

論文94-31B-5-11

우수 차수에서 수동 복종단 제자형 회로 실현이 가능한 변형된 inverse Chebyshev 함수에 관한 연구

(A Study on the Modified Inverse Chebyshev Function to Realize the Passive Doubly-Terminated Ladder Network for the Even Order)

崔碩佑*, 尹暢焄*, 金東龍*

(Seok Woo Choi, Chang Hun Yun and Dong Yong Kim)

要約

Inverse Chebyshev 함수는 동일한 설계조건하에서 Chebyshev 함수와 동일한 차수로 실현할 수 있다. 일반적으로 inverse Chebyshev 함수는 통과대역에서의 최대 평탄 특성때문에 Chebyshev 함수에 비하여 지연 특성과 시간영역 응답 특성이 우수하다. 그러나 inverse Chebyshev 함수는 우수 차수인 경우 저지대역 $\omega = \infty$ 에서 유한값을 갖기 때문에 감도 특성등이 우수한 수동 복종단 제자형 회로로의 실현이 불가능하다.

본 논문에서는 $\omega = \infty$ 에서 전달함수 크기가 $|H(j\infty)|=0$ 이 되도록 inverse Chebyshev 함수를 변형하여 기수 차수뿐만 아니라 우수 차수에서도 수동 복종단 회로 실현이 가능하도록 하였다. 그리고 변형된 inverse Chebyshev 함수의 특성을 주파수영역과 시간영역에서 조사한 후 기존의 함수와 비교하고, 수동 복종단 제자형 회로로 실현하였다.

Abstract

Inverse Chebyshev function can realize the same order of Chebyshev function under the same specification. In general, inverse Chebyshev function has the preferable characteristics in terms of the delay characteristics and the time-domain performances compare with Chebyshev function. However, for the even order n , inverse Chebyshev function does not realize in the doubly-terminated ladder network which has preferable sensitivity characteristics because of the finite value at $\omega = \infty$.

In this paper, the modified inverse Chebyshev function with $|H(j\infty)|=0$ is proposed to realize the passive doubly-terminated ladder network for the n even or odd. The modified inverse Chebyshev function characteristics are studied in the frequency and time domain, and then, realize the passive doubly-terminated ladder network.

1. 서론

* 正會員, 全北大學校 電氣工學科
(Dept. of Elec. Eng., Chonbuk Nat'l Univ.)
接受日字: 1993年 2月 1日

신호처리용 필터 설계시 사용하는 함수는 함수 형태에 따라 Butterworth, Chebyshev와 같은 전극

점(all pole) 함수와 inverse Chebyshev, elliptic 함수와 같은 유리(rational) 함수로 구분된다. 식 (1)은 inverse Chebyshev 함수로 동일한 설계명세 조건에서 전극점 함수인 Chebyshev 함수와 동일한 차수로 실현할 수 있다.

$$H(s) = K \prod_{i=1}^{n/2} \frac{s^2 + \omega^2}{(s - p_i)(s - \bar{p}_i)} \quad n: \text{우수} \quad (1a)$$

$$H(s) = \frac{K}{s - \sigma_0} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{s^2 + \omega^2}{(s - p_i)(s - \bar{p}_i)} \quad n: \text{기수} \quad (1b)$$

특히 inverse Chebyshev 함수는 통과대역에서의 최대 평탄 특성때문에 통과대역에서 등파상(equal ripple)을 갖는 Chebyshev 함수에 비하여 지연 특성과 시간영역 응답 특성이 우수하다. 이러한 필터 함수를 수동 복중단 회로로 실현하면 입, 출력측 저항 R_1, R_2 가 동일한 경우 최대 전력전송이 가능하고, 소자 변동에 따른 매우 낮은 감도 특성이 그대로 유지되는 개구리 도약법(leap frog), FDNR(Frequency Dependent Negative Resistor) 모의법등에 의한 능동 RC 필터, 스위치드 커패시터 필터를 설계할 수 있다. 그러나 inverse Chebyshev 함수는 우수 차수에서 식 (1a)와 같이 전달 함수의 분모, 분자가 동일한 차수가 되어 그림 2(b)처럼 $\omega = \infty$ 에서 $|H(j\infty)|$ 가 유한값을 갖게 되어 우수 차수의 inverse Chebyshev 함수는 수동 복중단 회로 실현이 불가능하다. [2] [3]

