

# 내부 유체 유동을 포함한 해저 파이프 라인의 인장 굽힘 비틀림 운동 방정식

서 영 태\*

(1994년 6월 15일 접수)

The Equations of Motion for the Stretching, Bending and  
Twisting of a Marine Pipeline Containing Flowing Fluids

Young-Tae Seo\*

**Key Words** : marine pipeline(해저 송유관), slender rod(세장보), space curve(공간곡선), Hamilton's principle(해밀턴 원리), Lagrangian(라그랑지안), 1st variation(1차 변분), kinetic energy(운동 에너지), strain energy (변형 에너지)

## Abstract

The Equations of motion of a submarine pipeline with the internal flowing fluid and subject to hydrodynamic loadings are derived by using Hamilton's principle. Coupling between the bending and the longitudinal extension due to axial load and thermal expansion are considered. Coupling between the twisting and extension are not considered.

The equations of motion are well agreed with the results which are derived by the vector method.

## 서 대략

- (1) 해저면 상의 광물 채집<sup>1,2)</sup>
- (2) 원유 수송용 해저면에 노출된 송유관<sup>3,4)</sup>
- (3) production riser<sup>5,6,7)</sup>
- (4) 해저에 지지방식으로 설치된 파이프 라인<sup>8,9)</sup>

## 1. 서 론

해저 자원의 개발과 수송에 있어서 해저 파이프 라인의 용도와 역할은 광범위 하고 중요하다. 해저 파이프 라인의 설계는 그 용도와 역할 면에

\* 정희원, 한국 군사 문제 연구원

이며, 이에 따른 해저 파이프 라인의 동적 거동에 관한 모델링은 그 용도에 따라 가정과 운동 방정식의 형태를 조금씩 달리하고 있다.

파이프 라인 운동 방정식은, 주로 파이프 라인을 Euler-Kirchhoff<sup>10,11)</sup> 이론에 기초를 둔 세장비가 큰 강봉으로 취급하고, 이것이 해저에서 각종 외력에 따라 finite-amplitude deflection 운동을 하는 것으로 가정하여 유도 되었다.

운동 방정식의 유도는 Newton's law of motion 을 직접 적용하는 벡터법을 주로 사용하며, Hamilton's principle 을 적용하는 에너지법에 의한 유도는 극히 드물다.

본 연구에서는 내부 유체 유동이 있는 파이프 라인의 각종 형태의 외력에 대한 인장과

굽힘, 비틀림 운동 방정식을 Hamilton's principle<sup>12,13)</sup> 을 적용하여 유도하고 벡터법에 의해 유도된 간단한 식과 비교 검토하여, 보다 광범위한 목적에 적합한 파이프 라인 운동 방정식을 제시하였다.

## 2. 운동 방정식

파이프 라인 운동 방정식을 유도하는 과정 중 사용된 가정은 다음과 같다.

- (1) 파이프 라인은 세장비가 큰 강봉으로 단위 길이당 질량은 일정
- (2) principal stiffness 는 동일
- (3) 재질은 균등하며, Hooke 의 법칙을 따름
- (4) 주요 탄성 변형은 인장, 굽힘 및 비틀림에 의해 발생
- (5) residual strain 은 없음
- (6) 내부 유동 유체의 유속과 정압은 일정

### 2.1 좌표계

운동 방정식 유도 과정중 사용된 좌표계와 파이프 라인 및 그의 중심선이 이루는 공간 곡선이 Fig.1 에 표시되어 있다.

전체 좌표계  $X_{i=1,3}$  는 공간상 임의의 기준점에 고정되어 있으며, 파이프 라인 중심선이 이루는 공간 곡선은 중심선을 따른 호의 길이  $s$  와 시간

$t$  로 표시되는 위치 벡터  $\mathbf{R}(s,t)$  로서 결정된다<sup>14)</sup>. 공간 곡선상 임의점에서 단위 접선 벡터  $\mathbf{t}$ , 단위 법선 벡터  $\mathbf{n}$  과 단위 배 법선 벡터  $\mathbf{b}$  는 다음과 같이 정의 된다.

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}'(s,t), \quad \mathbf{n} = \mathbf{t}'/x, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (1)$$

여기서 ( ) ' 은 호의 길이  $s$  에 대한 미분이며  $x$  는 호의 곡률로서

$$x = [ \mathbf{R}'' \cdot \mathbf{R}'' ]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

식 (1) 에서 정의된 상호 직교하는 한 조의 벡터를 국부 좌표계로 사용 하였다.

