論文94-31B-5-8

이산시간 시스템에서 $(J,\ J')$-lossless 분해와 H^∞ 제어

($(J,\ J')$-lossless factorization and H^∞ control in discrete-time systems)

丁 銀 泰*, 李 載 命**, 朴 烘 焙*

(Eun Tae Jeung, Jae Myoung Lee and Hong Bae Park)

要 約

이산시간 시스템에서 선형분수변환(LFT: linear fractional transformation)으로 표현된 H^∞ 제어문제를 체인스케터링표현(CSD: chain scattering description)으로 나타내어 $(J,\ J')$-lossless 소인수분해를 이용하여 준최적 H^∞제어문제를 해결하였다. LFT를 CSD형태로 변환하기 위해서는 표준플랜트의 P_{21}의 역행렬이 존재하여야 한다. 본 논문에서는 P_{21}의 역행렬이 존재하지 않는 4-블럭문제에서도 LFT를 CSD로 변환하는 방법을 제시하고 이렇게 변환된 행렬을 $(J,\ J')$-lossless 소인수분해함으로서 모든 준최적 H^∞ 제어기를 매개변수화하였다. 또한 제안한 방법은 단지 두개의 리카티 방정식을 풀므로서 이산시간 시스템의 준최적 H^∞ 제어문제를 해결할 수 있음을 보였다.

Abstract

We resolve the suboptimal H^∞ control problem using $(J,\ J')$-lossless coprime factorization by transforming the linear fractional transformation(LFT) into chain scattering description (CSD) in discrete-time systems. The condition transformed LFT into CSD is that the inverse matrix of P_{21} of standard plant exists. But, this paper presents the method of transforming LFT into CSD for 4-block problem in case that the inverse matrix of P_{21} of standard plant does not exist and parameterization of the all suboptimal H^∞ controllers using $(J,\ J')$-lossless coprime factorization. It is shown that this method can resolve the suboptimal H^∞ control problem solving only two Riccati equations in discrete-time systems.

Ⅰ. 서론

1981년 Zames[1]가 감도최소화 문제를 제안한 이래 H^∞ 최적 제어이론은 많은 관심을 받아 오고 있다. H^∞ 제어문제를 해결하기 위해서는 두 가지 접근방법, 즉 보간법 및 근사화방법이 있다. 보간법은 직관적으로 명확하고 개념적으로 쉽지만 좋은 계산 알고리즘을 제시하지 못한 반면에, 근사화 방법은 Nehari 근사화 정리가 제시되면서 계산적인 측면에 두드러진 진보를 가져왔다.

이산시간 시스템을 유한차원 선형 시불변으로 제한한 그림 1과 같은 제어시스템을 고려하자. 여기서 w

*正會員, 慶北大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Kyungpook Nat'l Univ.)
**正會員, 國防科學硏究所
(Agency for Defense Development)
接受日字 : 1993年 11月 12日

는 외란이나 기준입력과 같은 외부신호이고 z는 최소화하고자 하는 오차신호이다. 그리고 y와 u는 각각 측정출력신호와 제어입력신호이다. w에서 z까지의 폐루프 전달함수는 플랜트 P와 제어기 K의 선형분수변환으로 표현되어진다. 여기서 P와 K의 선형분수변환 $LFT(P, K)$는

$$LET(P,K) := P_{11} + P_{12}K\left(I - P_{22}K\right)^{-1}P_{21} \tag{1}$$

와 같이 표현할 수 있으며,

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix}(zI - \hat{A})^{-1}\begin{bmatrix} \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix} \\ &:= \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{array}\right] \end{aligned} \tag{2}$$

와 제어기 K는 실유리 행렬이다. H^∞ 준최적 제어문제는 폐루프 시스템이 내부안정(internally stable)하고 주어진 $\gamma>0$에 대해서

$$\|LET(P,K)\|_\infty < \gamma \tag{3}$$

을 만족하는 제어기 K를 찾는 것이다.

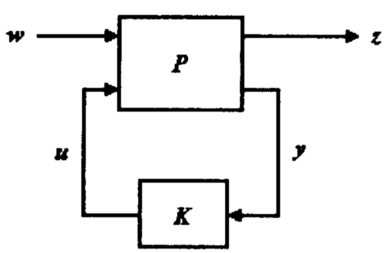


그림 1. 표준궤환제어 선도

Fig. 1. Standard feedback control configuration.

