

베타-이항 분포에서 Gibbs sampler를 이용한 평가 일치도의 사후 분포 추정

엄종석¹⁾, 최일수²⁾, 안윤기³⁾

요약

평가자간 평가 일치도(measure of agreement)를 나타내는 모수 k 와 양성 반응 비 μ 를 지닌 베타-이항 분포 모형은 심리학 분야에서 많이 다루어지는 모형이다. 이 모형에서 k 에 대한 추정은 μ 가 0에 가까운 값을 가질 때 우도함수를 이용한 전통적 추론 방법의 적용이 어렵다. 본 논문에서는 이러한 문제를 Gibbs sampler를 이용한 Bayesian 분석 방법을 적용시켜 주변 사후 밀도 함수를 추정하였으며 이를 이용하여 Bayesian 추정값도 구하였다.

1. 서론

특정약물의 효과를 조사하기 위하여 그 약물투여의 효과가 발생하였는가 혹은 하지 않았는가의 이항결과를 갖는 실험을 수행한다고 하자. 그리고 실험대상인 각 동물의 태내에 있는 태아에 특정현상이 나타나면 그 약물의 효과가 있는 것으로 판정한다고 하자. 이와 같은 실험을 통해 얻은 자료를 설명하는 통계적 모형으로서 흔히 모형에 모수가 한 개인 이항분포나 포아송 분포를 사용할 수 있는데, Haseman과 Soares(1976)는 이러한 모형의 사용결과 실제자료와 상당히 불일치 하는 것을 보였다. 왜냐하면 실험대상인 각 동물마다 내재적으로 갖고 있는 차이를 고려하지 않았기 때문이다. 그래서 두개의 모수를 가진 여러 모형이 대안으로서 제시되었는데 베타-이항모형도 그 중에 하나이다.(Haseman과 Kupper, 1978)

다음과 같은 확률변수를 사용하여 좀더 명확히 베타-이항모형에 대하여 설명하자. 관찰 대상자 모집단으로 부터 n 명의 관찰 대상자를 임의로 선정하고, 각 관찰 대상자마다 k 명의 평가자 모집단으로 부터 R_i 명의 평가자(진단자)를 임의로 뽑았다. 그래서 만약 j 번째 평가자가 i 번째 관찰 대상자에게 양성이라 판정하면 $Y_{ij}=1$, 음성이라면 $Y_{ij}=0$ 라고 하자 ($j=1, \dots, R_i; i=1, \dots, n$). 또한 같은 관찰 대상자에 대해 다른 평가자 들에 의해 평가되는 것은 서로 독립이라 하자. 곧 $j \neq j'$ 에 대해 Y_{ij} 와 $Y_{ij'}$ 는 독립이다. 그러면 $Y_i = \sum_{j=1}^{R_i} Y_{ij}$ 는 i 번째 관찰 대상자에 대한 양성반응 수가 되며, 만약 임의로 뽑는 평가자가 관찰 대상자 i 에게 양성 평가를 할 확률을 p_i 라 하면 Y_i 는 모수가 (R_i, p_i) 인 이항분포에 따르게 된다. 확률 p_i 가 주어진 상태에서 Y_i 의 조건분포는 이항 분포이지만, Y_i 의 주변 분포는 혼합형이 된다. 그리고 확률 p_i 의 분포가 베타 분

1) (136-042) 서울시 성북구 삼선동 2가 한성대학교 전산통계학과.
2) (120-749) 서울시 서대문구 신촌동 연세대학교 응용통계학과 박사과정.
3) (120-749) 서울시 서대문구 신촌동 연세대학교 응용통계학과.

포인 경우 Y_i 는 베타-이항(Beta-binomial) 분포가 된다.

