응용통계연구 제7권 2호
1994년 9월 pp. 21-34

M/M/1 QUEUE에서 수행측도들에 대한 민감도 분석[1)]

박홍식[2)]

요약

본 논문에서는 대기체계 $M/M/1$에서 평균 도착시간간격 θ에 대한, 평형상태에서 평균시스템시간(Steady State Mean System Time) W의 민감도 $dW/d\theta$를 표본통로(Sample Path)를 관찰하므로서 얻을 수 있는 방안을 제시하였으며, 평형상태에서 시스템 내에 고객이 k명 있을 확률, 즉 극한확률(Limiting Probability) P_k의 민감도 $dP_k/d\theta$에 대해서도 유사한 결과를 얻었다. 또한 두 경우 모두 민감도의 추정값이 IPA(Infinitesimal Perturbation Analysis)추정값과 그 이외의 요인에 의한 값의 합으로 명확히 표시됨을 보임으로서 IPA추정값이 일반적으로 적용될 수 없음을 확인하였다.

1. 서 론

확률모형에서 관심의 대상이 되는 수행측도(Performance Measure)들의 주어진 모수에 대한 민감도는 최적화문제들을 위시하여 확률분야의 여러 문제에 사용되어질 수 있다. 수행측도의 민감도 $dE[Y(\theta)]/d\theta$의 근사값은

$$\frac{Y(\theta+\Delta\theta)-Y(\theta)}{\Delta\theta}$$

를 이용하여 구해왔으나 최근 IPA방법이라 불리우는 새로운 방법이 개발되어, 대기체계 $M/G/1$에서 평균 시스템시간의 도착률에 대한 민감도를 구한 것을 위시하여 이산사건 시스템에서의 많은 수행측도들의 민감도가

$$\frac{dY(\theta)}{d\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{Y(\theta+\Delta\theta)-Y(\theta)}{\Delta\theta}$$

를 이용하여 구할 수 있음을 보였다, Suri와 Zazanis(1988). 더우기 IPA방법이 재래의 방법에 비해 계산시간이 절약되고 더 정확할 뿐 아니라 표본통로를 관찰하는 동안 민감도를 구할 수 있어 실제 응용문제에 쉽게 적용시킬 수 있음이 판명되었다.

이러한 장점에도 불구하고 아주 간단한 시스템에서 조차 IPA방법이 효과적이지 못한 경우가 있어 그 이유를 규명하려는 연구가 Heidelberger(1988), Cao(1985)등의 학자들에 의해 행해졌고 또 한편 IPA방법이 일반적으로 적용될 수 있도록 확장하려는 연구도 Zazanis(1990), Ho(1988), Gong(1987), Glasserman(1988)등의 학자들에 의해 행해졌다.

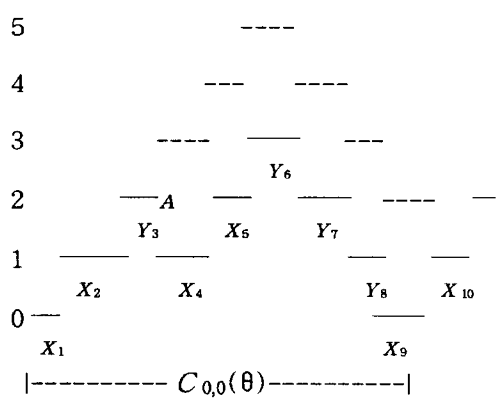
1) 이 논문은 1992년도 세종대학교 대양 학술연구비에 의해 연구되었음.
2) (133-150) 서울특별시 성동구 군자동 세종대학교 수학과.

본 논문에서는 대기체계 $M/M/1$에서 바쁜 사이클(Busy Cycle)동안 고객들의 시스템시간들의 합계와 고객들이 k명 이었던 시간의 합계의, 도착률 θ에 대한 민감도가 두 경우 모두 IPA 방법에 의해 얻을 수 있는 부분과 그 이외의 부분으로 명확하게 구분되어 표시됨을 보임으로서 IPA방법이 일반적으로 적용될 수 없음을 확인하였으며, 바쁜 사이클의 도착률 θ에 대한 민감도의 공식을 사용하여 시스템내 고객의 수에 대한 극한확률 및 고객의 평균 시스템시간 등에 대해서도 민감도를 구하고 그들이 표본통로를 통하여 관측될 수 있음을 보임으로서 제한된 범위이긴 하나 IPA방법이 효과적이지 못한 경우에도 표본통로를 통하여 수행측도들의 민감도를 구할 수 있는 방법을 제시하였다.