본 논문에서는 우수 차수를 포함한 모든 차수에 대하여 $\omega = \infty$ 에서 전달함수 크기가 $|H(j\infty)|=0$ 이 되는 변형된 inverse Chebyshev 함수를 제안하고 우수 차수의 설계예를 통하여 변형된 함수의 주파수 특성 및 시간 특성을 기존의 inverse Chebyshev 함수와 비교한 후, 수동 복중단 제자형 회로로 실현하였다.

II. 변형된 inverse Chebyshev 함수

기존의 inverse Chebyshev 함수의 크기 특성은 식 (2)와 같다. [4]

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + [\epsilon C_n(\omega_s)]^2 C_n^{-2}(\frac{\omega_s}{\omega})}} \quad (2)$$

이때, $C_n(x)$: n 차 Chebyshev 다항식

ϵ : 통과대역내의 감쇠 계수

ω_s : 저지 주파수이다.

식 (2)에서 $C_n(x)$ 의 특성상 $\omega = 0$ 에서 최대평탄 특성을

갖지만 그림 2의 inverse Chebyshev 함수의 크기특성과 같이 우수 차수에서는 $\omega = \infty$ 에서 $|H(j\infty)| = \sqrt{1 + [\epsilon C_n(\omega_s)]^2}$ 의 유한값을 갖게 되어 감도 특성이 우수하고, 동일한 저항값을 갖는 경우 최대 전력전송이 가능한 그림 1과 같은 수동 복중단 제자형 회로 실현이 불가능하다.

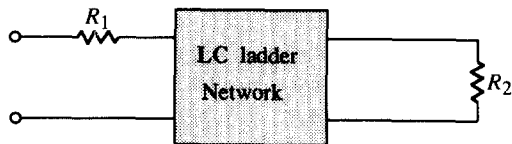


그림 1. 수동 복중단 회로

Fig. 1. A passive doubly-terminated network.

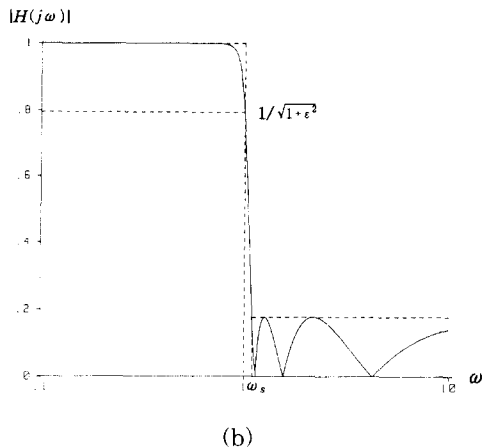
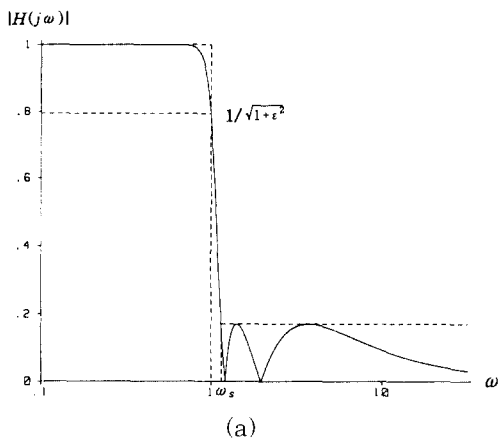


그림 2. Inverse Chebyshev 함수 크기특성 (a) $n=5$ 차, (b) $n=6$ 차

Fig. 2. The magnitude characteristic of inverse Chebyshev function. (a) $n=5$ order, (b) $n=6$ order.