평가자간의 평가일치도(measure of agreement)를 나타내는 척도로서 κ 는 Cohen (1960) 이후 여러경우로 확대되어 정의되었으며 Kreamer(1979)는 모집단의 모수로 κ 를 정의하여 κ 에 영향을 주는 요인을 식별할 수 있게 되었다. Kreamer의 정의를 사용하여 베타-이항모형을 평가 일치도 κ 와 모집단에서 양성반응이 나타날 비율 μ 로서 표현할 수 있으며 κ 에 대한 각종 추론이 가능하다. 발병하는 경우가 드문 희귀병을 진단하는 경우에, 즉 μ 가 0에 가까울 때 의사의 오진 가능성이 높아지므로 이 경우 진단자의 평가(혹은 진단) 일치도 κ 에 대한 연구가 필요하다. 그러나 베타-이항모형에서 μ 가 0에 가까우면 κ 의 우도함수가 상수가 되거나 혹은 $-\infty$ 로 접근하므로 우도함수를 이용한 κ 에 대한 추론이 어려워 진다. 그래서 Bayesian 접근을 고려하였으며, 여기서 주변 사후 분포와 사후 평균을 구하는데 적분 문제가 발생한다. 이런 경우 Bayesian 분석에서 흔히 쓰는 방법으로 수치적 적분, Monte Carlo 방법, 그리고 해석학적 근사방법(analytical approximation)이 있다. 수치적 적분은 모수간의 상관관계가 있을 때 매우 비효율적으로 계산 시간이 많이 소요되며, 또한 식 (3.2)에서의 분모와 같은 다차원 적분에서는 정확성이 매우 떨어진다. Monte Carlo 방법은 importance 함수의 선택에 따라 그 결과가 달라지므로 좋은 importance 함수를 선택해야 하는 어려움이 있다.(Kloek과 Dijk,1978) 해석학적 근사방법으로 Lindley(1980)의 Laplace 근사방법과 Tierney와 Kadane(1986)의 Laplace 근사방법등이 있다. 이 방법들은 오차크기가 각각 $O(n^{-2})$ 와 $O(n^{-1})$ 로서 정규근사보다 정확하지만 표본크기가 커야 사용할 수 있다. Lindley 근사방법은 수치적으로 다모수(multiparameters)의 최우 추정값을 구해야 하며, Tierney와 Kadane의 근사방법은 다모수의 사후확률함수의 최빈값(posterior mode)을 구해야하는 어려움이 있다. 또한 정규화상수를 수치적으로 구해야하는 문제점이 있다.

본 연구에서는 적분문제를 해결하기 위해 최근 활발히 응용되는 Gibbs sampler(Smith와 Gelfand,1991)를 이용하였다. 본 논문의 목적은 소표본인 경우에도 Gibbs sampling의 반복횟수가 커질수록 추정된 사후확률함수가 사후확률함수로 분포적으로 수렴하며, 추정된 사후평균이 확률 1로 사후평균으로 수렴하는 특성을 이용하여, 베타-이항모형에서 μ 가 0에 가까울때 κ 에 대한 사후밀도함수를 추정하고 베이지안 추정값을 구하는데 있다. 또한 Gibbs sampler를 이용하여 구한 Bayesian 추정값을 수치적 적분으로 구한 Bayesian 추정값(Um,1991)과 비교하였다.

2. 베타-이항 분포 모형

각 관찰 대상자 i 에 대한 양성 반응 확률이 p_i 일 때 R_i 평가자의 양성 평가 수 $Y_i = \sum_{j=1}^{R_i} Y_{ij}$ 는 이항 분포 $B(R_i, p_i)$ 로써 다음과 같다.

$$f(y_i | p_i) = \binom{R_i}{y_i} p_i^{y_i} (1-p_i)^{R_i - y_i}, \quad i=1, \dots, n \quad (2.1)$$

그리고 n 개의 관찰 대상자의 양성 반응 확률 p_1, \dots, p_n 이 독립이고 동일한 분포함수 $\zeta(p)$ 를

갖는다면, 양성 반응 개수 Y_i 의 밀도 함수는 다음과 같다.

$$f(y_i) = \int_0^1 \binom{R_i}{y_i} p_i^{y_i} (1-p_i)^{R_i-y_i} d\xi(p_i) \quad , \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ y_i=0, \dots, R_i \end{matrix} \quad (2.2)$$