2. 극한확률과 평균 시스템시간에 대한 표본통로 추정

어떤 시점에서 고객이 새로 도착하거나 혹은 현재의 고객이 써비스를 마치고 시스템을 떠났다면 그 시점에서 예상 도착시간간격 X와 예상 써비스시간 Y가 다음과 같은 누적 확률분포 함수들 $F(x,\theta)=1-\exp(-x/\theta)$와 $G(y,\mu)=1-\exp(-y/\mu)$에 의해 생성되는 대기체계 $M/M/1$을 생각하자.

$X \leq Y$라면 X가 다음 고객이 도착할 때까지의 시간간격이 되고 X시간 후에 고객은 한 명 증가하게 되며, $X>Y$라면 Y는 현 시점에서 써비스를 받기 시작한 고객의 써비스시간이 되고 Y시간 후에 고객의 수는 한 명 감소하게 된다. 단 시스템에 고객이 한 명도 없게 된 경우 다음 고객이 도착할 때까지의 시간간격 X만을 생성하며 이 경우 X시간 후의 시스템 내의 고객은 한 명으로 증가한다.



< 그림 1> 표본통로의 예

X_i를 $F(x,\theta)$에 의해 i번째 생성된 확률변수, Y_j를 $G(y,\mu)$에 의해 j번째 생성된 확률변수라 하면 $\{X_1, X_2, Y_3, X_4, X_5, Y_6, Y_7, Y_8, X_9, X_{10}, \cdots\}$은 전형적인 한 표본통로를 표시하며 그 형태는 그림 1에서 실선으로 주어지는 것과 같다. 그림 1에서 볼 수 있는 것처럼 $C_{0,0}(\theta)$는 바쁜 사이클의 길이를 표시하며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{0,0}(\theta) = X_1 + X_2 + Y_3 + X_4 + X_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8.$$

$C_t(\theta)$를 시간 t에서의 시스템내의 고객의 수를 표시한다 할 때, 다음과 같이 $R_{0,0}(\theta)$를 정의하자.

$$R_{0,0}(\theta) = \int_0^{C_{0,0}(\theta)} C_t(\theta)\,dt.$$

즉, $R_{0,0}(\theta)$는 첫번 바쁜 사이클동안 써비스를 받은 고객들이 시스템에 머문 시간들의 합계를 표시한다. Renewal Reward 정리에 의해 평형상태에서 시스템 안에 고객의 평균수 $E[C]$는 다음과 같다.

$$E[C] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t C_s(\theta)ds}{t} = \frac{E[R_{0,0}(\theta)]}{E[C_{0,0}(\theta)]}.$$

따라서

$$\frac{dE[C]}{d\theta} = \frac{dE[R_{0,0}(\theta)]}{E[C_{0,0}(\theta)]} - \left(\frac{E[R_{0,0}(\theta)]}{E[C_{0,0}(\theta)]}\right)\left(\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta}{E[C_{0,0}(\theta)]}\right).$$

$dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta$을 표본통로로부터 구하는 방법은 이미 알려져있고(박홍식,1992), Little의 법칙(Wolff,1989)에 의해 평형상태에서 평균 시스템시간은 $\theta E[C]$으로 주어지므로, 결국 $dE[R_{0,0}(\theta)]/d\theta$의 값을 표본통로를 통해 구할 수 있는 방법만 알면 평형상태에서의 평균 시스템시간의 민감도를 표본통로를 통해 얻을 수 있다.

한편, 첫 번 바쁜 사이클 $C_{0,0}(\theta)$동안 고객의 수가 k명이었던 시간의 합계를 $W_{0,0}(\theta,k)$라 표시할 때 극한확률 $P_k(\theta)$는 다시 Renewal Reward 정리에 의해 다음과 같이 주어지므로

$$P_k(\theta) = \frac{E[W_{0,0}(\theta,k)]}{E[C_{0,0}(\theta)]},$$

다음과 같은 결과를 얻게된다.

$$\frac{dP_k(\theta)}{d\theta} = \frac{dE[W_{0,0}(\theta,k)]/d\theta}{E[C_{0,0}(\theta)]} - \left(\frac{E[W_{0,0}(\theta,k)]}{E[C_{0,0}(\theta)]}\right)\left(\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta}{E[C_{0,0}(\theta)]}\right).$$

즉, $dE[W_{0,0}(\theta,k)]/d\theta$의 값을 표본통로를 통해 구하는 방법을 알면 극한확률 $P_k(\theta)$의 민감도를 표본통로를 통해 구할 수 있다.

2.1 기호의 정의

다음 절들에서는 $dE[R_{0,0}(\theta)]/d\theta$와 $dE[W_{0,0}(\theta,k)]/d\theta$의 값들을 표본통로를 관찰하므로서 구할 수 있는 방법을 설명하려고 한다. 이를 위해 다음과 같이 기호를 정의하기로 한다.

