$\varphi_n^3 = L_f(\varphi_{n-1}^3) - \frac{1}{12} L_f^2(\varphi_n^1) \quad (3.20f)$$

$$L_k(\varphi_{n-1}^3) = \frac{1}{12} \langle L_k, L_f \rangle(\varphi_n^1) \quad (3.20g)$$

을 얻는다.  $z_i \circ \Phi_h^{i+uk}, 1 \leq i \leq n-2$  대해서도 같은 방법

으로

$$\varphi_{i+1}^j = L_f(\varphi_i^j), L_x(\varphi_i^j) = 0, 1 \leq i \leq n-2, 0 \leq j \leq 3 \quad (3.21)$$

을 얻을 수 있다. (3.20a) 식과 (3.21) 식에서

$$\begin{aligned} L_x L_f^j(\varphi_i^0) &= \mathbf{0}, 0 \leq j \leq n-2 \\ L_x L_f^{n-1}(\varphi_i^0) &\neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

가 되어,  $T_0(x)$  가 invertible 이므로, 시스템 (2.1) 은 feedback 선형화가 가능하다. [8, 13] 또한, (3.20e) 식에 의하여

$$\text{ad}_g^k \text{ad}_f^{k-1} g \in \text{sp}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{k-2} g\}, 2 \leq k \leq n \quad (3.23)$$

이고 (3.20d) 식과 (3.21) 식에 의하면

$$\begin{aligned} L_{\text{ad}_f^j g}(\varphi_i^2) &= \mathbf{0}, 0 \leq j \leq n-3 \\ L_{\text{ad}_f^j g}(\varphi_i^2) &= \frac{1}{12} \{L_x L_f^n(\varphi_i^0) + L_f L_x L_f^{n-1}(\varphi_i^0)\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

인데, 이 (3.24) 식을 만족하는  $\varphi_i^2$  가 존재하기 위한 필요충분 조건은

$$L_{\text{ad}_f^j g} L_x L_f^n(\varphi_i^0) + L_{\text{ad}_f^j g} L_f L_x L_f^{n-1}(\varphi_i^0) = 0, 0 \leq j \leq n-3 \quad (3.25)$$

이다.

(충분조건): 시스템 (2.1) 이 조건 (1) - (3) 을 만족하면, (3.20)식, (3.21)식과 (3.22) 식을 만족하는  $\varphi_i^0, \varphi_i^1, \varphi_i^2, \& \varphi_i^3, 1 \leq i \leq n$ 를 구할 수 있다. 즉, (3.22)식에서  $\varphi_i^0$ 를 구하고, (3.21)식으로부터  $\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^2, \dots, \varphi_i^3$  모두 구할 수 있다. 또, (3.20b)식, (3.20f)식과 (3.21)식을 만족하는  $\varphi^1$  및  $\varphi^3$ 는 모두 zero 로 두어도 된다. (3.20d)식에서  $\varphi_{n-1}^2$ 를 구하고 (3.20c)식으로부터  $\varphi_n^2$ 를, (3.21)식으로부터  $\varphi_{n-2}^2, \dots, \varphi_i^2$ 를 차례로 구할 수 있다.

$$z_i(x) = \sum_{q=0}^3 h^q \varphi_i^q(x) \quad (3.26)$$

라고 두고 (3.16) 식을 만족하는 feedback 을 사용하면 (3.1) 식이 만족한다.

정리 3.3: [10] 연속형 비선형 시스템 (2.1) 이  $\rho=3$  에 의하여 디지털 feedback 선형화가 가능하기 위한 필요 충분 조건은  $\rho=4$  인 경우와 같다.

증명: 생략 ( $\rho=4$  인 경우의 증명에 포함되어 있다).

$n=2$  인 경우는 정리 3.2의 조건(3)은 불필요하며

로 조건(1)과 조건(2)만 점검하면 된다. 다입력 시스템의 경우는 본 논문의 결과보다 훨씬 복잡하리라고 예상하고, 현재까지 어떤 결과도 발표되지 않았다. 로봇 등 의 다입력 시스템에 의 적용을 위하여는 이 분야에 대한 연구가 더 필요하다.