특별히 본 연구에서 살펴보고자 하는 $\xi(p_i)$ 가 모수 (α, β) 를 갖는 베타 분포에 따른다면 베타-이항 분포 $f(y_i)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$\xi(p_i) = \int_0^{p_i} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad , \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad \text{그리고} \quad 0 < p_i < 1. \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} f(y_i) &= \int_0^1 f(y_i|p_i) d\xi(p_i) \\ &= \binom{R_i}{y_i} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+R_i)}{\Gamma(\alpha+y_i)\Gamma(\beta+R_i-y_i)} \quad , \quad \begin{matrix} y_i=0, \dots, R_i \\ \text{그리고} \quad \alpha, \beta > 0 \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

이를 이용하여 Kreamer(1979)의 카파는 다음과 같이 유도 된다.

$$\begin{aligned} \mu &= E(p_i) = \alpha/(\alpha+\beta) \\ P_{chance} &= \mu^2 + (1-\mu)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)/(\alpha+\beta)^2 \\ P_{agree} &= E[p_i^2 + (1-p_i)^2] = 1 - 2\alpha\beta/(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) \\ \kappa &= \frac{P_{agree} - P_{chance}}{1 - P_{chance}} = \frac{1}{\alpha+\beta+1} \end{aligned}$$

위의 (μ, κ) 로써 식 (2.4)를 재구성하면 다음과 같은 베타-이항 분포가 유도된다.

$$f(y_1, \dots, y_n; \kappa, \mu) = \prod_{i=1}^n \left\{ \binom{R_i}{y_i} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \prod_{j=1}^{R_i} \left(1 + \frac{\kappa(j-1)}{1-\kappa} \right)^{-1} \right\} \quad , \quad y_i=0, \dots, R_i. \quad (2.5)$$

여기서

$$\begin{aligned} I_1 &= \begin{cases} 1 & y_i=0, \\ \prod_{j=1}^{y_i} \left(\mu + \frac{\kappa(j-1)}{1-\kappa} \right) & y_i \neq 0, \end{cases} \\ I_2 &= \begin{cases} \prod_{j=1}^{R_i-y_i} \left(1 - \mu + \frac{\kappa(j-1)}{1-\kappa} \right) & y_i \neq R_i, \\ 1 & y_i = R_i. \end{cases} \end{aligned}$$

또한 베타-이항 분포 모형에서 대수로그 우도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} l(\kappa, \mu) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^{y_i} \log \left(\mu + \frac{\kappa(j-1)}{1-\kappa} \right) + \sum_{j=1}^{R_i-y_i} \log \left(1 - \mu + \frac{\kappa(j-1)}{1-\kappa} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{R_i} \log \left(1 + \frac{\kappa(j-1)}{1-\kappa} \right) \right\} + constant \end{aligned} \quad (2.6)$$

여기서 μ 가 0에 가까우면 양성 반응을 나타낼 비율이 매우 작은 경우이므로 (a) $y_i=0, \forall i$ 가 되거나 혹은 (b) 기껏해야 한 개의 y_i 가 1이고 나머지는 0인 경우가 높은 가능성을 가지고 발생한다. 위의 (a)인 경우는 κ 에 대한 우도함수가 상수가 되어 최우 추정량이

의미가 없으며, (b)인 경우는 우도함수가 $-\infty$ 로 접근하므로 최우 추정량을 구할 수 없다는 어려움이 있다. 그래서 μ 가 0에 가까운 경우 Bayesian 분석 방법을 사용하여 k 에 대한 주변 사후 밀도함수 $f_1(k|y)$ 를 구하고 Bayesian 추정량으로써 $E(k|y)$ 를 구하고자 한다. 이 문제 역시 Bayesian 분석에서 흔히 발생하는 적분계산의 어려움을 갖고 있으므로 Gibbs sampler를 이용하여 주변 사후 밀도함수를 추정하고자 한다.