만약 표준플랜트에서 P_{21}의 역행렬이 존재한다면, 그림 1과 같은 선형분수변환은 그림 2와 같은 체인스케터링표현으로 나타낼 수 있다. 표준플랜트 G와 제어기 K의 체인스케터링표현을 $CSD(G, K)$는

$$CSD(G,K) := \left(G_{11}K + G_{12}\right)\left(G_{21}K + G_{22}\right)^{-1} \tag{4}$$

로 쓸 수 있다. 여기서

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{12} - P_{11}P_{21}^{-1}P_{22} & P_{11}P_{21}^{-1} \\ P_{21}^{-1}P_{22} & P_{21}^{-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

는 실유리 행렬이다.

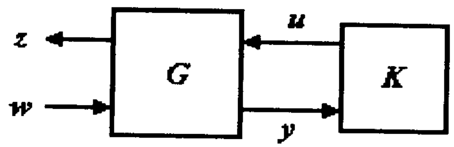


그림 2. 표준 플랜트의 체인스케터링표현

Fig. 2. Chain scattering description of standard plant.

폐루프 시스템이 내부안정하고 식(3)을 만족하는 제어기 K를 찾는 문제는

$$\left\|LET\left(P_\gamma, K\right)\right\|_\infty < 1 \tag{6}$$

을 만족하고 폐루프를 내부안정화하는 제어기 K를 찾는 문제와 등가이다. 여기서

$$P_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}P_{11} & \gamma^{-1}P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{7}$$

이다. 또한, P_{21}의 역행렬이 존재한다면, 식(6)은

$$\left\|CSD\left(G_\gamma, K\right)\right\|_\infty < 1 \tag{8}$$

와 등가이다. 여기서 CSD G_γ 행렬은

$$G_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}\left(P_{12} - P_{11}P_{21}^{-1}P_{22}\right) & \gamma^{-1}P_{11}P_{21}^{-1} \\ -P_{21}^{-1}P_{22} & P_{21}^{-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

이다. 이와같이 P_{21}의 역행렬이 존재하는 2-블럭 경우에 대해서, Tsai 등[2]은 CSD G_γ 행렬을 (J, J')-lossless 소인수분해하여 H^∞ 제어문제를 풀었다. Kondo 등[3]은 모델정합(model matching)문제에서 CSD를 이용하여 극점과 영점의 소거(pole-zero cancellation)기법에 대해서 연구했고 제어기 K를 찾는데 P_{22}를 소인수분해할 필요가 없다는 것을 밝혔다. 그러나 P_{21}의 역행렬이 존재하지 않는 4-블럭 경우에는 식(7)과 같이 $LFT(P, K)$를 직접적으로 $CSD(G, K)$로 변형할 수 없다. 이러한 4-블럭 경우에 대해서, Ball 등[4]은 수학적 편의를 위해, P_{21} 부분의 역행렬이 존재하도록 가상 출력을 첨가하여 제어기를 설계하였다 본 논문에서는, 전대역통과(allpass)함수를 폐루프 전달함수에 곱하여도 H^{∞}-놈(norm)이 변화하지 않는다는 것을 이용하여 선형분수변환을 체인스케터링표현으로 변형하는 방법을 제시하였다. 또한 (J, J')-lossless 소인수분해를 이용하여 이산시간 시스템에서 H^{∞} 준최적 제어문제의 해를 찾는 방법을 제시하였다. 이러한 해는 두개의 리카티 방정식의 해로부터 쉽게 얻을 수 있음도 보인다.

먼저 본논문에서 사용되는 표기법들을 다음과 같이 정의한다.

R: 실수
C: 복소수
$\partial I := \{z : |z| < 1,\ z \in \mathbf{C}\}$
$\partial D := \{z : |z| = 1,\ z \in \mathbf{C}\}$
$\partial O := \{z : |z| > 1,\ z \in \mathbf{C}\}$
$\bar{z}$: z의 공액복소수
G^T : 행렬 G의 전치(transpose)
$G^{\sim}(z)$: $=G^T(1/z)$
$G^{*}(z)$: $=G^T(\bar{z})$
$\bar{\sigma}(A)$: 상수 행렬 A의 최대특이치(the largest singular value)
RL^{∞} : 진유리 전달함수행렬의 집합
RH^{∞} : 안정진유리 전달함수행렬의 집합
UH^{∞} : 자체 및 역도 RH^{∞} 에 속하는 행렬의 집합
$\|G\|_{\infty} := \sup_{z \in \partial D} \bar{\sigma}[G(z)]$
$BH^{\infty} := \{G(z) : \|G\|_{\infty} < 1,\ G(z) \in RH^{\infty}\}$

표현을 간단히 하기 위해 $G(z)$를 G로 쓰기로 한다. 본 논문에서 해결하고자 하는 4-블럭문제를 다루기 위해 다음의 네가지 가정이 필요하다.

