

# 직교 정수형 변환 (Orthogonal Integer Transform)

李宗河\*, 郭勳星\*\*

(Jong Ha Lee and Hoon Sung Kwak)

## 要約

본 논문에서는 일반성을 가지는 직교 정수형 변환을 제안하였다. 이 방법은 직교성과 KLT에 근접한 성능을 갖고 있는 DCT의 변환 행렬 요소 값들이 크기 순서대로 배열된 것을 이용하여 변환 행렬 요소 값들이 실수가 아닌 정수 값들만으로 배열 되도록 한 것이다. 이러한 정수 값들을 선정하는데 있어 Hilbert-Schmidt norm이 최소가 되는 값들을 취함으로써 KLT에 근접 하도록 하였다. 제안된 직교 정수형 변환의 성능 평가를 위해 오차특성, 변환의 효율성, 최대 감소 비트 특성을 DCT, CMT, ICT와 비교한 결과 N=8일때 직교 정수형 변환은 다른 변환에 비해 최적 변환인 KLT에 가장 근접한 성능을 갖는다.

## Abstract

In this paper, we propose orthogonal integer transform(OIT) with general form. Considering the orthogonality and magnitude value order of the DCT Matrix whose performance is found to be close to that of the KLT, known to be optimal. The proposed OIT matrix is composed of values minimizing Hilbert-Schmidt norm among integer values which satisfy the condition of orthogonality and the relative magnitudes of the DCT matrix. Comparing the OIT with the DCT, CMT, and ICT in error characteristics, transform efficiency, and maximum reducible bit, it is shown that the performance of the OIT compares more closely to that of the KLT relative to the performances of the DCT, CMT, and ICT when N=8.

## 1. 서론

디지털 영상 데이터의 감축을 위해서는 변환 방식

이 많이 사용되고 있다. 여러가지 변환 방식 중에서도 DCT는 상관성이 많은 영상 데이터에 적용하는 경우 최적 변환 방식인 KLT의 성능에 근접한 효과를 갖고 있다.<sup>[1] [2]</sup> 따라서 DCT의 고속 연산을 위한 여러 종류의 고속 알고리즘<sup>[3] [4] [5] [6]</sup>과 이의 하드웨어 구현을 위한 다양한 구조들이 제안되어 왔다. 그러나 DCT는 하드웨어 구현시 DCT 계수가 실수이기 때문에 유한 길이 연산(finite-length arithmetic)으로 인한 연산의 정확도가 떨어지게 되고, 부동 소숫점 연산으로 인한 하드웨어의 복잡성과 연산시간이 많이 걸리는 단점이 있다.<sup>[7]</sup>

\*正會員, 全州工業大學校 컴퓨터 工學科  
(Dept. of Electronics Jeonju Technical  
Junior College)

\*\*正會員, 全北大學校 컴퓨터 工學科  
(Dept. of Computer Eng. Chonbuk  
National Univ.)

接受日字 : 1993年 4月 18日

Jones 등은 DCT에 WHT를 적용한 변환 행렬을 도입하고 이 행렬의 블록 대각 구조(block diagonal structure)를 이용하여 N=8일때 DCT에 근사한 정수값을 갖는 CMT(C-matrix transform)를 제안하였으며<sup>16)</sup>, 그 후 Rao등은 CMT를 N=16<sup>17)</sup>으로 Kwak등은 N=32<sup>10)</sup>인 경우로 확장하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 정수형 연산을 수행하고 연산과정에서 나타나는 곱셈수와 덧셈수를 줄임으로써 연산속도는 개선되었으나 근사화된 정수값으로 인하여 좋은 성능을 갖지 못했다. 또 N가 변화할 때마다 독립적으로 정수값을 구하는 방법이므로 일반화된 식을 갖지 못하고 있다.

Cham은 N=8인 경우 dyadic symmetry의 원리를 사용하여 DCT 계수를 정수화하는 ICT(integer cosine transform)를 제안하였으며<sup>11)</sup>, 그 후 N=16인 경우에는 N=8과는 다르게 DCT의 직교성과 크기 관계를 조사하여 DCT 계수를 정수화하는 방법을 제시하였다.<sup>12)</sup> 이 방법은 CMT 보다는 우수하나 각각 독립적인 방법으로 정수값을 구했으므로 일반화된 식을 갖지 못했다. 또한 이 방법은 직교 조건과 크기 관계를 만족하는 여러개의 정수값들을 열거하였을 뿐 최적의 정수값을 찾는 방법은 제시하지 못하였다.