따라서 기존의 함수를 그림 2(a)와 같이 함수 크기가 $\omega = \infty$ 에서 $|H(j\infty)|=0$ 이 되는 기수 함수 형태로 변형하면 우수 차수에서도 수동 복중단 회로 실현이 가능하다.

이와 같은 조건을 만족하기 위해서는 다음 2가지 조건을 만족하여야 한다.

- (조건 1) $|H(j\infty)|=0$: n = 기수, 우수
- (조건 2) $|H(j0)|=1$ 과 $|H(j1)|=1/\sqrt{1+\epsilon^2}$.

따라서 조건을 만족하기 위하여 식 (2)의 항중에서 다음 두 항을 식 (3)과 같이 변형한다.

$$C_n\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right) \rightarrow \frac{1}{\omega} C_{n-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right) \tag{3a}$$

$$C_n(\omega_s) \rightarrow C_{n-1}(\omega_s) \tag{3b}$$

식 (3)을 (2)에 대입한 변형된 inverse Chebyshev 함수 $\hat{H}(s)$ 는 다음과 같다.

$$|\hat{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + [\epsilon C_{n-1}(\omega_s)]^2 \omega^2 C_{n-1}^2\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)}} \tag{4}$$

식 (4)의 분모에는 ω^2 항이 존재하여 n 이 기수, 우수일 때 저지대역에서 ω 가 커질수록 파상이 점진적으로 감쇠하는 특성을 갖게되어 조건 (1)을 만족한다. 저지대역에서 $C_n(\omega_s/\omega)=1$ 일 때 즉, $\omega = \omega_s$ 에서 파상은 최대값을 갖고 식 (5)의 점근선을 따라 감쇠한다.

$$|h(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + [\epsilon C_{n-1}(\omega_s)]^2 \omega^2}} \tag{5}$$

변형된 함수는 저지대역에서 점진적으로 감쇠하는 파상 특성 때문에 제3장에서의 설계예와 같이 기존의 inverse Chebyshev 함수에 비하여 극점-Q값이 작아져 주파수 영역에서의 지연특성과 시간 영역에서의 단위계단응답 특성이 개선된다.⁵⁾ 또한 천이 영역(transition region)에서의 차단 경사도는 동일한 n 차의 inverse Chebyshev 함수에 비하여 완만하지만 $n-1$ 차와 비교하면 식 (6)의 경사 오차 $\epsilon^2/(1+\epsilon^2)^{3/2}$ 만큼 경사가 급격하다.

$$\left. \frac{d|H_n(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=1} = -\frac{\epsilon^2 [1 + f(n, \omega_s)]}{(1 + \epsilon^2)^{3/2}} ;$$

변형된 n 차 inverse Chebyshev 함수 (6a)

$$\left. \frac{d|H_{n-1}(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=1} = -\frac{\epsilon^2 f(n, \omega_s)}{(1 + \epsilon^2)^{3/2}} ;$$

기존의 $n-1$ 차 inverse Chebyshev 함수 (6b)

이때, $f(n, \omega_s) = \frac{1}{2} C_{n-1}^2(\omega_s) \cdot \left[\frac{d}{d\omega} C_{n-1}^2\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right) \right]_{\omega=1}$ 이다.

식 (7a)은 통과대역 손실 α_p 와 저지 주파수 ω_s 에서의 저지대역 감쇠 α_s 가 설계명세조건에 의해 제시될 때 기존의 inverse Chebyshev 함수의 차수를 계산하는 식이고, 변형된 함수의 차수를 구하는 관계식은 $\alpha_p = 10 \log(1 + \epsilon^2)$ 과 $\alpha_s = 10 \log[1 + (\epsilon \omega C_{n-1}(\omega_s))^2]$ 을 이용하면 식 (7b)와 같다.