[가정 1] $(\hat{A}, \hat{B}_2)$이 가안정(stabilizable)이고 $(\hat{C}_2, \hat{A})$이 가검출(detectable)

[가정 2] $rank\begin{bmatrix} \hat{A} - zI & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} \end{bmatrix} = r + rank(\hat{A}),\ \forall z \in \partial D$

[가정 3] $rank\begin{bmatrix} \hat{A} - zI & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{12} \end{bmatrix} = q + rank(\hat{A}),\ \forall z \in \partial D$

[가정 4] $rank(\hat{D}_{21}) = r,\ rank(\hat{D}_{12}) = q$

Ⅱ. 예비지식과 기본개념

이 장에서는 본 논문에서 필요한 몇가지 예비지식과 H^{∞} 준최적 제어문제를 푸는데 직접적으로 이용되는 (J, J')-lossless의 성질에 대해서 알아보기로 한다.

전달함수 행렬 G의 최소상태공간표현을 $D+C(zI-A)^{-1}B$라 두자. 이때 A의 역행렬이 존재한다면, $G^{\sim}$의 최소상태공간표현이

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{\sim} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-T} & A^{-T}C^T \\ \hline -B^T A^{-T} & D^T - B^T A^{-T} C^T \end{array}\right] \tag{10}$$

으로 나타남을 쉽게 알 수 있다. 그리고 부호행렬 J와 J'을

$$J = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_r \end{bmatrix},\quad J' = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{bmatrix}$$

와 같이 정의할 때, 전달함수 행렬 G가

$$G^{\sim} J G \le J',\quad \forall z \in \mathbf{C} \tag{11}$$

을 만족하면, G를 (J, J')-unitary라 부른다. 또한, (J, J')-unitary 행렬 G가

$$G^{\sim} J G \le J',\quad \forall z \in \partial O \tag{12}$$

을 만족하면 행렬 G를 (J, J')-lossless라 부른다. 행렬 G가 (J, J')-unitary일 필요충분조건과 (J, J')-lossless일 필요충분조건을 보조정리 1과 2에 보인다.

보조정리 1 G의 최소상태공간표현을 G = $D+C(zI-A)^{-1}B$라 할 때, G가 (J, J')-unitary 일 필요충분조건은

$$\begin{aligned} Y &= A^T Y A + C^T J C \\ 0 &= C^T J D + A^T Y B \\ J' &= D^T J D + B^T Y B \end{aligned} \tag{13}$$

을 만족하는 행렬 $Y=Y^T$가 존재한다. 그리고 G가 (J, J')-lossless일 필요충분조건은 식(13)을 만족하는 행렬 $Y \ge 0$가 존재한다.

보조정리 2 (J, J')-lossless 행렬 Θ가

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \tag{14}$$

와 같이 세분(partition)되었을 때, $S \in BH^{\infty}$이면

$$\begin{aligned} \Phi &= CSD(\Theta, S) \\ &= [\theta_{11} S + \theta_{12}][\theta_{21} S + \theta_{22}]^{-1} \end{aligned} \tag{15}$$

는 RH^{∞}에 속한다.

(J, J')-lossless 소인수분해에 대한 공식은 이산시간 대수 리카티 방정식의 해와 아주 밀접한 관계가 있다. 따라서

$$A^T X A - X - A^T X R (I + R^T X R)^{-1} R^T X A + Q = 0 \tag{16}$$

와 같은 형태로 주어지는 이산시간 대수 리카티 방정식에 대해서 알아보자. 여기서 A, Q, X와 R은 적절한 차원을 가지는 상수행렬이고, $Q \geq 0$이고 A는 역행렬이 존재한다. 리카티 방정식 (12)의 해 X는

$$X = Ric\begin{bmatrix} A + RR^T A^{-T} Q & -RR^T A^{-T} \\ -A^{-T} Q & A^{-T} \end{bmatrix} \tag{17}$$

와 같이 주어진다는 것은 잘 알려진 사실이다.

보조정리 3 리카티 방정식 (16)의 해를 X라 두자. 이 때 $X \geq 0$일 필요충분조건은 $A - R(I + R^T X R)^{-1} R^T X A$가 안정하다는 것이다.

Ⅲ. 4-블럭 문제

이 장에서는 [가정 1] ~ [가정 4] 를 만족하는 4-블럭 문제를 다루고자 한다. 만약 P_{21}의 역행렬이 존재하지 않는다면, $LFT(P, K)$를 $CSD(G, K)$로 바꿀 수 없다. 그러므로 4-블럭을 다루기 위해서는 보조정리 4가 요구된다.