3. Gibbs Sampler를 이용한 추정.

Gibbs Sampler 방법은 Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller와 Teller(1953)에 의해 Monte-Carlo 형태의 알고리즘으로 소개된 후 Geman과 Geman(1984)이 영상 재구성문제에 사용하면서 Gibbs Sampler 라고 불렀다. 그 후 사후분포를 계산하는 알고리즘으로서 Tanner 와 Wong(1987)에 의해 발전된 후 Gelfand와 Smith(1990), Carlin, Gelfand와 Smith(1991), Zeger와 Karim(1991)등 많은 사람들이 Bayesian 계산을 수행하는데 사용하였다.

Gibbs sampler는 알고리즘으로 사용하기에 개념적으로 간단하고 쉬운 장점이 있어서 복잡한 다차원의 적분 문제를 포함하는 베이지안 계산에 주로 활용한다. 이를 간단히 소개하면 다음과 같다. 확률 변수 U_1, \dots, U_v 가 있다고 하자. 그리고 모든 i 에 대해 $P(u_i|u_j, j \neq i)$ 를 사용 가능(available)하다고 하자. 여기서 사용 가능이라 함은 $P(u_i|u_j, j \neq i)$ 로부터 조건 변수의 값이 주어졌을 때 표본 u_i 를 발생시킬 수 있음을 의미한다. 이와같이 주어진 상태에서 U_i 들의 결합 밀도 함수나 주변 밀도 함수를 다음과 같이 추정한다. 임의의 초기값 $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_v^{(0)}$ 에 대해

$$\begin{aligned} u_1^{(i+1)} &\sim f(u_1|u_2^{(i)}, \dots, u_v^{(i)}) \\ u_2^{(i+1)} &\sim f(u_2|u_1^{(i+1)}, u_3^{(i)}, \dots, u_v^{(i)}) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$u_v^{(i+1)} \sim f(u_v|u_1^{(i+1)}, \dots, u_{v-1}^{(i+1)}) \quad (i=0, \dots, l-1)$$

와 같이 표본을 뽑는 작업을 반복적으로 실행하면 $(u_1^{(l)}, \dots, u_v^{(l)})$ 에 도달하게 되며, 또한 이러한 실행을 m 회 반복하면 $((u_{1k}^{(l)}, \dots, u_{vk}^{(l)}), k=1, \dots, m)$ 을 얻게 된다. 이 때 주변 밀도 함수를 식 (3.1)과 같이 추정하며, $u_i^{(l)}$ 은 $l \rightarrow \infty$ 일때 U_i 에 분포적으로 수렴한다.

$$\hat{f}(u_i) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(u_i|u_j = u_{jk}^{(l)}, j \neq i) \quad i=1, \dots, v \quad (3.1)$$

또한 위의 lmv 개의 발생된 표본을 이용하여 T 가 u_1, \dots, u_v 의 측도가능함수일 때 기대값이 확률 1로서 수렴하는 추정값을 다음과 같이 구할 수 있다.(German과 German,1984, Tanner와 Wong,1987)

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l T(u_1^{(i)}, \dots, u_v^{(i)}) \rightarrow E(T(u_1, \dots, u_v)) \quad \text{a.s.}$$

위에서와 같이 Gibbs sampler를 사용하는데 필요한 조건은 조건부 분포 $P(u_i|u_j, j \neq i)$ 로부터 표본 추출을 할 수 있다는 것이다. 이 조건부 분포로부터 직접 표본을 추출할 수 있을 때 Carlin과 Gelfand(1991)는 conjugacy를 갖고 있다고 하였다. 그러나 흔히 베타-이항 모형에서 κ 와 μ 의 사후 밀도를 추정하는 문제에서와 같이 conjugacy를 갖지 않는 경우가 많으며, 최근에는 nonconjugacy 조건 분포로부터 표본 추출하는 방법으로 Acceptance-Rejection 방법, Weighted Bootstrap 그리고 Importance sampling 방법등이 제시되었다.(Smith와 Gelfand,1992, Wei와 Tanner,1990, Zeger와 Karlin,1991)