$W_{i,0}(\theta,s)$: 고객의 수가 i명에서 처음으로 0이 될 때까지 변하는 동안 고객의 수가 s명이었던 시간의 합계. 그림 1에서 $W_{0,0}(\theta,2)=Y_3+X_5+Y_7$이다.

U : 처음 바쁜 사이클동안 도착한 고객들에 해당하는 X_k들의 첨자인 k들의 집합. 그림 1에서 $U=\{1,2,4,5\}$ 이다.

U_i : U의 부분집합으로서 i보다 큰 첨자들의 집합.

$U(s)$: U의 부분집합으로서 X_k동안 고객의 수가 s인 첨자 k들의 집합. 그림 1에서 $U(1)=\{2,4\}$이다.

$U_i(s)$: $U(s)$의 부분집합으로서 i보다 작은 첨자들의 집합.

$V_i(s)$: $U(s)$의 부분집합으로서 i보다 큰 첨자들의 집합.

D : 처음 바쁜 사이클동안 써비스를 받은 고객들에 해당하는 Y_k들의 첨자인 k들의 집합. 그림 1에서 $D=\{3,6,7,8\}$ 이다.

D_i : D의 부분집합으로서 i보다 큰 첨자들의 집합.

$D(s)$: D의 부분집합으로서 Y_k 동안 고객의 수가 s인 첨자 k들의 집합. 그림 1에서 $D(1)=\{8\}$ 이다.

$n(i)$: 처음 바쁜 사이클에서 i번째 사건이 일어난 상태에서, 즉 첨자 i에서의 고객의 수. 그림 1에서 $n(5)=2$이다.

A_i : 원래 Y_i의 끝에서 고객이 한명 감소하도록 되어있으나, 평균 도착시간 간격이 θ에서 θ-Δθ로 줄어들므로서 고객이 감소하는 대신 증가 하는 그러한 표본통로의 순서바뀜이 Y_i의 끝에서 일어나는 사상(Event). 즉 $A_i=\{Y_i<X_i,\ X_i-\Delta X_i \le Y_i\}$. 그림 1의 점 A는 원래 실선으로 표시되었던 표본통로가 점선으로 바뀌는 이러한 순서바뀜이 일어났음을 보이고 있다.

B_i : 평균 도착시간간격이 θ에서 θ-Δθ로 줄어들었으나, Y_i의 끝에서 표본통로의 순서바뀜이 일어나지 않는 사상. 즉 $B_i=\{Y_i<X_i-\Delta X_i\}$.

2.2 $dE[W_{0,0}(\theta,k)]/d\theta$의 표본통로 추정

먼저 모수 θ가 θ-Δθ로 바뀐다면 처음 바쁜 사이클동안 고객의 수가 s명이었던 시간의 합계에 어떤 영향을 주는가, 즉 $W_{0,0}(\theta,s)-W_{0,0}(\theta-\Delta\theta,s)$의 값이 어떻게 주어지는 가를 알아보도록 한다. 모수 θ가 변할 때 처음 바쁜 사이클동안 표본통로의 순서바뀜이 없는 경우, 단 한번 있을 경우 그리고 두번이상 있는 경우로 나누어서 이 값을 구하도록 하자.

먼저 한번도 순서바뀜이 없는 경우 X_i 형태의 표본통로들만 X_i에서 $X_i-\Delta X_i$로 변하므로 고객의 수가 s명일 때만을 고려하면 총 변화량은 $\sum_{t\in U(s)}\Delta X_t$이 된다.

다음으로 단 한번의 순서바뀜이 있는 경우, 이를테면 Y_i에서 단 한번의 순서바뀜이 있다 할 때, 첨자 i이후의 표본통로중 고객의 수가 s명이었던 시간의 합계는 처음에 $W_{n(i)-1,0}(\theta,s)$이었으나 θ가 θ-Δθ로 바뀐 후에 $W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)$이 되어 그 변화량은 $W_{n(i)-1,0}(\theta,s)$ - $W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)$으로 표시될 수 있다.

첨자 i에서의 표본통로는 순서바뀜을 통해 Y_i로부터 $X_i-\Delta X_i$로 바뀌게 되며 만약 Y_i에서 고객의 수가 s명이었다면 그러한 시간의 변화량은 $Y_i-(X_i-\Delta X_i)$가 된다. 첨자 i이전의 변화량은 순서바뀜이 없는 경우와 유사하게 생각하여 $\sum_{t\in U_i(s)}\Delta X_t$가 됨을 알 수 있다. 따라서 단 한번의 순서바뀜이 있는 경우 처음 바쁜 사이클동안 고객의 수가 s명이었던 시간의 총 변화량은 지시함수(Indicator Function) I(A)를 사용하여 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\{\sum_{t\in U_i(s)}\Delta X_t\}+\{Y_i-(X_i-\Delta X_i)\}I(n(i)=s)+W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s).$$

바쁜 사이클 동안 두번 이상의 순서바뀜이 있는 경우에도 같은 방법으로 생각하여 총 변화량은 위와 같은 식으로 표시된다. 그러나 이경우 $W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)$은 i이후에 한번 이상의 순서바뀜이 있은 표본통로를 나타낸다.

