論文94-31B-5-3

더해지는 기준신호를 이용한 위상복원: I. 이론

(Phase Retrieval Using an Additive Reference Signal: I. Theory)

金 禹 植

(Woo Shik Kim)

要 約

위상 복원은 어떤 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 원하는 신호를 구하는 문제로서, 천문학, 광학, X-선 결정학, 신호처리 등에서 일어난다. 이런 분야에서는 원하는 신호의 푸리에 변환의 크기만을 측정할 수 있고, 따라서 푸리에 변환의 위상은 잃어버리게 된다. 신호의 중요한 구조적 정보는 푸리에 위상에 포함되어 있기 때문에, 원하는 신호를 정확히 구하려면, 신호의 푸리에 위상을 구해야 한다. 이 논문에서는 이 푸리에 위상의 복원에 관하여 다룬다. 이 논문에서는, 구하고자 하는 신호에 어떤 기준이 되는 신호를 더하여 푸리에 변환의 크기를 구하면, 여기에는 원하는 신호의 푸리에 위상에 대한 정보가 들어있다는 사실을 보이고, 이를 이용한다. I부에서는 첫째, 원하는 신호의 푸리에 변환의 크기와, 둘째, 어떤 알고있는 기준신호와 세째, 이 신호에 알고 있는 기준신호가 더해진 신호의 푸리에 크기의 3가지 정보가 주어졌을 때, 이들 정보로 부터, 원하는 신호가 유일하게 결정이 되는가 하는 유일성(uniqueness)에 대하여 알아보고, II부에서는 주어진 정보로부터 원하는 신호를, iterative 알고리즘과 non-iterative 알고리즘의 두가지 방법으로, 구하는 문제를 다룬다.

Abstract

Phase retrieval is concerned with the reconstruction of a signal from its Fourier transform magnitude (or intensity), which arises in many areas such as X-ray crystallography, optics, astronomy, or digital signal processing. In such areas, the Fourier transform phase of the desired signal is lost while measuring Fourier transform magnitude (F.T.M.). However, if a reference' signal is added to the desired signal, then, in the Fourier trans form magnitude of the added signal, the Fourier transform phase of the desired signal is encoded. This paper addresses uniqueness and retrieval of the encoded Fourier phase of a multidimensional signal from the Fourier transform magnitude of the added signal along with the Fourier transform magnitude of the desired signal and the information of the additive reference signal. In Part I, several conditions under which the desired signal can be uniquely specified from the two Fourier transform magnitudes and the additive reference signal are presented. In Part II, the development of non-iterative algorithms and an iterative algorithm that may be used to reconstruct the desired signal(s) is considered.

* 正會員, 韓國通信 시스템 開發센터

(Korea Telecom Systems Development Center)

接受日字 : 1993年 7月 5日

I. 서론

일반적으로, 어떤 신호의 푸리에 변환은 복소수 함수로서, 극좌표로 나타내면 크기 (Magnitude)와 위상(Phase)의 두 부분으로 나타낼 수 있다. 일반적으로 푸리에 크기와 위상은 서로 독립적인 함수로서, 어떤 한가지로부터 다른것을 구하는 것은 어렵다고 알려져 왔었다. 그 뒤, X-선 결정학, 신호처리 등, 여러 분야에서 여러가지 실험을 한 결과, 푸리에 위상은 신호의 중요한 구조적 정보를 갖고 있어서, 정확한 위상이 있으면, 푸리에 크기를 정확히 알고 있지 않아도, 원신호를 정확히 구할 수 있다는 것이 알려지게 되었다.[1,2] 특히, 원하는 신호가 유한한 영역을 갖으면, 푸리에 변환의 위상으로부터, 원하는 신호를 상수배의 모호성만 제외하고는 유일하게 구할 수 있다는 것도 알려졌다.[3] 하지만, 이러한 성질을 푸리에 크기는 갖고 있지 않다. 대부분의 경우에 있어서 푸리에 크기만을 갖고 복원한 신호는 원신호의 아무런 성질을 갖고 있지 않다. 실제로, 푸리에 변환의 크기가 주어졌을 때, 여기에 서로 다른 위상을 결합하면,같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 수 많은 신호를 구할 수 있다. 따라서, 일반적으로 다른 부가적인 정보가 없이는 위상정보를 구하는 것은 매우 어렵다.