본 논문에서는 일반성을 가지는 직교 정수형 변환을 제안한다. 이 방법은 직교 변환인 DCT에 대하여 행렬 분해(matrix decomposition)를 하면 각 분해 행렬들도 직교 행렬(orthogonal matrix)이 된다. 이때 분해된 행렬의 첫번째 열 벡터(row vector)는 분해 행렬 요소의 크기 순서로 배열 된다. 이와 같은 DCT의 구조를 이용하여 변환 행렬 요소 값들이 실수가 아닌 정수값들로 구성 되도록 한것이다. 그러나 분해 행렬들의 직교성(orthogonality)과 분해 행렬 요소들의 크기 순서를 만족하는 정수값은 여러개 존재 할 수 있으므로 최적의 정수값을 선정하는데 있어 Hilbert-Schmidt norm<sup>13)</sup>이 최소가 되는 값들을 취함으로써 KLT에 근접 하도록 하였다.

제안한 직교 정수형 변환의 성능 평가를 위해 일반적으로 많이 사용하는 오차특성, 변환의 효율성, 최대 감소 비트를 DCT, CMT, ICT와 비교 하였으며, N=8일때 직교 정수형 변환이 최적 변환인 KLT에 가장 근접한 성능을 갖는 것을 보인다.

II. DCT(Discrete cosine transform)

이산 함수 f(j), j=0,1,...,N-1에 대한 DCT 및 역 DCT(inverse DCT)는 각각 다음 식(1), (2)와 같이 정의 된다.<sup>14)</sup>

$$F(k) = \frac{2c(k)}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cos \left[ \frac{(2j+1)kn}{2N} \right] \tag{1}$$

$$f(j) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) F(k) \cos \left[ \frac{(2j+1)kn}{2N} \right] \tag{2}$$

$$k, j = 0, 1, \dots, N-1$$

$$c(k) = 1\sqrt{2} \quad ; k = 0$$

$$= 1 \quad ; k = 1, 2, \dots, N-1$$

그리고 N×1 데이터 벡터 [f] 에 대한 DCT인 식(1)은 다음과 같이 행렬의 형태로 나타낼 수 있다.

$$[F] = [A_N][f] \tag{3}$$

$$[A_N] = \left[ c(k) \cos \frac{(2j+1)kn}{2N} \right]$$

$$j, k = 0, 1, \dots, N-1$$

Chen등은 [A<sub>N</sub>] 을 순환형(recursive form)으로 구하는 방법을 제시하였으며<sup>14)</sup>, [A<sub>N</sub>] 은 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$[A] = [P_N] \begin{bmatrix} A_{N/2} & 0 \\ 0 & R_{N/2} \end{bmatrix} [B_N]$$

$$= [P_N] \left[ \text{diag} \{ [A_{N/2}], [R_{N/2}] \} \right] [B_N] \tag{5}$$

$$[R_{N/2}] = \left[ C(k) \cos \frac{(2j+1)(2k+1)\pi}{2N} \right]$$

$$j, k = 0, 1, 2, \dots, (N/2) - 1$$

$$[B_N] = \begin{bmatrix} I_{N/2} & \bar{I}_{N/2} \\ \bar{I}_{N/2} & -I_{N/2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

여기서 [P<sub>N</sub>] 은 변환계수 벡터를 비트 역순(bit reverse order)에서 정순으로 바꾸어 주는 행렬이고, [B<sub>N</sub>] 은 [I<sub>N/2</sub>] 로 구성되는 단일행렬이다. 그리고 I<sub>N/2</sub>는 항등행렬이며  $\bar{I}_{N/2}$  은 반 대각 항등행렬이다

DCT 행렬 [A<sub>N</sub>] 은 N가 우수일때 식(5)와 같이 [A<sub>N/2</sub>] 의 열벡터는 우수벡터이고, [R<sub>N/2</sub>] 의 열벡터는 기수벡터 즉, 1/2은 우수벡터로 구성되고, 1/2은 기수벡터로 구성되는 우수-기수 변환이다.<sup>8)</sup> 이와 같은 성질을 이용하면 행렬 [A<sub>N</sub>] 은 식(8)과 같은 형태로 분해 된다.

$$[A_N] = [P_N] \left[ \text{diag} \left\{ \text{diag} \left\{ \dots \left\{ \text{diag} \left\{ \text{diag} \left\{ [A_{N/2^{n-1}}] \right\} [O_{N/2^{n-1}}] \right\} \right\} \right\} \right\} \right] [B_N]$$

$$\left[ B_{N/2^{n-2}} \right] \left[ O_{N/2^{n-2}} \right] \left[ B_{N/2^{n-1}} \right] \dots \left[ O_{N/4} \right] \left[ B_{N/2} \right] \left[ R_{N/2} \right] \left[ B_N \right]$$

$$[O_{N/2^{n-1}}] = \left[ c(k) \cos \frac{(2j+1)(2k+1)\pi}{2^{i+2}} \right] \quad (9)$$

$n = \log_2 N$   
 $i = 1, 2, \dots, N-2$   
 $j, k = 0, 1, 2, \dots, 2^{i-1}$

식(9)는 식(8)의 분해 행렬 즉,  $[O_{N/2^n}]$ ,  $[O_{N/2^{n-1}}]$ ,  $\dots$ ,  $[O_{N/4}]$  의 각 행렬 요소값을 나타내는 일반화 수식이다.