위에 서술한 내용을 종합하면 θ가 θ-Δθ로 변할때 처음 바쁜 사이클 동안 표본통로의 총 변화량은 다음과 같으며

$$\begin{aligned}W_{0,0}(\theta,s)-W_{0,0}(\theta-\Delta\theta,s)&=I(\text{순서바뀜 없음})\{\sum_{t\in U(s)}\Delta X_t\}\\&+\sum_{i\in D}I(Y_i\text{에서 단 한번의 순서바뀜})\\&\quad[\{\sum_{t\in U_i(s)}\Delta X_t\}+\{Y_i-(X_i-\Delta X_i)\}I(n(i)=s)+W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)]\\&+\sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D}I(Y_i\text{에서 처음 순서바뀜, }Y_j\text{에서 두번째 순서바뀜})\end{aligned}$$

$$[\{\sum_{t\in U_i(s)}\Delta X_t\}+\{Y_i-(X_i-\Delta X_i)\}I(n(i)=s)+W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)].$$

$\sum_{t\in U(s)}\Delta X_t=\sum_{t\in U_i(s)}\Delta X_t+\sum_{t\in V_i(s)}\Delta X_t$를 이용하여 공통인자인 $\sum_{t\in U(s)}\Delta X_t$를 밖으로 빼내면 다음과 같이 된다.

$$W_{0,0}(\theta,s)-W_{0,0}(\theta-\Delta\theta,s)=\sum_{t\in U(s)}\Delta X_t$$

$$+\sum_{i\in D}I(Y_i\text{에서 단 한번의 순서바뀜})$$

$$[-\{\sum_{t\in V_i(s)}\Delta X_t\}+\{Y_i-(X_i-\Delta X_i)\}I(n(i)=s)+W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)]$$

$$+\sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D}I(Y_i\text{에서 처음 순서바뀜, } Y_j\text{에서 두번째 순서바뀜})$$

$$[-\{\sum_{t\in V_i(s)}\Delta X_t\}+\{Y_i-(X_i-\Delta X_i)\}I(n(i)=s)+W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)].$$

θ가 척도모수(Scale Parameter)이므로 $\Delta X=(X/\ \theta)\Delta\theta$(Suri and Zazanis, 1988)를 이용하면 위의 식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$W_{0,0}(\theta,s)-W_{0,0}(\theta-\Delta\theta,s)=\sum_{t\in U(s)}(X_t/\ \theta)\Delta\theta$$

$$+\sum_{i\in D}I(Y_i\text{에서 단 한번의 순서바뀜})$$

$$[-\{\sum_{t\in V_i(s)}(X_t/\ \theta)\Delta\theta\}+\{Y_i-(X_i-\Delta X_i)\}I(n(i)=s)$$

$$+W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)]$$

$$+\sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D}I(Y_i\text{에서 처음 순서바뀜, } Y_j\text{에서 두번째 순서바뀜})$$

$$[-\{\sum_{t\in V_i(s)}(X_t/\ \theta)\Delta\theta\}+\{Y_i-(X_i-\Delta X_i)\}I(n(i)=s)$$

$$+W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)]. \tag{1}$$

(1)식의 각 항은 $C_{0,0}(\theta)$ 혹은 $C_{0,0}(\theta-\Delta\theta)$보다 작거나 같고, $\mu<\theta$의 가정하에서 $E[C_{0,0}(\theta)]<\infty$이며, $\mu<\theta-\Delta\theta$을 만족하는 모든 Δθ에 대해 $E[C_{0,0}(\theta-\Delta\theta)]<\infty$ 이므로 안정된(Stable) 대기행렬 $M/M/1$에서 Δθ가 충분히 작을 경우 식 (1)의 모든 항들이 유한의 기대값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 따라서 식 (1)의 양 변에 기대값을 취하고 Δθ로 나눈후 2.1절에 주어진 기호를 사용하여 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{E[W_{0,0}(\theta,s)-W_{0,0}(\theta-\Delta\theta,s)]}{\Delta\theta}=E[\sum_{t\in U(s)}(X_t/\ \theta)]$$

$$+\frac{1}{\Delta\theta}E[\sum_{i\in D}I(A_i)\{\prod_{j\in D-i}I(B_j)\}$$

$$[-\{\sum_{t\in V_i(s)}(X_t/\ \theta)\Delta\theta\}+\{Y_i-(X_i-\Delta X_i)\}I(n(i)=s)$$