푸리에 변환의 크기만으로 원하는 신호를 유일하게 구하기는 어렵지만, 이러한 문제가 일어나는 분야는 많이 있다. 예를 들어, 천문학에서는 대기의 불안정 때문에 실제의 망원경으로부터 얻어진 화상 신호는 매우 열화된다. 즉, 망원경의 실제 해상도는 이론 값보다 많이 낮아진다. 얻어진 저해상도의 화상으로부터 고해상도의 화상을 얻는 문제는, 여러 종류의 간섭계를 사용하여, 원하는 신호의 자기상관 함수를 정확히 구할 수 있다는 관점에서 일부 해결이 되었다. 하지만, 자기상관 함수로부터 원하는 신호를 구해야 한다는 문제가 아직 남아있다. 어떤 신호의 자기상관 함수와 그 신호의 푸리에 크기의 제곱사이에는 푸리에 변환의 관계가 있기 때문에, 측정된 저해상도의 화상으로부터 원하는 고해상도의 화상을 얻는 문제는 바로 위상복원 문제가 된다.[4] X-선 결정학에서는 결정의 전자 밀도와 그의 X-선 회절패턴 사이에는 푸리에 변환의 관계가 있다.[1] 따라서, X-선 회절 패턴의 모든 정보를 알면, 그로부터 알고자하는 결정의 전자 밀도를 정확히 구할 수 있고, 이로부터 원하는 결정의 구조를 알아낼 수 있다. 하지만, 사진판(photographic plate)과 같은, X-선 회절패턴을 측정하는 장치들은 신호의 크기만을 측정할 수 있기 때문에, 위상정보는 잃어 버리게 된다. 회절패턴의 위상에는 중요한 구조 정보가 있기 때문에, 원하는 결정의 구조를 정확히 구하려면, 위상정보는 복원이 되어야 한다. 이 밖에도, 위상복원 문제는 시간 또는 공간 coherence theory [5],전자현미경학[6,7], 신호처리[8] 등에서 일어난다.

푸리에 변환의 크기만으로는 위상을 구하기는 어렵기 때문에, 많은 사람들이 이 위상복원 문제를 풀기 위하여 여러가지 방법을 제시하였다. 한 예로, 원하는 신호가 일차원 신호로서 최소 위상 신호이면, 힐버트 변환을 이용하여 원하는 신호를 푸리에 변환의 크기로부터 구할 수 있다.[9] Van Hove 등은 푸리에 변환의 크기에 한 비트의 부호 정보가 주어지면 원하는 신호를 구할 수 있다는 것을 보였다.[10] Hayes 등은 2차원 신호의 경우에는 그 신호의 푸리에 변환의 크기에 경계 조건이 주어지면 원하는 신호를 다변수의 선형방정식을 풀어서 구할 수 있다는 것을 보였다.[11] Off-axis holography 방법은 한 점 신호를 원하는 신호의 영역으로부터 충분히 멀리 떨어진 곳에 더한 뒤 푸리에 변환의 크기를 구하면, 이 신호의 푸리에 변환의 크기만으로 원하는 신호를 구할 수 있는 방법이다.[12,13] Fiddy 등은 어떤 점함수가 2차원 신호의 영역의 근처에 어떤 조건을 만족하면서 더해지면, 더해진 신호는 Eisenstein Criteria를 만족하게 되어, 이 신호의 Z-변환은 그 자체가 하나의 인수로 되어 있으며, 따라서 푸리에 변환의 크기로 부터 유일하게 결정이 된다는 것을 보였다.[14] Fienup은 숨겨진 기준신호를 이용하여 위상복원문제를 푸는 것을[15], Gonsalves는 두 푸리에 변환의 크기의 미분을 이용한 위상복원을[16], Misell과 Boucher는 2장의 포커스가 되지않은 화상 신호의 푸리에 변환의 크기로부터의 위상복원에 관하여 연구했다.[17,18] Wood 등은 지수함수의 성질을 갖는 윈도우를 일차원 신호에 씌여준 신호의 영점은 원래 신호의 영점과 특별한 관계를 갖는 성질을 알아냈으며[19], Nakajima는 이 문제에서 신호를 수학적으로 구하는 문제를 연구하여 2개의 알고리즘을 개발하였다.[20,21] Nawab 등은 짧은 시간 신호의 푸리에 변환을 이용하여, 큰 영역을 갖는 신호의 위상복원에 대하여 연구하였다.[22]