1. 직교성

DCT 행렬  $[A_N]$  은  $[A_N] [A_N]^T = [I_N]$  을 만족하는 정규 직교 행렬(orthonormal matrix)이며 식(8)과 같이  $[A_N]$  을 분해하여 행렬  $[O_{N/2^{n-1}}]$ ,  $[O_{N/2^{n-2}}]$ ,  $\dots$ ,  $[O_{N/4}]$ ,  $[R_{N/2}]$  로 나타내었을 때 이들 또한 직교 행렬이 된다. 그러므로 행렬  $[O_{N/2^{n-1}}]$ ,  $[O_{N/2^{n-2}}]$ ,  $\dots$ ,  $[O_{N/4}]$ ,  $[R_{N/2}]$  는 각각 식(10)~(11)과 같은 직교 조건을 만족한다.

$$\sum_{k=0}^{(N/2^{i-1})-1} \left[ \left[ \cos \frac{(2k+1)\pi}{2^{i+2}} \right] \left[ \cos \frac{(2j+1)(2k+1)\pi}{2^{i+2}} \right] \right]_{O_{N/2^i}} = 0 \quad (10)$$

$n = \log_2 N$   
 $i = 1, 2, \dots, N-2$   
 $j = 1 \quad ; i = 1$   
 $1, 2, \dots, 2^{i-1} - 1 \quad ; i \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{(N/2)-1} \left[ \left[ \cos \frac{(2k+1)\pi}{2N} \right] \left[ \cos \frac{(2j+1)(2k+1)\pi}{2N} \right] \right]_{R_{N/2}} = 0 \quad (11)$$

$j = 1, 2, \dots, (N/4) - 1$

식(10), (11)에서 첨자  $O_{N/2^{n-1}}$ ,  $R_{N/2}$ 는 분해 행렬을 의미한다.

2. 크기 순서

DCT 행렬  $[A_N]$  의 각 분해 행렬들은 서로 다른 값을 갖는 직교 행렬로 구성되며 각 분해 행렬 요소들은 그 분해 행렬 내에서는 중복된 값을 가지므로 이 성질을 이용하여 DCT 행렬의 크기 순서를 나타내면 각 분해 행렬에 대한 행렬 요소의 크기 순서는 식(12), (13)과 같은 관계를 갖는다.

$$\left[ \left[ \cos \frac{\pi}{2^{j+2}} \right] > \left[ \cos \frac{3\pi}{2^{j+2}} \right] > \dots > \left[ \cos \frac{(2j+1)\pi}{2^{j+2}} \right] \right]_{O_{N/2^i}} \quad (12)$$

$n = \log_2 N$   
 $i = 1, 2, \dots, N-2$   
 $j, k = 0, 1, 2, \dots, 2^{i-1}$

$$\left[ \left[ \cos \frac{\pi}{2N} \right] > \left[ \cos \frac{3\pi}{2N} \right] > \dots > \left[ \cos \frac{(2j+1)\pi}{2N} \right] \right]_{R_{N/2}} \quad (13)$$

$j, k = 0, 1, 2, \dots, (N/4) - 1$

III. 직교 정수형 변환의 구현 방법

$N \times 1$  데이터 벡터  $[f]$  에 대한 직교 정수형 변환(orthogonal integer transform: OIT)과 그 역변환을 각각 식(14), (15)와 같이 정의한다.

$$[F_i] = [K_N] [\Phi_N] [f] \quad (14)$$

$$[f] = [\Phi_N]^T [K_N] [F_i] \quad (15)$$

여기에서  $[\Phi_N]$  은 정수값을 가지며 DCT의 직교성과 크기 순서를 이용하여 구성된 직교 정수형 변환 행렬이고,  $[\Phi_N]^T$ 는 직교 정수형 변환 행렬  $[\Phi_N]$  의 전치행렬이다.  $[K_N]$  는 행렬  $[\Phi_N]$  의 열을 scale 하여 정규 직교 행렬이 되도록 하는 대각 행렬 즉,  $[K_N] = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$ 인 크기 인자이다.