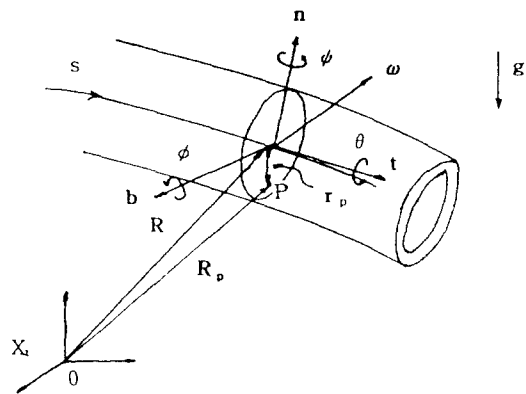


Fig.1 Pipeline geometry and coordinate systems

### 2.2 라그랑지안

Hamilton's principle 의 적용에 앞서 라그랑지안을 구하기 위하여 파이프 라인의 운동 에너지와 변형 에너지 및 위치 에너지를 Fig.1 에 표시된 좌표계를 이용하여 구하고, 각종 외력에 의한 일을 구한다.

#### 2.2.1 운동 에너지

파이프 라인 단면 상 일점 p 의 위치  $\mathbf{R}_p$  와 속도  $\dot{\mathbf{R}}_p$  는 전체 좌표계에 대하여 다음과 같이 주

어진다<sup>15,16)</sup>. (Fig.1)

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R} + \mathbf{r}_p \quad (3)$$

$$\mathbf{V}_p = \dot{\mathbf{R}}_p = \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{t} + \dot{\psi} \mathbf{n} + \dot{\phi} \mathbf{b} \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_p = r_n \mathbf{n} + r_b \mathbf{b} \quad (6)$$

여기서 ( $\dot{\phantom{x}}$ )는 시간에 대한 미분이며,  $\boldsymbol{\omega}$ 는 전체 좌표계에 대한 파이프 라인의 각속도벡터이다.

파이프 라인의 전체 운동 에너지 K는

$$\begin{aligned} K &= \int_0^\ell \frac{1}{2} \rho (\mathbf{V}_p \cdot \mathbf{V}_p) ds \\ &= \int_0^\ell \frac{1}{2} \rho |\dot{\mathbf{R}}|^2 ds + \int_0^\ell \frac{1}{2} \rho \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}_p \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p)] dA ds \\ &= \int_0^\ell \left[ \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \rho I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho I (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2) \right] ds \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $\rho$ 는 파이프 라인 단위 길이당 질량,  $\ell$ 은 전체 길이, A는 단면적,  $I_p$ 는 단면의 극관성 모멘트, I는 단면 2차 모멘트이다.

식 (7)에 표시된 전체 운동 에너지 중 마지막 항인 단면의 회전 관성 항은 고려하지 않는다.

### 2.2.2 위치 에너지

위치 에너지를 중력에 의한 위치 에너지  $V_g$ 와 변형 에너지  $V_s$ 로 나누어 계산 하면

$$V_g = - \int_0^\ell \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} ds \quad (8)$$

$$V_s = \int_0^\ell \left[ \frac{1}{2} EI (\mathbf{R}'')^2 + \frac{1}{2} GI_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 \right] ds \quad (9)$$

여기서 EI,  $GI_p$ , EA는 각각 파이프 라인의 굽힘 강성, 비틀림 강성, 축강성을 나타낸다. 축 변형률  $\varepsilon$ 는

$$\varepsilon = (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}')^{\frac{1}{2}} - 1 = T/EA + \alpha \Delta Q \quad (10)$$

식 (10)에서 마지막 항은 균일 열 변형율을 나타내고,  $\alpha$ 는 열 팽창 계수,  $\Delta Q$ 는 온도 증가량이며, T는 축 인장력을 나타낸다.