$$n = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{(10^{0.1\alpha_p} - 1)(10^{0.1\alpha_s} - 1)^{-1}}}{\cosh^{-1} \omega_s} \tag{7a}$$

$$n = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{(10^{0.1\alpha_p} - 1)(10^{0.1\alpha_s} - 1)^{-1} \omega_s^{-2}}}{\cosh^{-1} \omega_s} + 1 \tag{7b}$$

III. 변형된 inverse Chebyshev 함수 설계예 및 고찰

1. 설계예

표 1의 설계명세조건을 만족하는 기존의 inverse Chebyshev 함수와 변형된 함수를 구하기 위하여 식 (7) 이용하여 차수를 계산하면 각각 $n=5.2$ 차 $n=5.8$ 차이다. 그러나 실제 설계에서의 차수는 정수이므로 두 함수 모두 $n=6$ 차이다.

표 1. 설계명세조건

Table 1. Design specification.

통과대역 감쇠 α_p	3 [dB]
저지 주파수 ω_s	1.3 [rad/sec]
저지대역 감쇠 α_s	28 [dB] 이상

그리고 각각의 함수를 식 (2)와 (4)로 부터 구하면 다음과 같다.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2178.474403 C_6^2\left(\frac{1.3}{\omega}\right)}} \tag{8a}$$

$$|\hat{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 480.257676 \omega^2 C_5^2\left(\frac{1.3}{\omega}\right)}} \tag{8b}$$

그림 3은 두 함수의 크기특성으로 그림 3(b)와 같이 변형된 함수는 저지대역에서의 저지주파수 부근을 제외하고 전체 영역에서 기존의 함수 보다 감쇠가 크고, 우수차수에서도 함수 크기가 $\omega = \infty$ 에서 $|\hat{H}(j\infty)|=0$ 이 되어 조건 (1)을 만족함을 알 수 있다. 두 함수의 극점, 영점, 극점-Q 값을 표2에 제시하였다.

표 2. 극점, 영점 비교

Table 2. Comparison of Poles and Zeros.

Inverse Chebyshev 함수 $H(s)$		
P_i, \bar{P}_i	Q_i	ω_i
$-1.378552 \pm j 0.578280$	0.54	1.345859
$-0.641719 \pm j 1.004633$	0.93	1.838478
$-0.172189 \pm j 1.006042$	2.96	5.022813

변형된 inverse Chebyshev 함수 $\hat{H}(s)$		
P_i, \bar{P}_i	Q_i	ω_i
$-1.289833 \pm j 0.474931$	0.53	1.366901
$-0.675892 \pm j 0.959718$	0.87	2.211692
$-0.183686 \pm j 1.003803$	2.78	

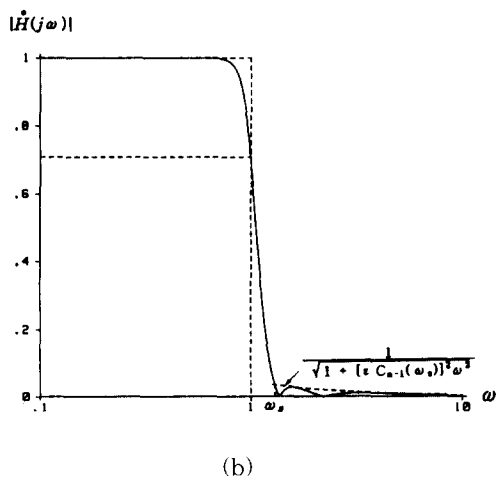
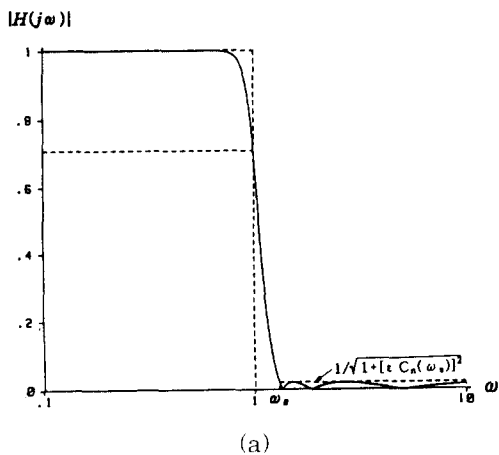


그림 3. 크기특성, n=6차

(a) inverse Chebyshev 함수

(b) 변형된 inverse Chebyshev 함수

Fig. 3. The magnitude characteristic, n=6 order.