이 논문에서는 구하고자 하는 m-차원 함수를 $x(n)$라 하고 (여기서 m은 1을 포함한 양의 정수) $y(n)$을 $x(n)$에 어떤 알고 있는 신호 $h(n)$을 더하여 구한 식

$$y(n) = x(n) + h(n)$$

이라고 할 때, $x(n)$과 $y(n)$의 푸리에 크기 및 $h(n)$의 정보로부터 $x(n)$을 구하는 문제를 다룬다. $x(n)$과 $y(n)$ 신호의 각각의 푸리에 위상은 푸리에 크기를 측정하는 동안 잃어버리지만, $y(n)$의 푸리에 변환의 크기의 제곱에는 $x(n)$의 위상이 코드화 되어있다. 이를 수학적으로 보면,

$$|Y(e^{jw})|^2 = |X(e^{jw})|^2 + |H(e^{jw})|^2 + 2|X(e^{jw})| \\ |H(e^{jw})|\cos\{\phi_x(w) - \phi_h(w)\}$$

여기서 $\phi_x(\omega)$와 $\phi_h(\omega)$ 각각 $x(n)$과 $h(n)$의 푸리에 위상이다. I부에서는 $x(n)$이 주어진 조건으로부터 유일하게 결정이 되기 위한 조건을 구하고, II부에서는 주어진 조건으로부터 원하는 신호를 구해내는 방법에 대하여 알아본다.

이 연구를 직접적으로 응용할 수 있는 분야로는 천문학과 X-선 결정학 등이 있다. 먼저, 천문학에서는 인공별을 만들 수 있음으로서 [23], 고해상도의 천체 망원경을 만들 수 있다. X-선 결정학에서는 Isomorphic Addition Technique, Isomorphic Replacement Technique, Multiple Anomalous Dispersion Technique과 같은 기존의 방법의 수치해석화에 응용할 수 있다. [24,25]

Ⅱ. 수학적 기초

이 논문에서 다루어질 신호는 이산 신호이다. m-차원의 이산신호는 m개의 정수 변수를 가진 신호로서 다음과 같이 나타내어 진다.

$$x(n) = x(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_m)$$

이 신호의 Z-변환은 다음과 같이 정의된다.

$$Z\{x(n)\} = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\cdots \\ \sum_{k_m} x(k_1, k_2, \cdots k_m) z^{-k_1} z^{-k_2} \cdots z^{-k_m} = X(z)$$

이 논문에서 다루어지는 모든 신호의 Z-변환은 수렴영역이 반지름 1인 polydisk, 즉, $|z_k|=1$ (k=1,2,$\cdots$,m)를 포함하는 유리함수라고 가정한다. 이 경우에는 푸리에 변환이 존재하며, 다음의 식으로 나타내어진다.

$$F\{x(n)\} = X(z)|_{z=e^{jw}} = \sum x(n) e^{-jwn}$$

실수값을 갖는 m-차원 신호의 자기상관함수는 다음의 식

$$r_x(k) = \sum_n x(n) x(n+k)$$

으로 정의되며, 이 자기상관함수의 Z-변환은

$$Z\{r_x(k)\} = X(z) X(z^{-1})$$

으로 주어진다. 어떤 신호의 자기상관함수의 푸리에 크기의 제곱과 자기상관함수 사이에는 푸리에 변환의 관계가 있으므로, 둘 사이에는 정확히 같은 량의 정보를 갖고 있다.

Ⅲ. 유일성

이 장에서는 다차원 함수 $x(n)$이 두 신호 (신호 $x(n)$과 $y(n) = x(n) + h(n)$, 여기서 $h(n)$은 알고 있는 신호이다.)의 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 결정이 되기 위한 조건에 대하여 알아본다.

먼저, 신호 $x(n)$과 그의 푸리에 크기 $|X(e^{jw})|$가 주어졌다고 가정하면, 이 신호와 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호는 무한히 많이 존재한다. 하지만, 이들 신호에 $h(n)$을 더했을 때, $y(n)$과 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호는 그리 많지 않다.

다음 정리는 이 두 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호는 원신호를 포함하여 2개밖에 존재하지 않는다는 것을 보여준다.

정리 1. $x(n)$과 $\tilde{x}(n)$은 m-차원 실수 신호이며, $y(n)$과 $\tilde{y}(n)$은 다음과 같이 $x(n)$과 $\tilde{x}(n)$으로 부터 알고 있는 신호 $h(n)$을 각각 더해서 얻어진 신호

$$y(n) = x(n) + h(n) \\ \tilde{y}(n) = \tilde{x}(n) + h(n)$$

라고 한다. 그러면, $|X(e^{jw})| = |\tilde{X}(e^{jw})|$과 $|Y(e^{jw})| = |\tilde{Y}(e^{jw})|$이 만족하기 위한 필요 충분조건은 $\tilde{x}(n) = x(n)$ 또는 $\tilde{x}(n) = x(-n) * h_{ap}(n)$ 이며, 여기서 $h_{ap}(n)$의 Z-변환은 $H_{ap}(z) = H(z)/H(z^{-1})$로서 주어진다.