### 2.2.3 외력에 의한 일

파이프 라인에 작용하는 각종 외력들이 Fig.2에 표시되어 있다. 분포 하중  $\mathbf{q}$ , 끝단에 작용하는 집중 하중  $\mathbf{F}(\ell)$ , 분포 비틀림 우력  $\mathbf{m}$ 과 끝단의 비틀림 우력  $\mathbf{T}(\ell)$ , 들에 의한 일은

$$A = \mathbf{F}(\ell) \cdot \mathbf{R}(\ell) + \int_0^\ell \mathbf{q} ds \cdot \mathbf{R} + \int_0^\ell \mathbf{m} ds \cdot \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} + \mathbf{T}(\ell) \cdot \boldsymbol{\theta} \mathbf{t}(\ell) \quad (11)$$

여기서  $\mathbf{t}(\ell)$ 은 파이프 라인 끝단에서의 중심선의 단위 접선 벡터이고,  $\boldsymbol{\theta}$ 는 회전각이다.

### 2.2.4 내부 유동 유체의 에너지

유동 유체의 정압 P가 파이프 라인 운동에 미치는 영향을 Fig.2를 참조하여 고려하면, 파이프 라인 중심선에 따른 법선 방향의 정압에 의한 분포 하중  $d\mathbf{F}_n/ds$ 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

파이프 라인 미소 면적 요소  $ds$   $d\ell$ 에 작용하는 힘의  $\mathbf{n}$ 방향 성분은

$$\begin{aligned} d\left(\frac{d\mathbf{F}_n}{ds}\right) &= P d\ell \cos \alpha \mathbf{n} = P d\ell \left(\frac{d\xi}{d\ell}\right) \mathbf{n} \\ &= Pd\xi \mathbf{n} \end{aligned} \quad (12)$$

$$ds = d\phi/x, d\bar{s} = \left(\frac{1}{x} + \eta\right) d\phi = (1+x\eta)ds \quad (13)$$

식 (13)을 식 (12)에 대입한 후, 파이프 라인 둘레 C에 따라 적분 하면

$$d\left(\frac{d\mathbf{F}_n}{ds}\right) = (1+x\eta) Pd\xi \mathbf{n} \quad (14)$$

$$\frac{d\mathbf{F}_n}{ds} = \oint_C Pd\xi \mathbf{n} + \oint_C x\eta Pd\xi \mathbf{n} \quad (15)$$

식 (15)의 처음 적분항은 0이며, 두번째 적분항에 Green's theorem을 적용시키면

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}_n}{ds} &= \oint_c \chi \eta P d\xi \mathbf{n} = -\chi P \int_{A_f} \frac{d\eta}{d\eta} d\eta d\xi \mathbf{n} \\ &= -\chi P A_f \mathbf{n} = -P A_f \mathbf{R}_f'' \end{aligned} \quad (16)$$

여기서  $A_f$ 는 파이프 라인 내부 유체의 단면적이며  $\mathbf{R}_f$ 는 파이프 라인 중심축 선을 통과하는 유체 입자의 위치 벡터이다.

내부 유체 압력에 의한 일은

$$\begin{aligned} A_F &= \int_0^\ell \frac{d\mathbf{F}_n}{ds} ds \cdot \mathbf{R}_f \\ &= \int_0^\ell -P A_f \mathbf{R}_f'' ds \cdot \mathbf{R}_f \end{aligned} \quad (17)$$

내부 유체의 운동 에너지와 위치 에너지는

$$K_F = \int_0^\ell \frac{1}{2} \rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial t} \right)^2 ds_f \quad (18)$$

$$V_{Fg} = - \int_0^\ell \rho_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_f ds_f \quad (19)$$

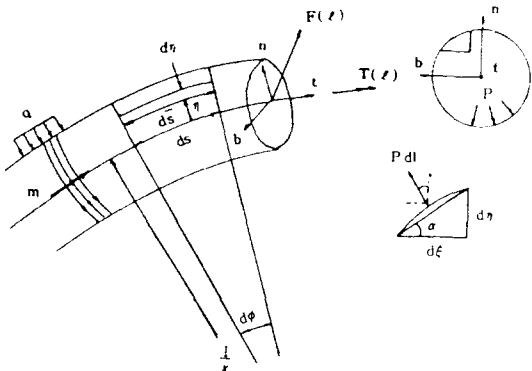


Fig.2 Applied loads on pipeline and force diagram resulting from internal fluid pressure