#### IV. 모의 실험

이 절에서는 간단한 예제를 고려하여 우리의 디지털 Feedback 선형화 기법의 효용성을 컴퓨터 모의 실험을 통하여 보인다.

예제 4.1: 다음의 간단한 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2^2 \end{bmatrix} u = f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

이 시스템은 feedback 선형화가 가능하므로 정리 3.1(b) 의 조건을 만족한다.

$$\text{ad}_f g = \begin{bmatrix} -(1+x_2^2) \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ad}_g \text{ad}_f g = \begin{bmatrix} -2x_2(1+x_2^2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

이므로,  $\text{ad}_g \text{ad}_f g \notin \text{sp}\{g\}$  이어서 정리 3.2 의 조건은 만족하지 않는다. 따라서, 시스템 (4.1) 은  $\rho=2$  에 의하여 디지털 feedback 선형화가 가능하다. 여기서, 기존의 feedback ( $\rho=1$ )  $u$ 와  $\rho=2$ 의 디지털 feedback  $u_D$ 를 (3.9)식과 (3.10)식에 의하여 각각 구할 수 있다. 즉,

$$-2x_1 - 2x_2 + v = (1+x_2^2)u \quad (4.2)$$

로부터 (여기서, 좌변의 처음 두 항들은 안정화시키는 feedback 이다),

$$u = (-2x_1 - 2x_2 + v) / (1+x_2^2) \quad (4.3)$$

또,

$$-2x_1 - 2x_2 + v = (1+x_2^2)u_D + hx_2(1+x_2^2)u_D^2 \quad (4.4)$$

에 의하여

$$u_D = (2x_1 - 2x_2 + v) / (1+x_2^2) - hx_2(2x_1 - 2x_2 + v)^2 / (1+x_2^2)^2 \quad (4.5)$$

을 얻을 수 있다. (4.3)식의 재래의 feedback 과 (4.5)식의 새로운 디지털 feedback 을 사용하여 정밀성을 다음의 모의 실험으로 비교한다. (4.3)식과 (4.5)식으로서 샘플링의 영향을 무시하면

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (4.6)$$

이므로,  $x(0)=0, v(t)=10$  으로 하면

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 5(1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t) \\ x_2(t) &= 10e^{-t} \sin t \end{aligned} \quad (4.7)$$

$h=0.1$  로 하여 (4.3)식의 재래의 feedback 과 (4.5)식의 새로운 디지털 feedback 을 사용하여 (4.7)식의 state 값과의 오차의 크기를 그림 4.1에 나타냈다. 이 그림에서 보듯이 고차의 디지털 feedback 을 사용함으로써 더 정밀한 제어를 할 수 있다.

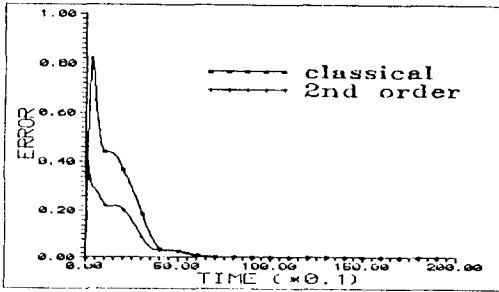


그림 4.1. 예제 4. 1의 상태 변수 오차  
Fig. 4. 1. The state error of EX. 4. 1.

예제 4.2: 다음의 간단한 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = f(x) + g(x)u \quad (4.8)$$

이 시스템은 feedback 선형화가 가능하므로 정리 3.1(b)의 조건을 만족한다.

$$ad_1g = \begin{bmatrix} -1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}, ad_2ad_1g = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