증명: $x(n)$, $\tilde{x}(n)$, $y(n)$과 $\tilde{y}(n)$이 정리에서 주어진 조건을 만족한다고 가정하여, 다음의 식

$$|X(e^{jw})| = |\tilde{X}(e^{jw})| \\ |Y(e^{jw})| = |\tilde{Y}(e^{jw})|$$

이 성립한다고 가정한다. 이 식들을 등가적으로 Z-변환의 식으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$X(z)X(z^{-1}) = \tilde{X}(z)\tilde{X}(z^{-1}) \quad (1)$$

$$\left[X(z)+H(z)\right]\left[X(z^{-1})+H(z^{-1})\right] \quad (2)$$
$$=\left[\tilde{X}(z)+H(z)\right]\left[\tilde{X}(z^{-1})+H(z^{-1})\right]$$

(2)의 식을 전개하여 정리하면,

$$\left[X(z)-\tilde{X}(z)\right]H(z^{-1}) = \left[\tilde{X}(z^{-1})-X(z^{-1})\right]H(z). \quad (3)$$

$k(z)$를 $X(z)$과 $X(z^{-1})$사이의 비(ratio)라고 정의하면, $k(z)$는 (1)에서,

$$k(z) = X(z)/\tilde{X}(z) = \tilde{X}(z^{-1})/X(z^{-1})$$

로 나타내어진다. 이 식을 이용하면 (3)식을 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$[k(z)-1]\left[\tilde{X}(z)H(z^{-1})-X(z^{-1})H(z)\right]=0.$$

이 방정식을 풀면, $k(z)=1$ 또는 $\tilde{X}(z)=X(z^{-1})H(z)/H(z^{-1})$의 조건을 구할 수 있다. 여기서, $H_{ap}(z)=H(z)/H(z^{-1})$이라고 가정하면, $\tilde{x}(n)=x(n)$ 또는 $\tilde{x}(n)=x(-n)*h_{ap}(n)$ 이 된다.

역으로, 먼저, $\tilde{x}(n)=x(-n)*h_{ap}(n)$ 의 경우를 보면, $h_{ap}(n)$은 all-pass신호이므로 $|X(e^{jw})|=|\tilde{X}(e^{jw})|$이 성립한다. 또한,

$$\left|\tilde{X}(z)H(z)\right| = \left|\frac{X(z^{-1})H(z)}{H(z^{-1})}+H(z)\right| = |X(z)H(z)|.$$

$\tilde{x}(n)=x(n)$ 의 경우에도, 위의 식이 성립하는 것은 명백하다. Q.E.D.

모든 신호는 linear phase부분과 non-linear phase부분의 두 부분으로 나타낼 수있다. $H(z)$를 임의의 신호라고 하면,

$$H(z) = A(z)H_{lp}(z)$$

로 나타내어지고, 여기서, $H_{lp}(z)$는 $H(z)$의 linear phase 부분을 나타내고, $A(z)$는 non-linear phase 부분을 나타낸다. $H_{lp}(z)$는 linear phase 부분의 성질에 따라

$$H_{lp}(z) = \pm z^{-2n_0}H_{lp}(z^{-1})$$

으로 나타낼 수 있으며, 여기서 $H_{lp}(z)$가 even symmetry를 갖으면,양(+)의 부호를 갖으며, odd symmetry를 갖으면, 음(-)의 부호를 갖게된다. 여기서, n_0는 정수 벡터이다. 이를 이용하면 $H_{ap}(z)$는 다음의 식

$$H_{ap}(z) = H(z)/H(z^{-1}) = \pm z^{-2n_0}A(z)/A(z^{-1})$$

으로 더욱 간결히 나타낼 수 있다.

정리 1은 주어진 푸리에 변환의 크기 $|X(e^{jw})|$를 갖는 신호중에서 알고 있는 기준신호 $h(n)$을 더했을 때, $|Y(e^{jw})|$와 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호는 많아야 2개 존재한다는 것을 의미한다. 이 두개의 해 중에서, 원하는 신호 $x(n)$의 정보를 일부 알고 있으면, 위식의 2개의 해 중에서 원하는 신호 $x(n)$만을 구해낼 수 있다.