(a) Inverse Chebyshev function.

(b) Modified inverse Chebyshev function.

또한 그림 4는 변형된 inverse Chebyshev 함수 6차와 기존의 함수 5차, 6차를 비교한 것으로 천이 영역에서 변형된 함수의 n차 경사가 기존의 함수 n-1차 보다 더 급격함을 알 수 있다.

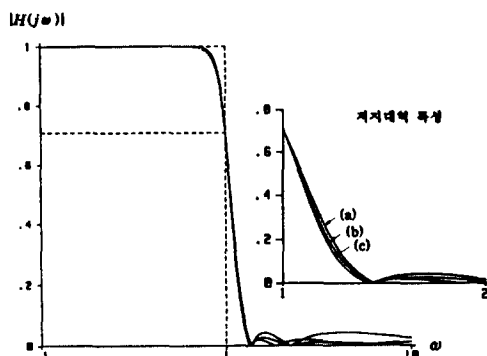


그림 4. 크기특성 비교

(a) 5차 inverse Chebyshev 함수

(b) 6차 변형된 inverse Chebyshev 함수

(c) 6차 inverse chebyshev 함수

Fig. 4. The comparison of magnitude characteristic.

(a) 5th order inverse Chebyshev function.

(b) 6th order modified inverse Chebyshev function.

(c) 6th order inverse chebyshev function.

2. 변형된 inverse Chebyshev 함수 특성 조사 및 고찰

표 2에서 제시한바와 같이 변형된 함수는 기존의 함수에 비하여 극점-Q값이 작아 주파수 영역에서의 지연 특성이 그림 5와 같이 변형된 함수의 지연 특성 곡선이 평탄하고, 그림 6은 시간영역에서의 단위계단 응답 특성을 비교한 것으로 변형된 함수의 오우버 슈

트(overshoot)가 작아 정착(settling) 시간이 빨라져 기존의 함수보다 변형된 함수의 특성이 우수하였다. 또한 그림 7은 시간 지연과 밀접한 관계를 갖는 위상 특성을 비교한 것으로 변형된 inverse Chebyshev 함수의 지연 특성이 그림 5와 같이 향상되어 기존의 함수보다 통과 대역내에서 선형적인 특성을 갖는다.

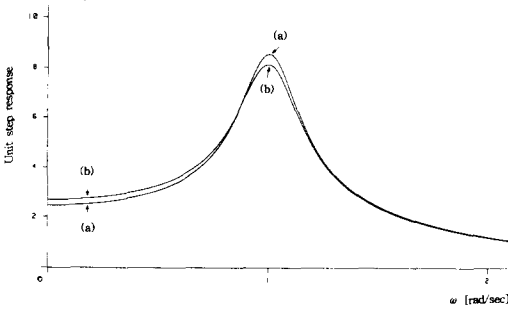


그림 5. 지연 특성

- (a) inverse Chebyshev 함수
- (b) modified inverse Chebyshev 함수

Fig. 5. The delay characteristic.

- (a) inverse Chebyshev function.
- (b) modified inverse Chebyshev function.