식 (7)-(9), 식 (11) 과 식 (17)-(19) 로 부터 Lagrangian L 과 외력이 한 일 W 는

$$L = K + K_F - V_s - V_g - V_{Fg} \quad (20)$$

$$W = A + A_F \quad (21)$$

### 2.3 1st variation

Hamilton's principle 을 적용하기 위하여 식 (20)의 1st variation 과 식 (21)의 가상일을 구 하면,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta [ \int_s [ \dots [ K + K_F - V_s \\ &\quad - V_g - V_{Fg} ] dt \end{aligned} \quad (22)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta [ A + A_F ] dt \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta K dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \rho \bar{\mathbf{R}} \delta \mathbf{R} ds dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \rho I_p \theta \delta \theta ds dt \end{aligned} \quad (24)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K_F dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \rho_f \bar{\mathbf{R}}_f \delta \mathbf{R}_f ds_f dt \quad (25)$$

식 (25) 에서<sup>16)</sup>

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_f &= \frac{D\mathbf{R}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}, \\ \bar{\mathbf{R}}_f &= \bar{\mathbf{R}} + V^2 \mathbf{R}'' + 2V \dot{\mathbf{R}}' \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_f(s_f, t) &= \mathbf{R}[s_f + V(t-t_0), t] \text{ and } \delta \mathbf{R}_f \\ &= \delta \mathbf{R} \text{ for } 0 < s_f + V(t-t_0) < \ell \end{aligned} \quad (27)$$

이므로, 식 (26), (27) 로 부터 식 (25) 는

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta K_F dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \rho_f [ \bar{\mathbf{R}} + V^2 \mathbf{R}'' + \\ &\quad 2V \dot{\mathbf{R}}' ] \delta \mathbf{R} ds dt \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta V_s dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell [ EI \mathbf{R}'' (\delta \mathbf{R})'' \\ &\quad + GI_p \theta' (\delta \theta)' + EA \epsilon \delta ((\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}')^{\frac{1}{2}} - 1) \\ &\quad ds dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell (EI \mathbf{R}''')' \delta \mathbf{R} ds dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} [ EI \mathbf{R}'''] (\delta \mathbf{R})' |_0^\ell dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_1}^{t_2} (EI R'' (\delta \mathbf{R})|_0^\ell) dt \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell (GI_p \theta')' \delta \theta ds dt \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} [ GI_p \theta \delta \theta |_0^\ell ] dt \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell (EA \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \mathbf{R}')' \delta \mathbf{R} ds dt \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} [ EA \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \mathbf{R}' \delta \mathbf{R} |_0^\ell ] dt \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta V_g dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \rho \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{R} ds dt \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \delta V_{Fg} dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \rho_f \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{R}_f ds_f dt \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \rho_f \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{R} ds dt \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\ell) \cdot \delta \mathbf{R}(\ell) dt \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{R} ds dt \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \mathbf{m} \delta \theta ds dt \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{T}(\ell) \cdot \delta \theta(\ell) dt \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A_F dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell -PA_f R'' \delta \mathbf{R} ds dt \quad (33)$$

### 2.4 운동 방정식

Hamilton's principle 은 다음식으로 표시될 수 있다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (34)$$

식 (24) 와 식 (28)-(33) 을 식 (34)에 대입하고, 임의의 admissible variation  $\delta \mathbf{R}$ ,  $\delta \theta$ 에 대하여 정리하면, 최종적으로, 운동 방정식과 해당 경계 조건을 유도할 수 있다.

운동 방정식은

$$\begin{aligned}
 (\rho + \rho_f) \ddot{\mathbf{R}} &= - (EI R'')'' + (\frac{EA\epsilon}{1+\epsilon} \mathbf{R}')' \\
 &- (PA_f + \rho_f V^2) R'' - 2V\rho_f \dot{\mathbf{R}}' \\
 &+ (\rho + \rho_f) \mathbf{g} + \mathbf{q} \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\rho I_p \ddot{\theta} = (GI_p \theta')' + \mathbf{m} \quad (36)$$

경계 조건은

$$\begin{aligned}
 & - (EI R'')' + \frac{EA\epsilon}{1+\epsilon} \mathbf{R}' \mathbf{F}(\ell), \text{ for } s=0, \ell \\
 & (EI R'')' = \frac{EA\epsilon}{1+\epsilon} \mathbf{R}' \text{ or } \mathbf{R}=0, \text{ for } s=0 \\
 & EI R'' = 0, \text{ for } s=0, \ell \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$GI_p \theta'(\ell) - \mathbf{T}(\ell) \cdot \mathbf{t} = 0, \theta(0) \text{ specified} \quad (38)$$

### 3. 비교 및 검토

Hamilton's principle 을 적용하여 유도한 식 (35) 에서 내부 유체 유동 효과를 무시하면, 선 운동량과 각 운동량 보존 원리를 적용한 벡터법으로 구한 Nordgren<sup>17)</sup> 의 운동 방정식과 잘 일치하며, 식 (36) 은 강봉의 비틀림 운동 방정식과 일치한다<sup>18)</sup>.