정리 2. $x(n)$을 유한한 영역을 가진 m-차원의 신호로서 linear phase 성분을 포함하지 않고, $y(n)$은 $x(n)$에 non-symmetric한 유한한 영역을 가진 신호 $h(n)$을 더하여 얻어진 신호라고 가정한다. 즉,

$$y(n) = x(n) + h(n).$$

$h(n)$의 Z-변환은 다음과 같이

$$H(z) = A(z)H_{lp}(z)$$

로서 인수분해 된다고 한다. 여기서, $H_{lp}(z)$는 $H(z)$의 linear phase 부분으로서 $H_{lp}(z) = \pm z^{-2n0}H_{lp}(z^{-1})$라고 하고, $A(z)$는 아무런 linear phase 성분을 포함하지 않는다고 가정한다. 여기서, $X(z)$가 $A(z)$를 인수로 갖지 않으면, $x(n)$은 $h(n)$, $|X(e^{jw})|$, $|Y(e^{jw})|$로부터 유일하게 결정된다.

증명: 먼저, $x(n)$과 $\tilde{x}(n)$을 정리1과 같이 정의되었다고 가정하면, 정리1의 결과로부터, $\tilde{X}(z) = X(z)$ 또는

$$\tilde{X}(z) = \pm z^{-2n_0}X(z^{-1})A(z)/A(z^{-1}) \quad (4)$$

이 된다. $\tilde{X}(z)$가 해가 되기 위해서는 유한한 영역을 갖는 신호의 Z-변환이 되어야 하므로, (4)가 해가 되기 위해서는 $X(z^{-1})A(z)/A(z^{-1})$는 z의 다항식이 되어야 한다. 여기에, $A(z)$는 linear phase 부분을 포함하지 않으므로, $A(z^{-1})$은 $X(z^{-1})$를 나눌 수 있어야 하고, 따라서, $A(z)$는 $X(z)$를 나눌 수 있어야 한다. 하지만, 이것은 가정에 맞지 않으므로, $\tilde{x}(n)=x(-n)*h_{ap}(n)$은 해가 될 수 없으며, 따라서, $\tilde{x}(n)=x(n)$이어야 한다.

역의 증명은, $X(z)$가 $A(z)$를 인수로 갖을 때는, $X(z)$가 주어진 조건으로부터 유일하게 결정되지 않는다는 것을 보여주면 충분하다. 이를 증명하기 위하여 $H(z)=A(z)H_{lp}(z)$ (여기서, $H_{lp}(z) = \pm z^{-2n_0} H_{lp}(z^{-1})$)이고, $X(z)$는

$$X(z) = A(z)X_0(z)$$

로 나타내어져서, $A(z)$를 인수로 갖는다고 가정한다. 그러면, $\tilde{X}(z) = \pm z^{-2n_0}A(z)A_0(z^{-1})$ 는, 명백히, $X(z)$와 다르며, 동시에 $X(z)$와 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는다. 또한,

$$Y(z) = X(z) + H(z) = A(z)\left[X_0(z) + H_{lp}(z)\right]$$

이고,

$$\tilde{Y}(z) = \tilde{X}(z) + H(z) = \pm z^{-2n_0}A(z)\left[X_0(z^{-1}) + H_{lp}(z^{-1})\right]$$

이므로, Y(z)와 $\tilde{Y}(z)$ 또한 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는다. 따라서, 만일 $A(z)$가 $X(z)$를 나누면, 주어진 조건을 만족하는, 서로 다른 신호 $x(n)$은 최소한 2개 이상 존재한다. Q.E.D.

원하는 신호 $x(n)$이 유한한 영역을 갖는 신호이고, $|X(e^{jw})|$와 $|Y(e^{jw})|$, 및 $h(n)$이 주어졌다고 가정했을 때, 원하는 신호 $x(n)$이 주어진 조건으로부터 유일하게 결정이 되는가를 결정하기 위해서는 $X(z)$가 $A(z)$라는 인수를 갖는 가를 보면된다. 하지만, $X(z)$가 직접적으로 주어지지 않기 때문에 $|X(e^{jw})|$와 $|Y(e^{jw})|$로부터 결정해야 하며, 다음과 같은 방법으로 결정할 수 있다. 먼저, $X(z)X(z^{-1})$가 $A(z)$를 인수로 갖고 있지 않으면, $X(z)$도 $A(z)$를 인수로 갖지 않으며, 따라서, $x(n)$는 주어진 조건으로 부터 유일하게 결정된다. 만일, $X(z)X(z^{-1})$가 $A(z)$를 인수로 갖으면, $X(z)$가 $A(z)$를 인수로 갖던가, 또는, $X(z^{-1})$가 $A(z)$을 인수로 갖던가 하는 모호성(ambiguity)이 생기게 된다. 이 모호성은 $Y(z)Y(z^{-1})$가 $A(z)$를 인수로 갖는 가를 봄으로서 제거할 수 있다. $Y(z)Y(z^{-1})$은

$$Y(z)Y(z^{-1}) = X(z)X(z^{-1}) + X(z^{-1})H(z) + H(z)H(z^{-1}) + X(z)H(z^{-1})$$