$$+W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)]]$$

$$+\frac{1}{\Delta\theta}E[\sum_{i\in D}\ \sum_{i<j\in D}I(Y_i\text{에서 처음 순서바뀜, }Y_j\text{에서 두번째 순서바뀜})$$

$$[-\{\sum_{t\in V_i(s)}(X_t/\ \theta)\Delta\theta\}+\{Y_i-(X_i-\Delta X_i)\}I(n(i)=s)$$

$$+W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)]]. \tag{2}$$

다음으로, $\Delta\theta$가 0으로 갈 때 식 (2)의 각 항들의 극한값을 구하기 위하여 다음의 사상들을 소개한다. 시작점에서 고객의 수가 0인 대기체계 $M/M/1$에서 다시 고객의 수가 0이 될 때까지의 처음 바쁜 사이클을 생각하자. 처음 바쁜 사이클동안 써비스를 받고 시스템을 떠난 사람의 수를 $|D|$라고 표시하고, 써비스를 받기위해 도착한 사람의 수를 $|U|$라고 할 때, $|D|=|U|$가 된다. $k=1,2,3,\ldots,$에 대해 사상 $\{|D|=k\}$은 가능한 표본통로에 따라 다음과 같은 형태의 유한개인 $n(k)$개의 사상으로 다시 세분되어질 수 있다.

$$\{X_1\le Y_1,X_2\le Y_2,X_3>Y_3,\ldots,X_{2k}>Y_{2k}\}.$$

예를 들어, 사상 $\{|D|=3\}$은 가능한 표본통로에 따라 아래와 같이 두개의 사상으로 세분되어지며 이 경우 $n(3)=2$이다.

$$\{X_1\le Y_1,X_2\le Y_2,X_3>Y_3,X_4\le Y_4,X_5>Y_5,X_6>Y_6\}$$
$$\{X_1\le Y_1,X_2\le Y_2,X_3\le Y_3,X_4>Y_4,X_5>Y_5,X_6>Y_6\}.$$

편의상 사상 $\{|D|=k\}$를 H_k로 표시하고, H_k를 다시 세분한 $n(k)$개의 사상들을 각각 $H_{k1},H_{k2},\ .\ .\ .\ ,H_{kn(k)}$로 표시하며, H_{km}형태의 모든 사상들을 포함하는 가장 작은 시그마 앨지브라(σ-algebra)를 H로 표시하기로 하자. 여기서 각 H_{km} 들은 서로 배반사상 이며

$$H_k=\bigcup_{m=1}^{n(k)}H_{km}$$

이 된다. 이 논문에서는 안정된 대기체계 $M/M/1$을 생각하므로 집합

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} H_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{n(k)} H_{km}$$

은 측도(Measure)가 0인 집합을 제외하고 표본공간 Ω와 같게 된다.

Δθ가 0으로 갈때 식 (2)의 극한값을 구하기 위해, 위에 주어진 기호를 사용하여 먼저 다음의 기대값을 구한다.

$$E[\sum_{i\in D} I(A_i)\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)]$$
$$= E[\ E[\sum_{i\in D} I(A_i)\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)|H]\ ]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n(k)} E[\sum_{i\in D} I(A_i)\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)|H_{km}]P(H_{km}). \tag{3}$$

위의 식에서 D에 속하는 모든 i에 대해, 확률변수 $I(A_i)$는 확률변수 $\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)$와 H_{km}이라는 조건이 주어졌을 때, 서로 독립이므로

$$E[I(A_i)\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)\ |H_{km}]$$
$$= E[I(A_i)|H_{km}]E[\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)|H_{km}]. \tag{4}$$

A_i의 정의와 θ가 척도모수라는 사실을 이용하면

$$A_i = \{Y_i < X_i,\ X_i - \Delta X_i \le Y_i\} = \{Y_i < X_i,\ X_i - \frac{X_i}{\theta}\Delta\theta \le Y_i\}$$
$$= \{Y_i < X_i \le Y_i/(1-\frac{\Delta\theta}{\theta})\}$$

이므로 이를 이용하면, D에 속하는 모든 i에 대해 그리고 $P(H_{km}) \neq 0$인 모든 k,m에 대해 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$E[I(A_i)|H_{km}] = E[I(A_i)|Y_i<X_i] = E[I(Y_i<X_i \le Y_i/(1-\frac{\Delta\theta}{\theta}))|Y_i<X_i]$$
$$= \frac{P[Y_i<X_i \le Y_i/(1-\frac{\Delta\theta}{\theta})]}{P(Y_i<X_i)} = \frac{\mu\Delta\theta}{\theta(\mu+\theta-\Delta\theta)} \tag{5}$$