직교 정수형 변환 행렬  $[\Phi_N]$  은 DCT의 직교성과 크기 순서를 이용하여 구성된 행렬이므로 식(8)을 이용하여 식(16)과 같이 쓸 수 있다.

$$[\Phi_N] = [P_N] [\bar{\Phi}_N] [B_N] = [P_N] \text{diag} \left\{ \text{diag} \left\{ \dots \left\{ \text{diag} \left[ \text{diag} \left\{ [D_{N/2^{n-1}}], [S_{N/2^{n-1}}] \right\} \right] \right\} \right\} \right\} \quad (16)$$

$$[B_{N/2^{n-2}}], [S_{N/2^{n-2}}], [B_{N/2^{n-3}}], \dots, [S_{N/4}], [B_{N/2}], [Q_{N/2}], [B_N]$$

단,  $n = 3, 4, \dots, \log_2 N$  이다.

식(16)의  $[\bar{\Phi}_N]$ 은  $[\Phi_N]$  을 비트 역순으로 재 배열한 행렬을 의미하며, 이 행렬을 분해하여 나타내면 식(17)~식(22)와 같다.

$$D_{N/2^{n-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$S_{N/2^{n-1}} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & -A_1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N/2^{n-1}$

$$S_{N/2^{n-2}} = [B_{ij}] = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ B_3 & -B_1 & B_4 & B_2 \\ B_2 & -B_4 & -B_1 & -B_3 \\ B_3 & -B_3 & B_2 & -B_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N/2^{n-2}$

$$S_{N/2^{n-3}} = [C_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, N/2^{n-3} \quad (20)$$

$$S_{N/4} = [E_{ij}] \quad i, j = 1, 2, \dots, N/4 \quad (21)$$

$$Q_{N/2} = [Q_{ij}] \quad i, j = 1, 2, \dots, N/2 \quad (22)$$

식(17)~식(22)의 각 분해 행렬들은 DCT의 분해 행렬에 각각 대응되는 행렬이며, 분해 행렬 요소들은 DCT의 분해 행렬 요소들의 크기 순서를 갖는 정수 값들로 구성된다.

그러므로 각 분해 행렬 요소들의 정수값을 구하는 방법은 먼저 분해 행렬  $D_{N/2^{n-1}}$ 의 행렬 요소는 이에 대응하는 DCT의 분해 행렬 요소들이 같은 값으로 구성되어 있으므로 정수값 중에서 고속 알고리즘 구현에 유리한 값 1을 택하여 구성하였다. 그리고 나머지 분해 행렬들에 대한 분해 행렬 요소들은 II장에서 유도한 DCT의 직교성과 크기 순서를 갖는 변수(variable)들로 구성하고 이에 대응하는 다음의 직교성과 크기 순서를 만족하는 정수값을 구한다.

1. 직교성

직교 정수형 변환 행렬  $[\Phi_N]$  이 DCT 행렬과 같은 직교성을 갖기 위해서는  $[\Phi_N] [\Phi_N]^T = [K_N]$  인 직교 행렬이어야 하며,  $[\Phi_N]$  의 분해 행렬들 또한 직교 행렬이어야 한다. 그리고 이 분해 행렬들은 DCT 분해 행렬의 직교 조건인 식(10), (11)에 대응하는 직교 조건을 가져야 한다. 그러므로  $[\Phi_N]$  의 분해 행렬들의 직교 조건은 식(23)~(26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{N/2^{n-2}} [B_{i1} B_{i2}]_{S_{N/2^{n-2}}} = 0 \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^{N/2^{n-1}} [C_{i1} C_{i2} = C_{i1} C_{i3} = \dots = C_{i1} C_{ij}]_{S_{N/2^{n-1}}} = 0 \quad (24)$$

단,  $j = 2, 3, \dots, N/2^{n-2}$

$$\sum_{i=1}^{N/4} [E_{i1} E_{i2} = E_{i1} E_{ij}]_{S_{N/4}} = 0 \quad (25)$$

단,  $j = 2, 3, \dots, N/8$

$$\sum_{i=1}^{N/2} [Q_{i1} Q_{i2} = Q_{i1} Q_{i3} = \dots = Q_{i1} Q_{ij}]_{Q_{N/2}} = 0 \quad (26)$$

단,  $j = 2, 3, \dots, N/4$

식(23)~(26)에서 첨자  $S_{N/2^{n-3}}, \dots, S_{N/4}, Q_{N/2}$ 는 분해 행렬을 의미한다.