보조정리 4 F와 G는 RL^{∞}에 속하고 행의 수가 같다고 가정하자. 이때 $\|F \; G\|_{\infty} < \gamma$이라면

$$\|G\|_{\infty} < \gamma \tag{18}$$

이고

$$\|G_0^{-1} F\|_{\infty} < 1 \tag{19}$$

이다. 여기서 G_0는 $\gamma^2 I - GG^{\sim}$의 스펙트랄요소(spectral factor)이다. 역 또한 성립한다

[가정 4] 에서 P_{21}의 D행렬(즉, D_{21})의 계수(rank)가 행의 수와 같기 때문에, $TT^{*} = I$를 만족하는 좌소인수분해 $P_{21} = Q^{-1} T$가 항상 존재하고

$$\begin{bmatrix} T \\ T_{\perp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ T_{\perp} \end{bmatrix}^{*} = I \tag{20}$$

을 만족하는 $T_{\perp}$ 이 존재한다. 여기서 $T_{\perp}$은 T의 직교보(orthogonal complement)이다. 그리고 X가 전대역 통과 즉 inner이고 정방행렬이면, 어떤 G에 대해서 $\| GX \|_{\infty} = \| G \|_{\infty}$을 만족한다. 식(3)으로부터

$$\begin{aligned} \gamma &> \|LFT(P, K)\|_{\infty} \\ &= \left\|P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21}\right\|_{\infty} \\ &= \left\|\left[P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} Q^{-1} T\right]\left[T^{*} \;\; T_{\perp}^{*}\right]\right\|_{\infty} \\ &= \left\|P_{11} T^{*} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} Q^{-1} \;\; P_{11} T_{\perp}^{*}\right\|_{\infty} \end{aligned} \tag{21}$$

이다. 보조정리 4로 부터, 식(21)을

$$\left\|L^{-1} P_{11} T^{*} + L^{-1} P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} Q^{-1}\right\|_{\infty} < 1 \tag{22}$$

와 같이 바꾸어 쓸 수 있다. 여기서 L은 $\gamma^2 I - P_{11} T^{*}{}_{\perp} T_{\perp} P^{*}_{11}$의 스펙트랄요소이다. 표준 플랜트를

$$P_{\gamma} = \begin{bmatrix} P_{\gamma 11} & P_{\gamma 12} \\ P_{\gamma 21} & P_{\gamma 22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} L^{-1} P_{11} T^{*} & L^{-1} P_{12} \\ Q^{-1} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{23}$$

와 같이 정의하면 식(22)를

$$\|LFT(P_{\gamma}, K)\|_{\infty} < 1 \tag{24}$$

로 간략하게 표현할 수 있고, P_{21}의 역행렬이 존재하기 때문에 식(5)를 이용하여

$$\|CSD(G_{\gamma}, K)\|_{\infty} < 1 \tag{25}$$

와 같이 CSD형태로 바꿀 수 있다. 여기서

$$G_{\gamma} = \begin{bmatrix} L^{-1} P_{12} - L^{-1} P_{11} T^{*} Q P_{22} & L^{-1} P_{11} T^{*} Q \\ -Q P_{22} & Q \end{bmatrix} \tag{26}$$

이다. 위에서 언급한 내용들을 다음 정리에 요약하였다.

정리 1 시스템 (2)를 고려하고 [가정 1] ~ [가정 4] 를 만족한다고 가정하자. 이 때

i) $\|LFT(P, K)\|_{\infty} < \gamma$

ii) $\|LFT(P_{\gamma}, K)\|_{\infty} < 1$

iii) $\|CSD(G_{\gamma}, K)\|_{\infty} < 1$

을 만족하는 제어기 K를 찾는 문제는 등가이다. 여기서 P와 G는 각각 식(23)과 (26)에 주어져 있다.

Ⅳ. (J, J')-lossless 소인수분해

어떤 실유리 행렬도 좌 · 우 소인수분해를 가질 수 있으므로 CSD $G\gamma$ 행렬의 소인수 요소가 (J, J')-lossless가 되도록 소인수분해하고 이러한 소인수 요소를 상태공간표현으로 나타낼 수 있다.

V^{-1}가 (J, J')-lossless가 되도록 CSD $G\gamma$ 행렬을

$$G_{\gamma} = V^{-1} U \tag{27}$$

와 같이 소인수분해하고 N이 $(J,\ J')$-lossless가 되도록 G의 분자 U 행렬을

$$U = NM^{-1} \tag{28}$$

와 같이 소인수분해한다. 이때 U가 안정하므로 M은 UH^{∞} 에 속한다.