이므로,  $ad_2ad_1g \in \text{sp}\{g\}$ 이어서 정리 3.2의 조건을 만족한다. 따라서, 시스템 (4.8)은  $\rho=4$ 에 의하여 디지털 feedback 선형화가 가능하다. (3.20a)식과 (3.21)식으로부터

$$\varphi_1^0 = x_1; \varphi_2^0 = x_2$$

(3.20b, f, g)식과 (3.21)식으로부터

$$\varphi_1^1 = 0; \varphi_2^1 = 0; \varphi_3^1 = 0; \varphi_4^1 = 0.$$

(3.20d)식으로부터

$$L_x(\varphi_1^2) = \frac{1}{12} \{L_x L_f(\varphi_2^0) + L_f L_x(\varphi_2^0)\} = \frac{1}{12}(2x_2 + 0) = \frac{1}{6}x_2$$

따라서,

$$\varphi_1^2 = \frac{1}{12}x_2^2$$

이고, (3.20c)식으로부터

$$\varphi_2^2 = L_f(\varphi_1^2) - L_f^2(\varphi_2^0) = \frac{1}{6}x_2x_2^2 - \frac{1}{12}2x_2x_2^2 = 0$$

즉,

$$z_1 = x_1 + \frac{h^2}{12}x_2^2 \quad (4.9)$$

$$z_2 = x_2$$

여기서, 기존의 feedback ( $\rho=1$ )  $u$ 와  $\rho=4$ 의 디지털 feedback  $u_0$ 를 (3.9)식과 (3.15)식에 의하여 각각 구할 수 있다. 즉,

$$-2x_1 - 2x_2 + v = x_2^2 + u \quad (4.10)$$

로부터 (여기서, 좌변의 처음 두 항들은 안정화시키는 feedback 이다),

$$u = -x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + v \quad (4.11)$$

또,

$$\begin{aligned} -2z_1 - 2z_2 + v &= x_2^2 + u_0 + hx_2(x_2^2 + u_0) \\ &+ \frac{h^2}{3} \{(x_2^2 + u_0)^2 + 2x_2^2(x_2^2 + u_0)\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

에서

$$u_0 = \alpha_0 + \beta_0 v + h\beta_1 + h^2\beta_2 \quad (4.13)$$

라고 두면,

$$\beta_0 = 1$$

$$\alpha_0 = -x_2^2 - 2z_1 - 2z_2$$

$$\beta_1 = -x_2(-2z_1 - 2z_2 + v)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3}x_2^2(-2z_1 - 2z_2 + v) - \frac{1}{3}(-2z_1 - 2z_2 + v)^2$$

을 얻을 수 있다. (4.11)식의 재래의 feedback 과



(4.13)식의 새로운 디지털 feedback 을 사용하여 정밀성을 다음의 모의 실험으로 비교한다. (4.11)식과 (4.13)식으로서 샘플링의 영향을 무시하면, 각각

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (4.14)$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (4.15)$$

이므로,  $x(0)=0, v(t)=10$  으로 하면

$$x_1(t) = z_1(t) = 5(1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t) \quad (4.16)$$

$$x_2(t) = z_2(t) = 10e^{-t} \sin t$$

$h=0.1$  로 하여 (4.11)식의 재래의 feedback 과 (4.13)식의 새로운 디지털 feedback 을 사용하여 (4.16)식의 state 값과의 오차의 크기를 그림 4.2에 나타냈다. 이 그림에서 보듯이 고차의 디지털 feedback 을 사용함으로써 더 정밀한 제어를 할 수 있다. 또한, 고차의 디지털 feedback 을 사용함으로써 더 견실한 제어를 할 수 있음도 모의 실험을 통해 확인할 수 있었으나 여기서는 생략한다.

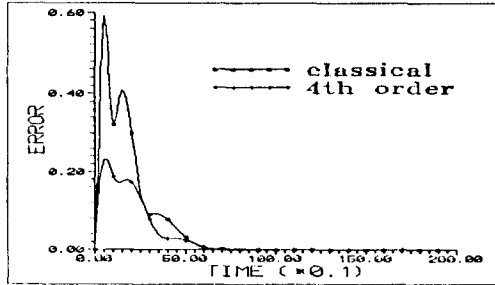


그림 4.2. 예제 4.2의 상태 변수의 오차  
Fig. 4.2. The state error of Ex. 4.2.