2. 크기 순서

이산 변환 행렬은 우수-기수벡터로 구성되는 정규 직교 행렬이기 때문에 이산 변환의 성능은 변환 행렬의 요소값에 의해 결정된다. 특히 DCT는 최적 변환인 KLT에 근접한 성능을 갖기 때문에 직교 정수형 변환을 구현할 때 DCT의 크기 순서를 이용하는 것은 KLT에 근접한 성능을 갖도록 할 수 있기 때문이다.

그러므로 직교 정수형 변환 행렬  $[\Phi_N]$  의 행렬 요소 크기 관계는  $[\Phi_N]$  을 분해 행렬로 나타내었을 때 식(12), (13)과 같은 DCT 분해 행렬의 크기 순서에 대응하는 다음의 크기 조건을 가져야 한다.

$$[A_1 > A_2]_{S_{N/2^{n-1}}} \quad (27)$$

$$[B_1 > B_2 > B_3 > B_4]_{S_{N/2^{n-2}}} \quad (28)$$

$$[C_{11} > C_{12} > C_{13} > \dots > C_{1j}]_{S_{N/2^{n-1}}} \quad (29)$$

단,  $j = 1, 2, \dots, N/2^{n-3}$

⋮

$$[E_{11} > E_{12} > E_{13} > \dots > E_{1j}]_{S_{N/4}} \quad (30)$$

단,  $j = 1, 2, \dots, N/4$

$$[Q_{11} > Q_{12} > Q_{13} > \dots > Q_{1j}]_{Q_{N/2}} \quad (31)$$

단,  $j = 1, 2, \dots, N/2$

식(27)~(31)에서 첨자  $S_{N/2^{n-1}}, S_{N/2^{n-2}}, \dots, S_{N/4}, Q_{N/2}$ 는 분해 행렬을 의미한다.

3. 변환 행렬 요소의 최적화

일반성을 갖는 직교 정수형 변환 행렬  $[\Phi_N]$  의 정수값을 구하는 과정은 먼저 DCT의 분해 행렬 요소들이 각각의 분해 행렬들 끼리 서로 다른 값을 가지며, 각각의 분해 행렬의 요소는 중복되어 구성되는 성질을 이용하여 식(17)~(22)와 같은 변환 행렬  $[\Phi_N]$  의 분해 행렬들을 구성하고 식(23)~(26)의 직교 조건과 식(27)~(31)의 크기 순서를 만족하는 분해 행렬의 정수값을 구한다.

직교성과 크기 순서를 만족하는 정수값의 집합은 실제 여러개 존재할 수 있으므로 최적의 정수값을 구하기 위하여 이들 정수값의 집합들로 직교 정수형 변환 행렬을 구성하여 Hilbert-Schmidt norm<sup>[14]</sup> 이 가장 최소가 되는 정수값을 취한다.

Hilbert-Schmidt norm은 입력 신호가 1차 Markov 신호라 가정하고 공분산 행렬을 T, 직교 정수형 변환을  $\Phi$ 라 할 때  $T' = \Phi T \Phi^{-1}$ ,  $T'_{ii} = \text{diag}(\Phi T \Phi^{-1}) = \text{diag}(T'_{11}, T'_{22}, \dots, T'_{mm})$ ,  $T_U = \Phi^{-1} T_U' \Phi$ 이면 식(32)와 같다.

$$|T - T_v|^2 = \frac{1}{M} \left( \sum_{m,n=0}^{M-1} |(T - T_v)_{m,n}|^2 \right) = |T|^2 - \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |(\Phi T \Phi^{-1})_{m,m}|^2 \quad (32)$$

최적의 정수값을 구하기 위하여 Hilbert-Schmidt norm을 사용하는 것은 norm이 작을수록 변환의 성능이 최적 변환인 KLT에 더 근접한 성능을 갖기 때문이다.

제안한 방법을 이용하여 구현한 N=8인 경우의 직교 변환 행렬  $[\Phi_s]$  과 대각 행렬  $[K_s]$  은 각각 식 (33), (34)와 같으며 구하는 과정은 부록에 수록하였다.

$$[\Phi_s] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 9 & 6 & 2 & -2 & -6 & -9 & -10 \\ 12 & 5 & -5 & -12 & -12 & -5 & 5 & 12 \\ 9 & -2 & -10 & -6 & 6 & 10 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -10 & 2 & 9 & -9 & -2 & 10 & -6 \\ 5 & -12 & 12 & -5 & -5 & 12 & -12 & 5 \\ 2 & -6 & 9 & -10 & 10 & -9 & 6 & -2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$[K_s] = \text{diag}\{a, b, c, b, a, b, c, b\} \quad (34)$$

$a = 1/\sqrt{8}, b = 1/\sqrt{442}, c = 1/\sqrt{676}$

#### IV. 성능 비교

본 논문에서 제안한 직교 정수형 변환인 OIT의 성능 평가를 위해 입력 신호가 1차 정상(first order stationary) Markov process라 하고 DCT, CMT, ICT와 오차 특성, 변환의 효율성, 최대 감소 비트를 비교 하였다.