식(27)과 같이 CSD $G\gamma$ 행렬을 좌소인수분해하고 식(28)과 같이 U 행렬을 우소인수분해한다고 가정하자. 이때 제어기 K를 K=$CSD(M,\ K)$와 같이 표현한다면,

$$\begin{aligned} LFT(P_\gamma, K) &= CSD(G_\gamma, K) \\ &= CSD(V^{-1}NM^{-1}, K) \\ &= CSD(V^{-1}NM^{-1}, CSD(M,S)) \\ &= CSD(V^{-1}N, S) \end{aligned} \tag{29}$$

와 같이 된다. 이 식에서 $V^{1}N$이 $(J,\ J')$-lossless이기 때문에, S가 BH^{∞} 에 속한다면, 보조정리 2로 부터 $LFT(P_\gamma,\ K)$도 BH^{∞}에 속한다. 그러므로 폐루프의 전달함수 행렬 $LFT(P,\ K)$의 H^{∞} -놈은 주어진 γ 보다 작다. 이러한 관계로 부터 $||LFT(P,\ K)||_\infty < \gamma$을 만족하는 모든 제어기 K를

$$\begin{aligned} K &= CSD(M,S) \\ &= (M_{11}S + M_{12})(M_{21}S + M_{22})^{-1}, \quad S \in BH^{\infty} \end{aligned} \tag{30}$$

와 같이 매개변수화 할 수 있다.

$(J,\ J')$-lossless의 성질을 가지도록 소인수분해하는 CSD $G\gamma$ 행렬의 상태공간표현이

$$\begin{aligned} G_\gamma &= D + C(zI - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (zI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

이라 두자. 그리고 (A,B)는 가안정이고 (C,A)는 가검출이라 가정한다.

정리 2 V^{1}가 $(J,\ J)$-lossless인 좌소인수분해 G_γ $=V^{1}U$이 존재할 필요충분조건은

$$Y = Ric\begin{bmatrix} A^T & -C^TJCA^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix} \tag{32}$$

을 만족하는 행렬 $Y' \geq 0$가 존재하고

$$E(J + CYC^T)E^T = J \tag{33}$$

을 만족하는 비특이(nonsingular) 상수행렬 E가 존재한다. 이렇게 소인수분해한 행렬 V와 U의 상태공간표현은

$$\begin{bmatrix} V & U \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A + HC & H & B + HD \\ \hline EC & E & ED \end{array}\right] \tag{34}$$

이다. 여기서

$$H = -AYC^T(J + CYC^T)^{-1} \tag{35}$$

이다.

(증명) 부록 참조. ■

정리 3 RH^{∞}에 속하는 행렬 U의 상태공간표현을 U=D_u+$C_u(zI-A_u)^{-1}B_u$라 가정하자. N이 $(J,\ J')$-lossless이고 M이 UH^{∞}에 속하는 우소인수분해 U=NM^{1}가 존재할 필요충분조건은

$$X = Ric\begin{bmatrix} A_0 + B_0JB_0^TA_0^{-T}C_0 & -B_0JB_0^TA_0^{-T} \\ -A_0^{-T}C_0 & A_0^{-T} \end{bmatrix} \tag{36}$$

을 만족하는 행렬 $X \geq 0$가 존재하고

$$W^T(D_u^TJD_u + B_u^TXB_u)W = J' \tag{37}$$

을 만족하는 비특이 상수행렬 W가 존재한다. 여기서

$$\begin{aligned} A_0 &= A_u - B_u(D_u^TJD_u)^{-1}D_u^TJC_u \\ B_0JB_0^T &= B_u(D_u^TJD_u)^{-1}B_u^T \\ C_0 &= C_u^T\left[J - JD_u(D_u^TJD_u)^{-1}D_u^TJ\right]C_u \end{aligned} \tag{38}$$

이다. 이러한 우소인수분해의 인수 M과 N의 상태공간표현은

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_u + B_uF & B_uW \\ \hline F & W \\ C_u + D_uF & D_uW \end{array}\right] \tag{39}$$

으로 주어진다. 여기서

$$F = -WJ'W^T(B^TXA + D^TJC) \tag{40}$$

이다.

주어진 γ에 대해서 $V^{1}N$이 $(J,\ J')$-lossless이고 M이 UH^{∞} 에 속하도록 G_γ 를 $V^{1}NM^{1}$와 같이 소인수분해할 수 있다고 가정하자. 이러한 분해를 다음의 두단계로 찾을 수 있다.

1. 정리 2를 사용하여 V^{1}가 $(J,\ J)$-lossless가 되

도록 를 $V^{-1}U$와 같이 좌소인수분해 한다. 여기서 V와 U의 상태공간표현은 식(34)에 나타나 있다.