으로 나타내지고, 이 식의 처음 세 항은 $A(z)$를 인수로 갖고 있다. 따라서, $Y(z)Y(z^{-1})$가 $A(z)$를 인수로 갖는 가는 위 식의 마지막 항에 따라 결정된다. 이를 좀더 자세히 보면, $Y(z)Y(z^{-1})$가 $A(z)$를 인수로 갖지 않으면, $X(z)$도 $A(z)$를 인수로 갖지 않게 되고, 따라서, $x(n)$은 주어진 조건으로부터 유일하게 결정된다. 마지막으로, $Y(z)Y(z^{-1})$가 $A(z)$를 인수로 갖으면, $X(z)$도 $A(z)$를 인수로 갖으며, 이 때, $x(n)$은 유일하게 결정이 되지 않는다.

$H(z)$가 $A(z)H_{lp}(z)$로 인수분해되고, $X(z)$도 $A(z)$를 인수로 가져

$$X(z) = A(z)X_o(z)$$

로서 인수분해가 되면, 정리1과 정리2의 결과에 의하여, 모두 2개의 해가 존재하며, 이들은 $X(z) = A(z)X_o(z)$과 $X(z) = \pm z^{2n_0} A(z) X_o(z^{-1})$이 된다. 이 두개의 해를 갖는 모호성은 원하는 신호 $x(n)$의 영역이 결정이 되면 제거될 수 있다. 먼저 $R_m[N]$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$R_m[N] = [0, N_1-1]\times[0, N_2-1]\times\cdots\times[0, N_m-1].$$

정리 3. $x(n)$이 유한한 신호 영역을 갖는 실수 신호이고, $y(n)$은 $x(n)$으로부터 유한한 신호영역을 갖는 신호 $h(n)$을 더하여 얻어진 신호라고 가정한다. 여기서, 신호 $h(n)$은 알고 있는 신호로서 그의 Z-변환은 linear phase성분 $H_{lp}(z)$와 non-linear phase 성분 $A(z)$의 곱, 즉, $H(z) = A(z) H_{lp}(z)$로 쓸 수 있고, 이때, $H_{lp}(z) = \pm z^{2n_0} H_{lp}(z^{-1})$로 나타낼 수 있다. 여기에, $X(z)$ 또한 $A(z)$란 인수를 가져,

$$X(z) = A(z)X_o(z)$$

로 인수분해되고, 이때 $A(z)$와 $X_o(z)$는 각각 $(J-1)$과 $(K-1)$차 z^{-1}의 다항식으로, 이들의 역 Z-변환인 $a(n)$과 $x_o(n)$이 각각 $R_m[J]$ 과 $R_m[K]$ 의 신호영역을 갖는다고 가정한다. 이때, $2n_0 \neq K-1$이면, $x(n)$은 2개의 푸리에 크기 $|X(e^{jw})|$과 $|Y(e^{jw})|$로부터 유일하게 결정된다.

증명: $\tilde{x}(n)$과 $\tilde{y}(n)$을 정리 1과 정리2의 증명에서와 같이 정의되어 있다고 가정한다. 정리1의 결과와 정리3의 가정에 의하여, 주어진 조건을 만족하는 신호는 $\tilde{X}(z) = X(z) = A(z)X_o(z)$와 $\tilde{X}(z) = \pm z^{-2n_0}A(z)X_o(z^{-1})$ 정리3의 조건으로부터 원하는 신호 $x(n)$은 $R_m[J] \times R_m[K]$ 의 고정된 신호 영역을 갖는다. 따라서, 두 신호가 모두 같은 신호영역을 갖으면, 두 신호 모두 해가 될 수 있으며, 그렇지 않으면 원하는 신호는 유일하게 결정된다. 이 조건이 성립하기 위해서는, $X_o(z)$와 $\pm z^{2n_0} X_o(z^{-1})$는 같은 신호영역을 갖으면 안되므로, 이를 수식으로 나타내면, $n_0 \neq (K-1)/2$의 조건

을 구할 수 있다. Q.E.D.