##### 1. 오차 특성

##### 1) 평균자승오차(Mean square error) [1], [3]

그림 1은 1차원 윈너 필터(Wiener filter)의 블럭 선도이다.

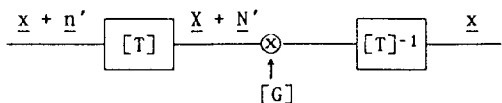


그림 1. 1차원 윈너 필터의 블럭 선도

Fig. 1. Block diagram of one-dimensional Wiener filter.

여기서 입력 벡터  $x + n$ 와 복원된 신호  $x$ 와의 평균 자승 오차를 평가하는 방법으로 윈너 필터에 의한 평균자승오차인 식(35)를 사용한다.

$$MSE = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\Psi x^2(i,i)}{\Psi x(i,i) + \Psi n(i,i)} \quad (35)$$

여기에서  $\psi_x(i,i)$ 와  $\psi_n(i,i)$ 는 각각 입력 신호와 잡음에 대한 변환영역에서의 공분산 행렬의 분산값이다.

표 1에 N=8일때의 직교 정수형 변환인 OIT, DCT, CMT, ICT의 평균 자승 오차를 나타내었다. N=8일때 직교 정수형 변환인 OIT가 다른 변환에 비해 평균 자승 오차가 가장 적다는 것을 알 수 있다.

표 1. 평균 자승 오차( $\rho=0.9, SNR=1$ )

Table 1. Mean square error( $\rho=0.9, SNR=1$ ).

N 변환	OIT	DCT	CMT	ICT
8	0.2545	0.2546	0.2558	0.2546

##### 2) 한정 오차(Restriction error) [11], [12]

압축 능력을 비교하기 위하여 한정오차를 고찰하면 다음과 같다. 임의의 변환 행렬  $\phi$ 와 공분산 행렬  $C$ 에 대하여 분산  $\sigma^2 K$ 는 식(36)과 같다.

$$\sigma^2 K = [\phi C \phi^T]_{k,k} \quad (36)$$

식(36)에서 분산들을 감소하는 순서로 놓을 때 (즉,  $\sigma^2_1 \geq \sigma^2_2 \geq \dots \geq \sigma^2_N$ ) 한정(restriction) m에 대하여 변환  $\phi$ 의 기본 한정 오차  $J_m$ 은 식(37)과 같다.

$$J_m = \sum_{k=m+1}^N \sigma^2_k / \sum_{k=1}^N \sigma^2_k \quad (37)$$

상관 계수  $\rho=0.9$ 에 대하여 직교 정수형 변환인 OIT와 DCT, CMT, ICT의 한정오차를 N=8일때 표 2에 나타내었다. N=8일때 직교 정수형 변환인 OIT가 다른 변환에 비해 한정오차가 가장 적다는 것을 알 수 있다.

표 2. 한정 오차(N=8,  $\rho=0.9$ )

Table 2. Restriction error(N=8,  $\rho=0.9$ ).

m 변환	OIT	DCT	CMT	ICT
1	22.68	22.68	22.68	22.68
2	10.10	10.11	10.28	10.10
3	5.71	6.78	5.95	5.79
4	3.71	3.71	4.04	3.73
5	2.40	2.40	2.73	2.42
6	1.45	1.45	1.48	1.47
7	0.68	0.68	0.71	0.69

2. 변환의 효율성(Transform efficiency) [8] [4] [12]

입력신호 f가 상관 계수 ρ에서 변환 행렬을 φ, 변환 벡터를 F라 할 때 자기 공분산 행렬(auto-covariance matrix) B는 식(38)과 같다.

$$B = [b(i, j)] = E[ff^T] = \phi[\phi^T] = \phi^T = \phi C \phi^T \quad (38)$$

단, C는 (i, j) 번째 요소가 ρ<sup>|i-j|</sup>의 값을 갖는 공분산 행렬이다.

변환의 효율성은 비상관 관계(decorrelation)로 정의되고, 효율성 η는 다음 식 (39)와 같다.

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n b(i, i)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b(i, j)} \times 100(\%) \quad (39)$$

상관 계수 ρ에 대하여 직교 정수형 변환인 OIT와 DCT, CMT, ICT의 효율성을 N=8일때 표 3에 나타내었다. N=8일때 직교 정수형 변환인 OIT는 ρ=0.9에서 ICT 보다는 변환의 효율성이 다소 낮지만 그밖의 ρ에서는 변환의 효율성이 가장 높다는 것을 알 수 있다.