2. 정리 3을 행렬 U에 적용하여, N이 (J, J')-lossless가 되도록 U를 NM^{-1}와 같이 우소인수분해한다. 여기서

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A+HC+BF+HDF & BW+HDW \\ \hline F & W \\ C+DF & DW \end{array}\right] \tag{41}$$

$$F = -WJ'W^T\left[(B+HD)^T XA + D^T JC\right] \tag{42}$$

$$W^T\left[D^T JD + (B+HD)^T X(B+HD)\right]W = J' \tag{43}$$

$$X = Ric\begin{bmatrix} A_0 + B_0 JB_0^T A_0^{-T} C_0 & -B_0 JB_0^T A_0^{-T} \\ -A_0^{-T} C_0 & A_0^{-T} \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$A_0 = A + HC - (B+HD)\left(D^T JD\right)^{-1} D^T JC$$

$$B_0 JB_0^T = (B+HD)\left(D^T JD\right)^{-1}(B+HD)^T$$

$$C_0 = C^T\left[J - JD\left(D^T JD\right)^{-1} D^T J\right]C$$

이다.

정리 4 주어진 γ에 대해서, [가정 1] ~ [가정 4를 만족하는 표준 플랜트 P를 식(26)에 의해서 $G_\gamma = D + C(zI-A)^{-1}B$와 같이 표현되었다고 가정하자. $\|CSD(G_\gamma, K)\| < 1$을 만족하고 내부안정화하는 제어기 K가 존재할 필요충분조건은 행렬 G_γ가 $V^{-1}N$이 (J, J')-lossless이고 M이 UH^∞에 속하도록 하는 소인수분해 $G_\gamma = V^{-1}NM^{-1}$이 존재한다. 즉, 식(33)과 식(43)을 각각 만족하는 비특이 상수행렬 R과 W가 존재하고 식(32)와 식(44)를 각각 만족하는 Y와 X가 $I-XY>0$을 만족한다.

[가정 1] ~ [가정 4] 를 만족하는 시스템 (2)에 대해서 주어진 놈경계치를 만족하고 폐루프 시스템이 내부안정화하는 모든 제어기 K는

$$K = CSD(M, S), \quad \forall S \in BH^\infty \tag{45}$$

와 같이 매개변수화된 형태로 주어진다. 여기서 M의 상태공간표현은 식(41)에 나타나 있다.

만약 G_γ가 UH^∞에 속한다면, 단지 하나의 리카티 방정식을 풀면 된다. 왜냐하면 우소인수분해할 때 사용되는 리카티 방정식의 해 Y가 영행렬이 되기 때문이다.

V. 예제

이 장에서는 수치적 예를 통하여 위에서 얻은 결과의 타당성을 확인한다. 표준 플랜트

$$P = \begin{bmatrix} G & 0 & G \\ 0 & 0 & I \\ G & I & G \end{bmatrix} \tag{46}$$

인 시스템을 고려하자. 여기서

$$G = \frac{z-0.6}{z-1.8} \tag{47}$$

이다. 폐루프 시스템의 놈이 2.31보다 작게 되고 내부안정화하는 제어기 K를 찾아보자. 즉,

$$\|LFT(P,K)\|_\infty < \gamma = 2.31 \tag{48}$$

을 만족하고 내부안정화하는 제어기를 찾는 것이다.

표준 플랜트 P를 살펴보면 P_{21}이 fat 행렬이므로 역행렬이 존재하지 않는다. 즉 표준 플랜트 P는 [가정 1] ~ [가정 4] 를 만족하는 4-블럭 문제이기 때문에, 정리 1을 이용하여 CSD의 G_γ 행렬을 구하면

$$G_\gamma \begin{bmatrix} \frac{0.3326(z-0.5556)(z-0.6)}{(z-0.5642)(z-1.7676)} & \frac{0.1109(z-1.6667)(z-0.6)}{(z-0.5642)(z-1.7676)} \\ 04329 & 0 \\ \frac{-0.4855(z-0.6)}{(z-0.5657)} & \frac{0.4855(z-1.8)}{(z-0.5657)} \end{bmatrix} \tag{49}$$

이다. CSD의 G_γ 행렬을 정리 2와 3을 이용하여 소인수분해하면, 제어기 K는

$$K = CSD(M, S), \quad S \in BH^\infty \tag{50}$$

와 같이 얻을 수 있고 여기서

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-0.0022(z+10449.48)}{z-0.5642} & \frac{-22.4066(z+0.0045)}{z-0.5642} \\ \frac{-0.1030(z-5.7082)}{z-0.5642} & \frac{-0.4688(z+0.0753)}{z-0.5642} \end{bmatrix} \tag{51}$$