식 (4)와 (5)를 이용하면, 식 (3)은 다음과 같이 된다.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n(k)} E[I(A_i)|H_{km}]E[\sum_{i\in D}\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)|H_{km}]P(H_{km})$$

$$= \frac{\mu\Delta\theta}{\theta(\mu+\theta-\Delta\theta)}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n(k)} E[\sum_{i\in D}\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)|H_{km}]P(H_{km})$$

$$= \frac{\mu\Delta\theta}{\theta(\mu+\theta-\Delta\theta)} E[E[\sum_{i\in D}\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)|H]]$$

$$= \frac{\mu\Delta\theta}{\theta(\mu+\theta-\Delta\theta)} E[\sum_{i\in D}\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)] \tag{6}$$

식 (6)을 유도한 것과 같은 방법을 사용하여 다음 식을 얻을 수 있으며

$$E[\sum_{i\in D} I(A_i)\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)]$$

$$= \frac{\mu\Delta\theta}{\theta(\mu+\theta-\Delta\theta)} E[\sum_{i\in D}\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)]. \tag{7}$$

식 (6)과 (7)의 양변을 $\Delta\theta$로 나누고, 아래의 두 부등식을 이용하여 $\Delta\theta$가 0으로 갈 때의 극한값을 구하기로 한다.

$$\sum_{i\in D}\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s) \le |D|C_{0,0}(\theta) \le \frac{|D|^2 + C_{0,0}(\theta)^2}{2} \tag{8}$$

$$\sum_{i\in D}\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s) \le |D|C_{0,0}(\theta-\Delta\theta) \le \frac{|D|^2 + C_{0,0}(\theta-\Delta\theta)^2}{2} \tag{9}$$

먼저 $E[|D|^2] < \infty$, $E[C_{0,0}(\theta)^2] < \infty$ 이므로(Wolff, 1989), 식 (8)의 우변은 유한의 기대값을 갖는다. 따라서 식 (3)과 (6)의 양 변을 $\Delta\theta$로 나누고 Lebesgue 수렴정리(Royden, 1968)를 사용하여 $\Delta\theta$가 0으로 갈 때의 극한값을 구하면

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{1}{\Delta\theta} E[\sum_{i\in D} I(A_i)\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)]$$

$$= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\mu}{\theta(\mu+\theta-\Delta\theta)} E[\sum_{i\in D}\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)]$$

$$= \frac{\mu}{\theta(\mu+\theta)} E[\lim_{\Delta\theta\to 0}\sum_{i\in D}\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)-1,0}(\theta,s)] \tag{10}$$

이 되고, D에 속하는 임의의 j에 대해 $Y_j < X_j$이 성립하므로

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} I(B_j) = \lim_{\Delta\theta\to 0} I\left(\frac{Y_i}{1-\frac{\Delta\theta}{\theta}} < X_i\right) = I(Y_i < X_i) = 1$$

을 이용하면 식 (10)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\mu}{\theta(\mu+\theta)} E[\sum_{i\in D} W_{n(i)-1,0}(\theta,s)]. \tag{11}$$

다음으로 식 (9)에서 $\mu<\theta-\Delta\theta$을 만족하는 모든 $\Delta\theta$에 대해 $E[C_{0,0}(\theta-\Delta\theta)]<\infty$ 이고 또한 $\lim_{\Delta\theta\to 0} E[C_{0,0}(\theta-\Delta\theta)]=E[C_{0,0}(\theta)]$이 성립하므로(Wolff, 1989), 식 (7)의 양변을 $\Delta\theta$로 나눈 후 일반화 된 Lebesgue 수렴정리(Royden, 1968)를 적용하여 $\Delta\theta$가 0으로 갈 때의 극한값을 구하면 다음과 같다.

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{\Delta\theta}E[\sum_{i\in D} I(A_i)\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)]$$

$$=\frac{\mu}{\theta(\mu+\theta)}E[\lim_{\Delta\theta\to 0}\sum_{i\in D}\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta,s)]$$

$$=\frac{\mu}{\theta(\mu+\theta)}E[\sum_{i\in D} W_{n(i)+1,0}(\theta,s)] \tag{12}$$

다음으로 식 (2)의 우변의 첫째 항과 식 (10)-(12)를 통하여 구한 극한값을 제외하고 식 (2)의 나머지 항들이 $\Delta\theta$가 0으로 갈 때 그 극한값이 0이 됨을 보인다. 이를 위해 먼저 $I(A_i)$의 극한값을 구한다.