표 3. 변환의 효율성(N=8)

Table 3. Transform efficiency(N=8).

ρ 변환	OIT	DCT	CMT	ICT
0.1	94.66	94.54	93.43	94.36
0.2	90.59	90.34	88.02	90.09
0.3	87.51	87.12	83.74	86.90
0.4	85.27	84.74	80.56	84.62
0.5	83.82	83.15	78.54	83.21
0.6	83.25	82.44	77.78	82.74
0.7	83.78	82.87	78.55	83.43
0.8	85.84	84.97	81.40	85.69
0.9	90.15	89.84	86.79	90.18

3. 최대 감소 비트(Maximum reducible bit: MRB) [4] [12]

변환의 성능을 측정하는 방법으로서 부 최대 감소 비트는 다음 식(40)과 같다.

$$MRB = -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^n \log_2 b(i, i) \quad (40)$$

최대 감소 비트는 이 값이 클수록 정보 전송에 대하여 요구되는 비트율이 감소된다는 의미에서 변환의

성능을 측정하는 방법으로 사용된다.

상관 계수 ρ에 대하여 직교 정수형 변환인 OIT와 DCT, CMT, ICT의 최대 감소 비트를 N=8일때 표 4에 나타내었다. N=8일때 직교 정수형 변환인 OIT가 다른 변환에 비해 최대 감소 비트가 가장 높다는 것을 알 수 있다.

표 4. 최대 감소 비트(N=8)

Table 4. Maximum reducible bit(N=8).

ρ 변환	OIT	DCT	CMT	ICT
0.1	0.0059	0.0058	0.0055	0.0058
0.2	0.0241	0.0240	0.0279	0.0238
0.3	0.0563	0.0560	0.0533	0.0557
0.4	0.1051	0.1046	0.0968	0.1043
0.5	0.1751	0.1744	0.1667	0.1739
0.6	0.2740	0.2731	0.2624	0.2726
0.7	0.4169	0.4158	0.4019	0.4152
0.8	0.6373	0.6364	0.6193	0.6355
0.9	1.0428	1.0422	1.0225	1.0410

V. 결론

본 논문에서는 일반성을 가지는 직교 정수형 변환을 제안하였다. 이 방법은 직교성과 KLT에 근접한 성능을 갖고 있는 DCT의 변환 행렬 요소 값들이 크기 순서 대로 배열된 것을 이용하여 변환 행렬 요소 값들이 실수가 아닌 정수값들만으로 배열 되도록 한 것이다. 이러한 정수 값들을 선정하는데 있어 Hilbert-Schmidt norm이 최소가 되는 값들을 취함으로써 KLT에 근접하도록 하였다. 이렇게 구현된 직교 정수형 변환은 N=8 일때 4비트의 정수로 구성되어 하드웨어 구현시 IC의 구조를 간단하게 하고 연산 속도를 줄일 수 있다.

제안된 직교 정수형 변환의 성능 평가를 위해 오차 특성, 변환의 효율성, 최대 감소 비트 특성을 DCT, CMT, ICT와 비교한 결과 N=8일때 직교 정수형 변환은 다른 변환에 비해 최적 변환인 KLT에 가장 근접한 성능을 가졌다.

부 록

직교 정수형 변환 행렬의 구현 과정(N=8)

직교 정수형 변환 행렬  $[\phi_8]$ 의 분해 행렬은 일반성을 갖는 직교 정수형 변환 행렬  $[\phi_N]$ 의 분해

행렬인 식(17)~(22)을 이용하여 정리하면 다음 식 [1] ~ [3] 과 같다.

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad [1]$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & -A_1 \end{bmatrix} \quad [2]$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ B_3 & -B_1 & B_4 & B_2 \\ B_2 & -B_4 & -B_1 & -B_3 \\ B_4 & -B_3 & B_2 & -B_1 \end{bmatrix} \quad [3]$$

식 [2] , [3] 의 행렬 요소가 일반식으로 나타낸 식(23)~(26)의 직교 조건과 식(27)~(31)의 크기 순서를 만족하는 정수값을 갖기 위한 조건은 다음과 같다.

$$B_1 B_2 = B_2 B_3 + B_2 B_4 + B_3 B_4 \quad [4]$$

$$A_1 > A_2 \quad [5]$$

$$B_2 > B_4 > B_3 > B_1 \quad [6]$$

직교 조건과 크기 순서를 갖는 직교 정수형 변환 행렬  $[Q]$  의 정수값을 구하면, 분해 행렬 [2] , [3] 의 행렬 요소가 서로 다른 값을 가지므로 먼저 식 [4] 의 직교 조건과 식 [6] 의 크기 순서를 만족하는 분해 행렬 요소  $B_1, B_2, B_3, B_4$ 를 구한 다음 식 [5] , [6] 을 만족하는 행렬 요소  $A_1$ 과  $A_2$ 를 구한다. 그런데 식 [4] 와 [6] 을 만족하는 정수값을  $S_1 = \{ B_1, B_2, B_3, B_4 \}$ 이라 할때 여러 개의  $S_1$ 이 존재하며,  $A_1$ 과  $A_2$ 는 식 [4] 의 직교 조건과 독립이기 때문에 식 [5] 를 만족하는 임의의 정수값을 취해야 한다.