정리3은 원하는 신호 $X(z)$가 $h(n)$의 non-linear phase 부분인 $A(z)$를 인수로 갖을 경우, $h(n)$의 linear phase 부분의 대칭중심과 $X(z)/A(z)$의 중심이 같지 않으면, 원하는 신호는 주어진 조건으로부터 유일하게 결정이 된다는 것을 의미한다. 또한, 이 조건은 원하는 신호 $x(n)$의 중심과 기준신호 $h(n)$의 중심이 서로 일치하지 않는다는 것과 같다. 이 결과는 더해지는 기준신호가 non-linear phase성분을 포함하지 않으면, 다시 말해 기준신호가 linear phase 신호로서

$$h(n) = \pm h(2n_0 - n)$$

의 성질을 갖으면, 위의 결과는 더욱 간결히 나타내어질 수 있다. 원하는 신호 $x(n)$이 최소의 0의 값을 갖지않는 영역을 R_m $[N]$ 이라고 하면, 즉,

$$x(n) = 0 \text{ 만일 } \quad n \notin R_m[N].$$

$h(n)$이 linear phase 신호이므로, 정리 3으로부터 $A(z) = 1$이고 $K = N$이 된다. 정리 1의 결과로부터 원하는 신호 $x(n)$외에 $\pm x(2n_0-n)$도 해가 될 수 있다. 하지만, n_0가 $(N-1)/2$과 같지 않으면, $\pm x(2n_0-n)$은 원하는 신호가 만족해야 하는 신호영역을 갖지않게 되고, 따라서, 원하는 신호 $x(n)$은 유일하게 결정된다.

정리2와 정리3은 모든 주파수 값에 대하여 푸리에 크기의 값이 주어졌을 때에 대하여 고려하였다. 하지만, 이 결과는, $x(n)$이 유한한 영역을 갖는 신호일 때, 전 주파수가 아닌, 주파수의 sample값에 대하여 푸리에 크기가 주어졌을 때에도 성립한다. 다시 말하여, $x(n)$은 충분한 수의 $|X(e^{jw})|$와 $|Y(e^{jw})|$의 sample 값으로도 유일하게 결정될 수 있다. 좀더 자세하게 보면, $x(n)$이 최소의 신호영역으로, 위의 식과 같이, R_m $[N]$ 을 갖는다고 가정하고, 각 i번째 변수 n_i의 주파수 영역 w_i에서, 최소한 $2N_i$개의 푸리에 크기의 값이 주어진다고 가정한다. 그러면, 이들로부터 원하는 신호의 자기상관함수를 유일하게 결정할 수 있고, 따라서, 모든 주파수 w에 대하여 푸리에 크기를 결정할 수 있다.[3] 이상을 정리하면, $h(n)$과 $2N$ 또는 그 이상의 $|X(e^{jw})|$와 $|Y(e^{jw})|$의 샘플이 주어지고, 정리2와 정리3의 유일성 조건을 만족하면, $x(n)$은 유일하게 결정된다.

Ⅳ. 결 론

이 논문에서는 원하는 다차원 신호를 그 신호의 푸리에 크기와 원하는 신호에 알고 있는 기준 신호를 더하여 얻어진 신호의 푸리에 크기를 이용하여 구하는 문제를 다루었다.

이 문제의 유일성을 보면, 첫째로, 원하는 신호에 대한 아무런 제한조건이 주어지지 않았을 때, 주어진 조건을 만족하는 신호는 최대 2개 존재한다. 여기에, 원하는 신호가 유한한 영역을 갖는 신호이고, 더해지는 기준신호를 linear phase 부분과 non-linear phase 부분으로 나누었을 때, 원하는 신호가 non-linear phase 성분을 포함하지 않으면, 주어진 조건으로부터 원하는 신호는 유일하게 결정이 된다. 또한, 원하는 신호가 기준신호의 non-linear phase 성분을 포함하고 있더라도, 원하는 신호가 고정된 신호영역을 갖고, 그의 중심이 기준신호의 신호영역의 중심과 일치하지 않으면, 원하는 신호는 유일하게 결정될 수 있다. II부에서는 이런 조건이 주어졌을 때, 원하는 신호를 구하는 알고리즘을 개발하는 문제를 다룬다.

參考文獻

[1] G. N. Ramachandran and R. Srinivasan, Fourier methods incrystal-lography", Wiley-Interscience, 1970.

[2] A. V. Oppenheim and J. S. Lim, The importance of Phase in Signals", Proceedings of the IEEE, 1981, Vol. 69, pp 529—541, May.

[3] M. H. Hayes, "The reconstruction of a multidimensional sequences from the phase or magnitude of its Fourier transform", *IEEET ransactions on Acoustics, Speech, and Signal Process,* 1982, ASSP-39, pp 140—154, April, No.2.

[4] C. Y. C. Liu and A. W. Lohmann, "High Resolution Image Formation Through the Turbulent Atmosphere", Optics Communication, 1973, Vol. 8, No. 4, pp 372—377.