강봉의 운동 에너지 식 (7) 에서 단면의  $\mathbf{b}$  축과  $\mathbf{n}$  축에 대한 회전 관성 항을 고려하여 식을 유도하면 식 (36) 과 동일 형태의 운동 방정식을 구할 수 있다.

식 (35)는 축방향 인장을 허용할 경우 식 (10) 과 동시에 해를 구하고, 축방향 인장을 허용하지 않을 경우에는  $\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}' = 1$ 의 제한 조건과 함께 해를 구한다.

### 4. 결 론

본 논문에서 제시한 내부 유체 유동을 포함한

파이프 라인의 운동 방정식은 각종 하중을 포함하며 인장, 굽힘과 비틀림을 고려한 식으로, 해저 파이프 라인의 용도에 따라 광범위하게 이용할 수 있다.

에너지 법에 의한 유도 결과는 벡터법에 의한 결과와 잘 일치하였고, 에너지 법의 특징인 경계 조건을 조직적으로 취급할 수 있음을 알 수 있다.

### 참 고 문 헌

- 1) Chung, J. S., Whitney, A. K., and Loden, W. A., "Nonlinear Transient Motion of Deep Ocean Mining Pipe," ASME Journal of Energy Resources Technology, Vol.103, Mar.1981, pp.2-10
- 2) Felippa, C. A., and Chung, J. S., "Nonlinear Static Analysis of Deep Ocean Mining Pipe - Part 1 : Modeling and Formulation," ASME Journal of Energy Resources Technology, Vol.103, Mar.1981, pp.11-15
- 3) Healey, A. J., and Seo, Y. T., "Dynamic Motions of Marine Pipelines on the Ocean Bottom," ASME Journal of Energy Resources Technology, Vol.106, Mar.1984, pp.65-69
- 4) Garrett, D. L., "Dynamic Analysis of Slender Rods," Proceedings of 1st Offshore Mechanics Symposium, ASME, Mar.1982, pp.127-133
- 5) Kim, Y. C., and M. S. Triantafyllou, "The Nonlinear Dynamics of Long, Slender Cylinders," ASME Journal of Energy Resources Technology, Vol.106, June 1984, pp.250-256
- 6) Bernitsas, M., "A Three-Dimensional Nonlinear Large-Deflection Model for Dynamic Behavior of Risers, Pipelines, and Cables," Journal of Ship Research, Vol.26, No.1, Mar.1982, pp.59-64
- 7) Huang, T., and Chucheepsakul, S., "Large Displacement Analysis of a Marine Riser," ASME Journal of Energy Resources Technology, Vol.107, Mar. 1985, pp.54-59
- 8) Huang, Z., and Seireg, A., "Optimum Design of Submarine Suspended Pipelines," ASME Journal of Energy Resources Technology, Vol.107, Sept. 1985, pp.335-341
- 9) Hick, J. B., and Clark, L. G., "On the Dynamic Response of Buoy-Supported Cables and Pipes to Currents and Waves," Paper No.1556, Offshore Technology Conference, Dallas, TX.1972
- 10) Love, A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th Ed., Dover Publications, New York.1927
- 11) Landau, L. D., and Lifshitz, E. M., Theory of Elasticity, 2nd English Ed., Pergamon Press Inc., New York.1970
- 12) Fung, Y. C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Inc.,1965
- 13) Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd Ed., Pergamon Press.1975
- 14) Lass, H., Vector and Tensor Analysis, McGraw-Hill Book Co., 1950
- 15) Greenwood, D. T., Principles of Dynamics, Prentice-Hall, Inc.
- 16) Crandall, S. H., et al., Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems, McGraw-Hill Book Co.,1969
- 17) Nordgren, R. P., "On Computation of the Motion of Elastic Rods," ASME Journal of Applied Mechanics, Sept. 1974, pp.777-780
- 18) Timoshenko, S., Young, D. H., and Weaver, W. Jr., Vibration Problems in Engineering, 4th Ed., John Wiley and Sons Inc., 1974