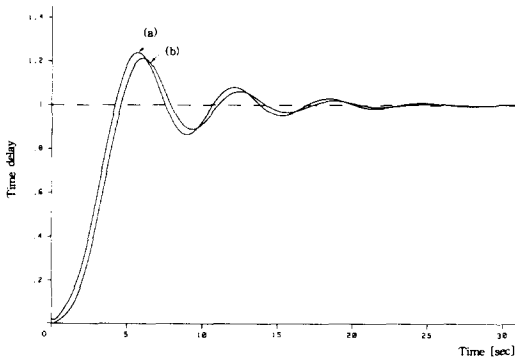


그림 6. 단위계단응답 특성

- (a) inverse Chebyshev 함수
- (b) modified inverse Chebyshev 함수

Fig. 6. The unit step response.

- (a) inverse Chebyshev function.
- (b) modified inverse Chebyshev function.

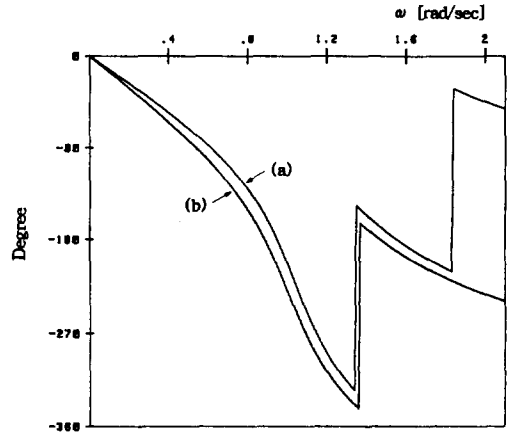


그림 7. 위상 특성

- (a) inverse Chebyshev 함수
- (b) modified inverse Chebyshev 함수

Fig. 7. Phase characteristic.

- (a) inverse Chebyshev function.
- (b) modified inverse Chebyshev function.

IV. 수동 복종단 제자형 회로 실현

변형된 inverse Chebyshev 함수를 그림 1과 같은 수동 복종단 회로로 실현하기 위해 전달 함수를 $H(s)=P(s)/E(s)$ 로 정의하고, Feldtkeller 함수식 $F(s)$ 는 식 (9)와 같으며

$$F(s)F(-s) = E(s)E(-s) - P(s)P(-s) \tag{9}$$

수동 복종단 회로 실현을 위한 구동점 임피던스는 식 (10)이다.^[6]

$$Z(s) = R_1 \frac{E_{even}(s) - F_{even}(s)}{E_{odd}(s) + F_{odd}(s)} \tag{10}$$

이때, $E(s) = E_{even}(s) + E_{odd}(s)$ 이고 $F(s) = F_{even}(s) + F_{odd}(s)$ 이다.

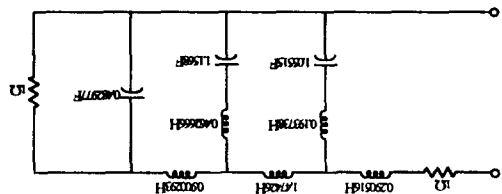


그림 8. 수동 복종단 제자형 회로. n=6차

Fig. 8. The passive doubly-terminated ladder network. n=6th order.

따라서 $s=0$ 에 존재하는 임피던스의 극점을 제거하는 연분수 전개로 실현된 수동 복중단 제자형 회로는 그림 8과 같다.

그림 9는 그림 8 회로의 규준화된 소자값을 음성신호처리 대역 주파수 3,400Hz로 주파수 스케일링하여 SPICE 프로그램으로 시뮬레이션한 특성으로 설계명세 조건과 함수 시뮬레이션 결과와 일치함을 알 수 있다.

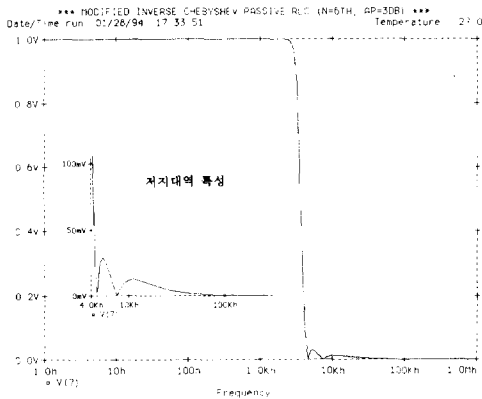


그림 9. SPICE 시뮬레이션
Fig. 9. SPICE simulation.