[5] L. Mandel and E. Wolf, "Coherence Properties of Optical Fields", Reviews of Modern Physics, 1965, Vol. 37, No. 2, pp 231—287, April.

[6] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, "Phase Determination from Image and Diffraction plane Pictures in the

Electron Microscope", OPTIK, 1971, Vol. 34, No. 3, pp 275—284.

[7] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, "A Practical Algorithm for the Determi-nation of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures", OPTIK, 1972, Vol. 35, No. 2, pp 237—246,

[8] N. K. Bose, "Problems and Progress in Multidimensional System Theory", Proceedings of the IEEE, 1977, Vol. 65, pp 824—840, June.

[9] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, "Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[10] P. L. Van Hove, M. H. Hayes, J. S. Lim, and A. V. Oppenheim, "Signal Reconstruction from Signed Fourier Transform Magnitude", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1983, ASSP-31, No.5, pp 1286—1293, October.

[11] M. H. Hayes and T. F. Quatieri, "Recursive phase retrieval using boundary conditions", J. Opt. Soc. Am., 1983, Vol.73, No.11, pp 1427—1433, November.

[12] C. L. Mehta, "New Approach to the Phase Problem in Optical Coherence Theory", Journal of Optical Society of America, 1968, Vol. 58, pp 1233—1234.

[13] L. S. Taylor, "The Phase Retrieval Problem", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1981, AP-29, No. 2, pp 386—391, March.

[14] M. A. Fiddy, B. J. Brames, and J. C. Dainty, "Enforcing Irreducibility for Phase Retrieval in Two Dimensions", Optics Letters, 1983, Vol. 8, No. 2, pp 96—98, February.

[15] J. R. Fienup, "Reconstruction of objects having latent reference points", Journal of Optical Society of America, 1983, Vol. 73, No. 11, pp 1421—1426, November.

[16] R. A. Gonsalves, "Phase retrieval by differential intensity measurements", J. Opt. Soc. Am. A, 1987, Vol. 4, No. 1, pp 166—170, January.

[17] D. L. Misell, "An examination of an iterative method for the solution of the phase problem in optics and electron optics:I. Test calculations", J. Phys. D: Appl. Phys., 1973, Vol. 6, pp 2200—2216.

[18] R. H. Boucher, "Convergence of algorithms for phase retrieval from two intensity distributions", SPIE 1980 International Optical Computing Conference, 1980, Vol. 231, pp 130—141.

[19] J. W. Wood, M. A. Fiddy, and R. E. Burge, "Phase retrieval using two intensity measurements in the complex plane", Optical Letters, 1981, Vol. 6, No. 11, pp 514—516, November.

[20] N. Nakajima, "Phase retrieval from two intensity measurements using the Fourier series expansion", Journal of Optical Society of America A, 1987, Vol. 4, No. 1, pp 154—158, January

[21] N. Nakajima, "Phase Retrieval using the logarithmic Hilbert transform and the Fourier series expansion", Journal of Optical Society of America A, 1988, Vol. 5, No. 2, pp 257—262, February

[22] S. H. Nawab, T. F. Quatieri, and J. S. Lim, "Signal Reconstruction from Short-time Fourier Transform Magnitude", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1983, ASSP-31, No. 4, pp 986—998, August.

[23] G. P. Collins, "Making Stars To See Stars: DoD Adaptive Optics Work is Declassified", Physics Today, 1992, pp 17—21, February, Search & Discovery.

[24] W. Kim, "The phase retrieval using two Fourier transform intensities with application to X-ray crystallography", Thesis Dissertation, Georgia Institute of Technology, 1991

[25] 김 우 식, "Digital Signal Processing을 이용한 X-ray Crystallography에서의 Macro-

molecule의 구조 결정을 위한 새로운 제안", 한국분자생물학회, 분자생물학뉴스지, 분자생물학논단, Vol. 5, No. 3, 1993,pp 47-55.

著 者 紹 介

金 禹 植(正會員)

1961年 3月 8日生. 1984年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업(학사). 1986年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업(석사). 1991年 9月 미국 G.I.T. 전기공학과 졸업(박사). 1992年 9月 ~ 1993年 12月 서울대학교 의과대학부설 의공학연구소, 특별연구원. 1993年 12月 ~ 현재 한국통신 시스템 개발 센터, 선임연구원. 주관심 분야는 Digital Signal Processing 및 그의 응용 (X-ray Crystallography, 광학, 천문학), 의공학, 통신(VOD 및 ADSL), Computer Graphics, Spectrum Estimation 등임.