최적의 정수값을 구하기 위하여  $S_1$ 과  $A_1, A_2$ 를 이용하여 직교 정수형 변환 행렬을 구성하고 Hilbert-Schmidt norm이 가장 작은 정수값을 취하면 각각  $A_1=12, A_2=5, B_1=10, B_2=9, B_3=6, B_4=2$ 가 되며, 하드웨어 구현시 4비트로 구성할 수 있는 장점을 갖는다.

#### 參考文獻

- [1] N. Ahmed, T. Natarajan, and K. R. Rao, "Discrete Cosine Transform," *IEEE Trans. Computer*, vol. COM-23, pp. 90-93, Jan. 1974.
- [2] R. J. Clarke, "Transform Coding of Image," Academic Press, 1985.

- [3] K. R. Rao, P. Yip, "Discrete Cosine Transform Algorithms, Advantages, Applications," Academic press, 1990.
- [4] W. H. Chen, C. H. Smith, and S. C. Fralic, "A Fast Computational algorithm for the Discrete Cosine Transform," *IEEE Trans. on Communications*, vol. COM-25, no. 9, pp. 1004-1009, Sep. 1977
- [5] John Makhoul, "A Fast Cosine Transform in One and Two Dimensions," *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-28, no. 1, pp. 27-34, Feb. 1980
- [6] M. A. Haque, "A Two Dimensional Fast Cosine Transform," *IEEE Trans. on ASSP*, vol. ASSP-33, no. 6, pp. 1532-1539, Dec. 1985
- [7] M. Guglielmo, "An Analysis of Error Behavior in the Implementation of 2-D Orthogonal Transforms," *IEEE Trans. on Communi.*, vol. COM-30, no. 9, pp. 973-975, Sep. 1986
- [8] H. W. Jones, D. H. Hein, and S. C. Knauer, "The Karhunen-Loeve, discrete cosine, and related transforms obtained via the Hadamard transform," *Int. Telemetering Conf.*, Los Angeles, Nov. pp. 14-16, 1978.
- [9] R. Srinivasan, K. R. Rao, "An approximation to the discrete cosine transform for  $N=16$ ," *Signal Processing*, vol. 5, pp. 81-85, Jan. 1983.
- [10] Hoon Sung Kwak, R. Srinivasan, and K. R. Rao, "C-Matrix Transform," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, no. 5, Oct. 1983.
- [11] W. K. Cham, "Development of integer cosine transforms by the principle of dyadic symmetry," *IEE Proc. Inst. Elect. Eng. Part I*, pp. 276-282, Aug. 1989.
- [12] W. K. Cham and Y. T. Chan, "An Order-16 Integer Cosine Transform," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 39, no. 5, May 1991.
- [13] M. Hamidi, J. Pearl, "Comparison of

the cosine and Fourier transform of Markov-1 signals." *IEEE Acoust.*

*Speech, Signal Process. Trans. ASSP-* 24, pp. 248-429, 1976

著 者 紹 介



**李 宗 河(正會員)**  
1959年 3月 19日生. 1982年 2月 전북대학교 전기공학과(공학사). 1984年 2月 전북대학교 대학원 전기공학과(공학석사). 1993年 8월 전북대학교 대학원 전자공학과(공학박사). 1990年 3月 ~ 현재 전주공업전문대학 전자과 조교수. 주관심분야는 영상처리, HDTV, 컴퓨터 비전 등임.



**郭 勳 星(正會員)**  
1944年 6月 27日生. 1964年 ~ 1971年 2月 全北大學校 電氣工學(電子專攻)科卒業(工學士). 1971年~1978年 8月 全北大學校 大學院 卒業(工學碩士, 博士). 1981年 1982年 8月 美國텍사스大學校 客員教授. 1988年~1990年 12月 大韓電子工學會 全北支部長. 1978年 ~ 現在 全北大學校 教授 (컴퓨터공학과). 1992年 ~ 現在 全北大學校 電子計算所 所長. 주관심분야는 영상처리, HDTV, 패턴인식 및 인공지능 등임.