V. 결론

본 논문에서 제시한 변형된 inverse Chebyshev 함수는 저지대역에서 점진적 감쇠 특성을 갖고 $\omega = \infty$ 에서 함수 크기가 0이 되어 우수 차수에서도 수동 복중단 제자형 회로 실현이 가능하다. 따라서 제안된 inverse Chebyshev 함수는 소자 변동에 따른 감도 특성이 우수한 수동 복중단 제자형 회로의 특성이 그대로 유지되는 개구리 도약법, FDNR 모의법으로 능동 RC 필터, 스위치드 커패시터 필터를 우수 차수에서도 설계할 수 있다.

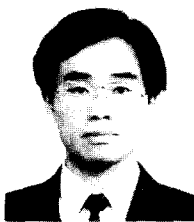
그리고 변형된 inverse Chebyshev 함수는 차수가

우수일때나 기수일때 저지대역에서의 파상이 저지 주파수 부근을 제외한 전체 저지대역에서 작아져 잡음 제거 능력이 우수하다. 또한, 저지 대역에서의 점진적 감쇠특성으로 설계에 있어서와 같이 극점-Q값이 기존의 함수와 비교하여 작아지므로 지연 특성이 평탄하고, 단위계단응답 특성과 위상의 선형 특성도 개선되어 각종 신호처리용 필터 설계에 응용하면 필터 특성을 개선할 수 있다.

參考文獻

- [1] H. K. Kim, S. S. Song and D. Y. Kim, "Some prominent aspects of the inverse Chebyshev functions," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-38, pp. 320-322, Mar. 1991.
- [2] R. Schaumann, M. S. Ghauri and K. R. Laker, *Design of Analog Filters*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- [3] G. C. Temes and H. J. Orchard, "First-order sensitivity and worst case analysis of doubly terminated reactance two-ports," *IEEE Trans.* vol. CT-20, pp. 567-571, Sept 1973.
- [4] 김형감, 회로망 분석 및 합성, 사단법인 대한전기학회, 1990.
- [5] H. K. Kim, "The effects of lower Q values on the filters having equal ripples in passband," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-39, pp. 305-309, Apr. 1992.
- [6] A. S. Sedra and P. O. Brackett, *Filter Theory and Design: Active and Passive*, MATRIX Publishers, Portland, 1978.

著者紹介



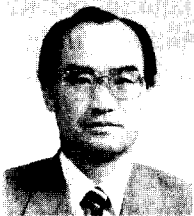
崔碩佑(正會員)

1962年 3月 14日生. 1988年 2月 전북대학교 전기공학과 졸업(학사). 1990年 2月 전북대학교 전기공학과 석사학위 취득. 1992年 2月 전북대학교 전기공학과 박사과정 수료. 주관심 분야는 회로망 합성 및 아날로그 신호처리 등임.



尹暢焘(正會員)

1962年 7月 8日生. 1985年 2月 전북대학교 전기공학과 졸업(학사). 1987年 2月 전북대학교 전기공학과 석사학위 취득. 1992年 8月 전북대학교 전기공학과 박사과정 수료. 주관심 분야는 회로망 합성 및 아날로그 신호처리 등임.



金東龍(正會員)

1945年 7月 31日生. 1967年 2月 전북대학교 전기공학과 졸업(학사). 1973年 2月 전북대학교 전기공학과 석사학위 취득. 1984年 5月 캐나다 마니토바대학교 전기공학과 공학박사 취득. 1979年 ~ 1984年 캐나다 마니토바대학교 전기공학과 연구원. 1973年 ~ 현재 전북대학교 전기공학과 교수. 1992年 ~ 현재 전북대학교 부속 전기전자회로합성연구소 소장. 주관심 분야는 회로망 합성 및 아날로그 신호처리 등임.