이다. 특히, $S=0$ 일 때의 제어기, 즉, 중심제어기 (central controller) K_0는

$$K_0 = \frac{47.7930(z+0.0045)}{z+0.0753} \tag{52}$$

로 주어진다. 이 제어기 K_0와 표준플랜트 P로 구성되는 폐루프 전달함수 행렬의 모든 고유치가 단위원 안에 놓여 있기 때문에 폐루프 시스템은 내부안정한

다. 그리고 폐루프 시스템의 최대 최소 특이치를 주파수 ω에 따라 그려보면 그림 3과 같이 되므로 폐루프 시스템의 놈이 주어진 2.31보다 작음을 알 수 있다.

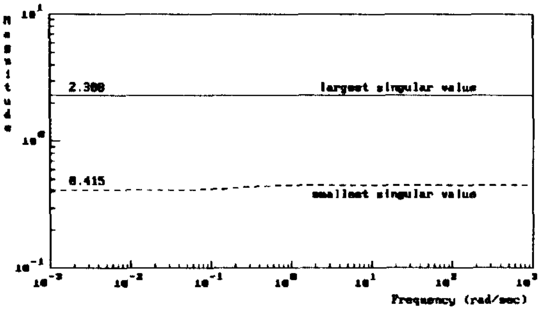


그림 3. $LFT(P,\ K)$의 최대 최소 특이치

Fig. 3. Singular values of $LFT(P,\ K)$.

Ⅵ. 결론

본 논문에서는 이산시간 시스템에서 폐루프 전달함수의 H^{∞}-놈이 주어진 놈 경계치 γ보다 작게 하고 폐루프 시스템을 내부안정화하는 제어기를 찾았다. P_{21}의 역행렬이 존재하지않는 경우에는 LFT를 CSD형태로 바꿀 수가 없다. 그래서 어떤 전달함수에 전대역통과함수를 곱하여도 H^{∞}-놈은 변화하지 않는다는 성질과 보조정리 4를 이용하여 P_{21}의 역행렬이 존재하지 않는 경우에도 LFT를 CSD로 변환하는 방법을 제시하였다. 이러한 방법은 가장 일반적인 4-블럭문제에 적용하여 LFT를 CSD로 바꿀 수 있다. 그러므로 $\|LFT(P,\ K)\|_{\infty}<\gamma$을 만족하는 제어기를 찾는 문제는 $\|CSD(G_{\gamma},\ K)\|_{\infty}<1$을 만족하는 제어기를 찾는 문제와 등가임을 보였다. 이렇게 CSD로 변형된 문제에서 G_{γ} 행렬을 $(J,\ J')$-lossless 소인수분해를 이용하여 체인스케터링 접근방법으로 준최적 H^{∞} 제어문제를 해결하였다. 또한, 이러한 접근방법은 H^{∞} 제어문제를 단지 두 개의 리카티 방정식의 해를 찾음으로서 모든 제어기를 매개변수화 하였다.

附 錄

(정리 2의 증명)

어떤 실유리 행렬 H^{∞}의 좌소인수분해의 인수 V와 U의 상태공간표현이 식(34)와 같이 표현될 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다. 여기서 $A_0=A+HC$는 안정(stable)이고 E의 역행렬은 존재한다. 상수행렬 Y가

$$Y = A_0 Y A_0^T + HJH^T \tag{A-1}$$

$$0 = CY + JH^T A_0^{-T} \tag{A-2}$$

$$J = E\left(J + CYC^T\right)E^T \tag{A-3}$$

을 만족하는 대칭행렬이라 가정하자. $(V^{\sim})^{-1}JV^{-1}=(VJV^{\sim})^{-1}$이기 때문에, V^{-1}이 $(J,\ J)$-unitary라면 $VJV^{\sim}=J$을 만족한다. $VJV^{\sim}$을 계산하여 상태공간표현으로 나타내면

$$VJV^{\sim} = \left[\begin{array}{cc|c} A_0 & -HJH^T A_0^{-T} & H\left(J - JH^T A_0^{-T} C^T\right)E^T \\ 0 & A_0^{-T} & A_0^{-T} C^T E^T \\ \hline EC & -EJH^T A_0^{-T} & E\left(J - JH^T A_0^{-T} C^T\right)E^T \end{array}\right] \tag{A-4}$$