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} I(A_i)=\lim_{\Delta\theta\to 0} I\{Y_i<X_i \le Y_i/(1-\frac{\Delta\theta}{\theta})\}=I(Y_i=X_i)=0 \quad \text{a.e.} \tag{13}$$

식 (2)의 각 항은 $C_{0,0}(\theta)$ 혹은 $C_{0,0}(\theta-\Delta\theta)$의 상수배를 상한값으로 갖는다는 것을 알 수 있다. 예를 들어 A_i위에서 $Y_i<X_i$ 이므로

$$Y_i-X_i(1-\Delta\theta/\theta) \le Y_i-Y_i(1-\Delta\theta/\theta)=Y_i(\Delta\theta/\theta) \le (\Delta\theta/\theta)C_{0,0}(\theta) \tag{14}$$

또한 $C_{0,0}(\theta)$ 혹은 $C_{0,0}(\theta-\Delta\theta)$들은 유한의 기대값을 가지므로 Lebesgue 수렴정리를 사용하여 다음과 같이 극한값이 0이 됨을 보일 수 있다.

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{\Delta\theta}E[\sum_{i\in D} I(A_i)\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}\sum_{t\in V_i(s)}(X_t/\theta)\Delta\theta]$$

$$\le \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{\theta}E[\sum_{i\in D} I(A_i)\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}C_{0,0}(\theta)]$$

$$=\frac{1}{\theta}E[\lim_{\Delta\theta\to 0}\sum_{i\in D} I(A_i)\{\prod_{j\in D-i} I(B_j)\}C_{0,0}(\theta)]=0 \tag{15}$$

위와 유사하게

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{\Delta\theta}E[\sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D} I(Y_i\text{에서 처음 순서바뀜, } Y_j\text{에서 두번째 순서바뀜})$$

$$\{Y_i-X_i(1-\Delta\theta/\theta)\}I(n(i)=s)]$$

$$\leq \lim_{\Delta\theta\to 0} E[\sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D} I(Y_i\text{에서 처음 순서바뀜}, Y_j\text{에서 두번째 순서바뀜})\frac{Y_i}{\theta}]$$

$$\leq \lim_{\Delta\theta\to 0} E[\sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D} I(Y_i\text{에서 처음 순서바뀜}, Y_j\text{에서 두번째 순서바뀜})\frac{C_{0,0}(\theta)}{\theta}]$$

$$= E[\lim_{\Delta\theta\to 0} \sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D} I(Y_i\text{에서 처음 순서바뀜}, Y_j\text{에서 두번째 순서바뀜})\frac{C_{0,0}(\theta)}{\theta}]$$

$$\leq E[\lim_{\Delta\theta\to 0} \sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D} I(A_i)I(A_j)\frac{C_{0,0}(\theta)}{\theta}] = 0 \tag{16}$$

한편,

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{\Delta\theta} E[\sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D} I(Y_i\text{에서 처음 순서바뀜}, Y_j\text{에서 두번째 순서바뀜}) W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta, s)]$$

이므로, 식 (12)를 유도한 것과 같은 방법으로 위의 식이 다음과 같이 됨을 알 수 있다.

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{\Delta\theta}\left(\frac{\mu\Delta\theta}{\theta(\mu+\theta-\Delta\theta)}\right)E[\sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D} I(Y_i\text{이전에 순서바뀜 없음}, Y_j\text{에서 순서바뀜}) W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta, s)]$$

$$= \frac{\mu}{\theta(\mu+\theta)} E[\lim_{\Delta\theta\to 0}\sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D} I(Y_i\text{이전에 순서바뀜 없음}, Y_j\text{에서 순서바뀜}) W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta, s)]$$

$$\leq \frac{\mu}{\theta(\mu+\theta)} E[\lim_{\Delta\theta\to 0}\sum_{i\in D}\sum_{i<j\in D} I(A_j) W_{n(i)+1,0}(\theta-\Delta\theta, s)] = 0 \tag{17}$$

식 (2)의 나머지 항들에 대해서도 유사한 방법을 사용하여, $\Delta\theta$가 0으로 갈때 그 극한값이 0이 됨을 알 수 있으며, 지금까지 구한 식들 (2),(10)-(12),(15)-(17)을 종합하면 다음의 정리를 얻게된다.

정리 1. 평균 도착시간간격 θ, 평균 써비스시간 μ인 대기체계 $M/M/1$에서 $\mu<\theta$를 가정한다면,

$$\frac{dE[W_{0,0}(\theta,s)]}{d\theta} = \frac{1}{\theta}E[\sum_{i\in U(s)} X_i] + \frac{\mu}{\theta(\mu+\theta)}E[\sum_{i\in D}\{W_{n(i)-1,0}(\theta,s) - W_{n(i)+1,0}(\theta,s)\}] \tag{18}$$

위의 식에서 $n(i)=1$일 때, $W_{n(i)-1,0}(\theta,s)$은 0이라고 생각함.