베타-이항 분포 모형에서 κ 와 μ 의 사후 밀도를 추정하는데 Acceptance-Rejection 방법을 사용한 Gibbs sampler를 적용시켜 보자. κ 와 μ 는 $\zeta(p)$ 의 hyperparameter로서 2차 단계 계층적사전확률함수(hierarchical prior)들을 다음과 같은 기준으로 설정하였다. 먼저 κ 에 대한 정보가 매우 적으므로 κ 에 대한 계층적사전확률함수는 noninformative prior인 $U(0,1)$ 을 설정하였고 μ 에 대한 계층적 사전 확률함수는 본 논문의 주관심 사항이 μ 가 작은 값이 나오는 경우이므로, $Beta(\alpha_0, \beta_0)$ 로 하여 α_0, β_0 를 조절함으로 이를 나타낼 수 있도록 하였다. 여기서 계층적사전확률함수는 베이지안 추정 결과에 미치는 영향이 매우 적으므로(Berger,1985), κ 와 μ 의 계층적사전확률함수들은 독립이라고 가정하에서 주변 사후밀도함수 $f_1(\kappa|y)$ 와 $f_2(\mu|y)$ 를 추정하고자 한다. 여기서 $f_1(\kappa|y)$ 는 다음과 같은 형태이지만, 이를 구하기 위해서는 κ 와 μ 에 대한 적분상 어려움이 따르게 된다.

$$f_1(\kappa|y) = \frac{\int_0^1 p(\kappa, \mu) f(y_1, \dots, y_n | \kappa, \mu) d\mu}{\int_0^1 \int_0^1 p(\kappa, \mu) f(y_1, \dots, y_n | \kappa, \mu) d\mu d\kappa} \quad (3.2)$$

여기서 $p(\kappa, \mu) = \frac{\Gamma(\alpha_0 + \beta_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\beta_0)} \mu^{\alpha_0 - 1} (1 - \mu)^{\beta_0 - 1}$, $0 < \mu, \kappa < 1$ and $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

사전 밀도함수 $p(\kappa, \mu)$ 의 모수 (α_0, β_0) 값이 각각 (1,1), (1,10), (10,1) 그리고 (1,100)인 4가지 경우에 대하여 $n=1, R=5$ 일 때 사후 밀도함수를 추정하였으며, 이를 이용하여 사후 평균을 구하였다. Gibbs sampler를 이용하여 y 값이 주어진 상태에서 다음과 같이 표본을 추출하였다. 임의의 초기값 $\kappa^{(0)} \sim U(0,1)$ 에 대해 Acceptance-Rejection 방법을 이용하여 다음 작업을 $l=50$ 이 되도록 반복 수행하였다.

$$\begin{aligned} \mu^{(i)} &\sim g_1(\mu|y, \kappa^{(i-1)}), \\ \kappa^{(i)} &\sim g_2(\kappa|y, \mu^{(i)}), \quad (i=1, \dots, l). \end{aligned}$$

위와 같은 작업을 $m=1000$ 회 반복하여 표본 $((\mu_k^{(50)}, \kappa_k^{(50)}), k=1, \dots, 1000)$ 을 얻어, 이를 식