이다. 유사변환(similarity transformation)행렬

$$T = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{A-5}$$

를 이용하여 유사변환을 하면 $VJV^{\sim}=J$을 만족한다. 여기서 Y는 리카티 방정식 (32)의 해이다. 더우기 $Y\geq 0$이면 V^{-1}는 $(J,\ J)$-lossless이다. 식(33)와 (35)은 각각 식(A-3)과 (A-2)로 부터 쉽게 알 수 있다. 그리고 식(A-1)에 식(35)을 대입하면

$$\begin{aligned} Y =& \left[A - AYC^T\left(J + CYC^T\right)^{-1}C\right]Y\left[A - AYC^T\left(J + CYC^T\right)^{-1}C\right]^T \\ &+ AYC^T\left(J + CYC^T\right)^{-1}J\left(J + CYC^T\right)^{-1}CYA^T \end{aligned} \tag{A-6}$$

이고 정리하면

$$Y = AYA^T - AY\left(I + C^T JCY\right)^{-1}C^T JCYA^T \tag{A-7}$$

이다. 이 리카티 방정식은 식(32)와 동일하다. 끝으로 $Y\geq 0$일 때, $A+HC$가 안정하다는 것만 보이면 증명은 끝난다.

$$\begin{aligned} A + HC &= A - AYC^T\left(J + CYC^T\right)^{-1}C \\ &= A - AYC^T\left(I + JCYC^T\right)^{-1}JC \\ &= A - AYC^T JC\left(I + YC^T JC\right)^{-1} \\ &= A\left(I + YC^T JC\right)^{-1} \end{aligned}$$

이므로 보조정리 3에 의해 $A+HC$는 안정하다.

參 考 文 獻

[1] G. Zames, "Feedback and optimal

sensitivity: Model reference transformations multiplicative seminorms, and approximate inverses," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 26, no. 2, pp. 301-320, Apr. 1981.

[2] M. C. Tsai and I. Postlethwaite, "On J-lossless coprime factorization and H^∞ control," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 1, pp. 47-68, 1991.

[3] R. Kondo and S. Hara, "On cancellation in H^∞ optimal controllers," *Systems & Control Letters*, vol. 13, pp. 205-210, 1989.

[4] J. A. Ball, J. W. Helton and M. Verma, "A factorization principle for stabilization of linear control systems," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 1, pp. 229-294, 1991.

[5] Y. Genin, V. Dooran, and T. Kailath, "On I-lossless transfer functions and related questions," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 50, pp. 251-275, 1983.

[6] M. Green, "H^∞ Controller synthesis by J-lossless coprime factorization," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 30, pp. 522-547, May 1992.

[7] H. Kimura, "(J, J')-lossless factorization based on conjugation," *Systems & Control Letters*, vol. 19, pp. 95-109, 1992.

[8] T. Pappas, A. J. Laub, and N. R. Sandell, Jr., "On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equation," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 25, no. 4, pp. 631-641, Aug. 1980.

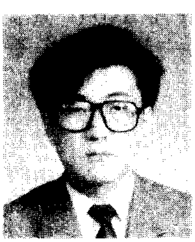
[9] C. Chu, J. Doyle, and B. Lee, "The general distance problem in H^∞ optimal control theory," *Int. J. Control*, vol. 44, no. 2, pp. 565-596, 1986.

[10] B. A. Francis, *A Course in H Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1987

[11] P. A. Iglesias and K. Glover, "State-space approach to discrete-time H^∞ control," *Int. J. Control*, vol. 54, no. 5, pp. 1031-1073, 1991.

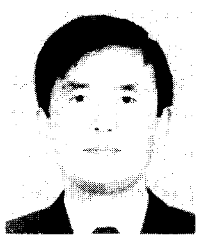
[12] K. Z. Liu and T. Mita, "Conjugation and H^∞ control of discrete-time systems," *Int. J. Control*, vol. 50, no. 4, pp. 1435-1460, 1989.

著 者 紹 介



丁 銀 泰(正會員)

1966年 1月 12日生. 1991年 2月 경북대학교 전자공학과 졸업. 1993年 2月 경북대학교 대학원 전자공학과 석사학위 취득. 현재 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정. 주관심 분야는 견실제어, 시간지연, 유도항법제어, 대규모 시스템 등임.



李 載 命(正會員)

1954年 12月 15日生. 1978年 2月 인하대학교 전자공학과 졸업. 1990年 2月 경북대학교 산업대학원 전자공학과 석사학위 취득. 1991年 3月 ~ 현재 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정. 1978年 3月 1日 ~ 현재 국방과학연구소 재직. 주관심 분야는 견실제어, 유도항법제어 등임.

朴 烘 培(正會員) 第 29卷 B編 第 3號 參照

현재 경북대학교 전자공학과 조교수