정리 1의 식 (18)은 모두 표본통로를 관찰하므로 얻을 수 있는 값이다. 예를 들어,

$$E[\sum_{i\in D}\{W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,0}(\theta,s)\}]$$
$$=E[\sum_{i\in D}\{W_{n(i)-1,0}(\theta,s)-W_{n(i)+1,2}(\theta,s)\}]-E[|D|]E[W_{2,0}(\theta,s)] \quad (19)$$

여기서도 식 (18)에서와 유사하게 $n(i)=1$일 때, $W_{n(i)+1,2}(\theta,s)$은 0이라고 생각한다.

그림 1에서 $W_{n(3)-1,0}(\theta,3)=Y_6$이고 그림 1의 점선을 따르는 표본통로를 고려하면 $W_{n(3)+1,2}(\theta,3)=X_4+Y_8$이다. 마찬가지로 생각하여 식 (19)의 다른 항들도 표본통로를 관찰하여 얻을 수 있는 값임을 알 수 있다.

2.3 $dE[R_{0,0}(\theta)]/d\theta$의 표본통로 추정

바쁜 사이클동안 고객들의 시스템시간들의 합계 $R_{0,0}(\theta)$에 대해서는 위의 2.2절의 방법들을 사용하여 정리 1과 유사한 결과를 얻는다. 우리는 그 결과만 아래 정리 2에 적는다.

정리 2. 정리 1의 조건에 $E[|D|^3]<\infty$를 추가하면,

$$\frac{dE[R_{0,0}(\theta)]}{d\theta}=\frac{1}{\theta}E[\sum_{i\in U}n(i)X_i]$$
$$-\frac{\mu}{\theta(\mu+\theta)}\{E[\sum_{i\in D}2C_{n(i)-1,0}(\theta)]+E[|D|]E[R_{2,0}(\theta)]\}$$

3. 결론

이 논문에서는 조건부 기대값을 사용하여, 대기체계 $M/M/1$에서 고객의 수에대한 극한확률과 평균 시스템시간의 평균 도착시간간격 θ에 대한 민감도가 표본통로를 관찰하므로서 얻어질 수 있다는 것을 보였다. 또한 이를 증명하는 과정에서, 임의의 음이 아닌 정수 k에 대해 처음 바쁜 사이클동안 시스템 내에 고객의 수가 k명 이었던 시간의 합계와, 처음 바쁜 사이클동안 총 시스템시간의 기대치의 모수 θ에 대한 민감도가 둘다 IPA추정치와 그 이외의 값으로 명확히 표현된다는 것을 밝힘으로서 IPA방법이 일반적으로 적용될 수는 없다는 것을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] 박홍식(1992). M/M/1 Queue 에서 Busy Cycle 에 대한 민감도 분석, 『한국경영과학회지』, 제 17권 1호, 67-75.

[2] Cao, X.R. (1985). Convergence of Parameter Sensitivity Estimates in a Stochastic Experiment, *IEEE Trans Automatic Control*, Vol. 30, 845-853.

[3] Glasserman, P. (1988) Infinitesimal Perturbation Analysis of a Birth and Death Process, *Operations Research Letters,* Vol. 7, 43-49.

[4] Gong, W.B. and Ho, Y.C. (1987). Smoothed(Conditional) Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, *IEEE Trans Automatic Control,* Vol. 32, 856-866.

[5] Heidelberger, P., Cao, X.R., Zazanis, M.A. and Suri, R. (1988). Convergence Properties of Infinitesimal Perturbation Analysis Estimates, *Management Science,* Vol. 34, 1281-1302.

[6] Ho, Y.C. and Li, S. (1988). Extensions of Infinitesimal Perturbation Analysis, *IEEE Trans Automatic Control,* Vol. 33, 427-438.

[7] Royden, H.L. (1968). *Real Analysis,* Macmillan.

[8] Suri, R. and Zazanis, M.A. (1988). Perturbation Analysis Gives Strongly Consistent Sensitivity Estimates for the M/G/1 Queue, *Management Science,* Vol. 34, 39-64.

[9] Wolff, R.W. (1989). *Stochastic Modeling and the Theory of Queues,* Prentice-Hall.

[10] Zazanis, M.A. (1990). Infinitesimal Perturbation Analysis Estimates for Moments of the System Time of an M/M/1 Queue, *Operations Research,* Vol. 38, 364-369.

Sensitivity Analysis for Performance Measures in the $M/M/1$ Queue[3)]

Park, Heung Sik[4)]

Abstract

In this paper we consider the M/M/1 Queue with mean inter arrival time θ. We derive a sample path estimator for the derivative of steady state mean system time with respect to θ. We also show that the derived sample path estimate can be expressed as a sum of the IPA estimate and the other effect. We have a similar result for the derivative of limiting probability P_k with respect to θ.

---

3) This research was supported by the Dae-yang Research Fund, Sejong University, 1992.

4) Department of Mathematics, Sejong University, Kunja-Dong Seongdong-ku, Seoul,133-150, KOREA.