선형화 후의 1차 보상 (pole assignment) 에 이어 추가로 보상 회로를 구성하는 연구는 참고문헌 [2, 4, 11] 에서 발견할 수 있는데, 이와 유사한 추가 디지털 보상회로를 사용함으로써 더 정밀하고 견실한 제어가 가능할 것이다.

參考文獻

[1] A. Arapostathis, B. Jakubczyk, H.G. Lee, S.I. Marcus, and E.D. Sontag. "The effect of sampling on linear equivalence and feedback linearization,

" Systems & Control Letters, Vol.13, 1989, pp.373-381.

[2] T.A.W. Dwyer, III, G.K.F. Lee, and N. Chen. "A terminal controller for a robotic manipulator arm with corrections for perturbations," Proc. of the 4th IASTED Symposium on Robotics and Automation Amsterdam, The Netherlands, June 27, 1984.

[3] E. Freud, "Fast nonlinear control with arbitrary pole-placement for industrial robots and manipulators," Robot Motion, ed. by Brady, Hollerbach, Johnson, Lozano-Perz, and Mason, MIT Press, Cambridge, MA, 1982.

[4] K. Furuta, K. Kosage, O. Yamano, and K. Nosaki. "Robust control of a robot manipulator with nonlinearity," Robotica, Vol.2, pp.75-81.

[5] R. Goodman, "Lifting vector fields to nilpotent Lie groups," J. Math. Pures et Appl., Vol.57, 1978, pp.77-86.

[6] J.W. Grizzle, "Feedback linearization of discrete-time systems," in Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.83, Springer-Verlag, 1986, pp.273-281.

[7] B. Jakubczyk, "Feedback linearization of discrete-time systems," Systems & Control Letters, Vol. 9, 1987, pp.411-416.

[8] B. Jakubczyk and W. Respondek, "On the linearization of control systems," Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Physics, Vol.28, 1980, pp.517-522.

[9] H.G. Lee, A. Arapostathis, and S.I. Marcus, "On the linearization of discrete time systems," International Journal of Control, Vol.45, No.5, 1987, pp.1803-1822.

[10] H.G. Lee, A. Arapostathis, and S.I. Marcus, "On the Digital control of nonlinear systems," Processing of 1988 IEEE Conference on Decision and Control, Austin, TX, Dec. 1988, pp.

- 480-481.
- [11] T.J. Tran, A.K. Bejczy, A. Isidori, and Y. Chen, "Nonlinear feedback in robot arm control," Processings of 23rd IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, NV, 1984, pp.736-751.
- [12] A.P. Sage and C.C. White, Optimum Systems Control (2ed), Prentice-Hall, Inc., 1977.
- [13] R. Su, "On the linear equivalents of nonlinear systems," Systems & Control Letters, Vol.2,1982, pp.48-52.
- [14] H.J. Sussmann, "Lie brackets, real analyticity and geometric control," Differential Geometric Control Theory, R.W. Brockett, et al.(ed), Boston: Birkhauser, 1983, pp.1-116.
- [15] V.S. Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

---

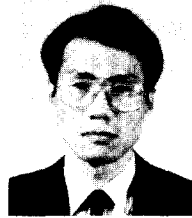
 著 者 紹 介
 

---



李鴻奇(正會員)

1958年 11月 28日生. 1981年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업 (공학사). 1983年 2月 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업 (공학석사). 1986年 8月 Texas 대학교 전기공학과 박사학위 취득. 1986年 8月 ~ 1989年 2月 Louisiana 주립대학 조교수. 1989年 3月 이후 중앙대학교 제어계측공학과에 현재 부교수로 재직. 주관심 분야는 비선형 시스템 제어이론, 로보트 공학 등임.



金贊浩(正會員)

1962年 4月 12日生. 1989年 2月 경남대학교 전자공학과 졸업 (공학사). 1991年 2月 중앙대학교 대학원 전자공학과 졸업 (공학석사). 1991年 3月 ~ 현재 현대중전기(주)에 근무

全 洪 兌(正會員) 第 29卷 第 1號 參照

현재 중앙대학교 전자공학과 부교수