(3.1)에 대입하여 사후 밀도 함수를 추정하였다. <표 1>과 <표 2>는 각각 Gibbs sampler와 수치적 적분을 사용하여 추정된 사후밀도함수를 이용하여 $E(k|y)$ 와 $E(\mu|y)$ 를 추정한 결과이다. <표 1>에서 추정량의 표준오차가 상당히 작으므로 추정값이 안정적임을 알 수 있다. 또한 <표 2>의 결과와 비교해 보았을 때 그 차이가 0.01보다 작아서 두 방법의 추정값이 서로 근사함을 알 수 있다. 그러나 <표 1>의 결과는 반복적인 표본추출을 통하여 얻은 값으로서 복잡한 함수에도 적용이 쉽고 또한 작업 수행시간이 짧다는 장점을 갖는다. <그림 1>은 $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 100)$ 인 경우 y 값에 따라 $\hat{f}_1(k|y)$ 를 그려본 것이다. 여기서 $y=0$ 인 경우 Gibbs sampler를 이용하여 $f_1(k|y)$ 를 추정한 결과 $U(0,1)$ 에 근접함을 알 수 있다. μ 의 사전밀도함수는 $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 1)$ 일 때 $U(0,1)$ 이고, $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 10)$, $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 100)$ 인 경우는 각각 $E[\mu] = 0.091$, $E[\mu] = 0.009$ 로써 오른쪽으로 기울어 지며 대체적으로 μ 는 0에 가까운 값을 갖는다. $(\alpha_0, \beta_0) = (10, 1)$ 일 때는 $E[\mu] = 0.909$ 로써 왼쪽으로 기울어 진다. <그림 2>에서 보면 $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 1)$ 일 때 $E(k|y)$ 는 대칭이고 y 의 끝값에서 높은 값을 나타내고 있다. 이는 양성 반응이 전혀 없거나 모두 양성 반응을 한 경우 평가 일치도의 정도가 높고 중간에서는 그 정도가 낮음을 알 수 있다. $(\alpha_0, \beta_0) = (10, 1)$ 일 때는 $y=4$ 에서 가장 작은 값을 갖으며 $y=4$ 를 중심으로 양쪽 방향으로 증가함을 알 수 있다. $E[\mu]$ 가 클 때는 양성 반응의 수가 큰 경우가 작은 경우보다 평가 일치도의 정도가 빈약함을 알 수 있다.

4. 결론

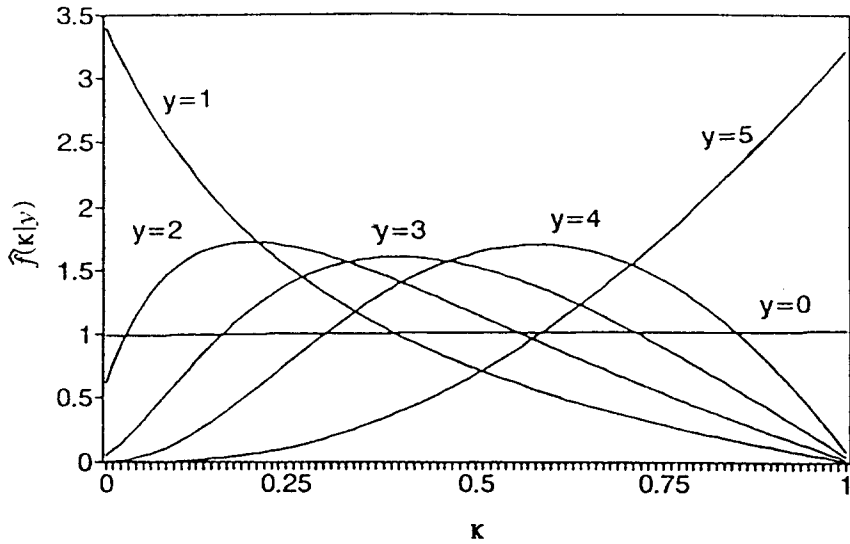
베타-이항 분포 모형에서 μ 가 0에 가까울 때 전통적인 우도함수에 의한 k 에 대한 통계적 추론이 어려우므로 본 논문에서는 Bayesian 분석 방법을 사용하여 k 에 대한 추론을 수행하였다. 여기서 Bayesian 분석을 수행하기 위하여 흔히 발생하는 적분문제를 해결하기 위해 Gibbs sampler 방법을 사용하였다. 우리가 다룬 문제는 nonconjugacy가 되어 직접 Gibbs sampler 방법을 사용할 수 없으므로 Acceptance-Rejection 방법을 이용한 후 Gibbs sampler 방법으로 주변 밀도함수를 추정하였다. 추정된 결과가 수치적 적분결과와 근사함을 알 수 있다. 추후 연구 과제토록 추정된 사후밀도함수를 이용하여 검정에 응용하는 방법과 일반 혼합모형에도 그 적용을 확장시키는 방법을 개발할 수 있다.

<표 1> n=1일 때 κ 와 μ 의 Gibbs sampler에 의한 Bayesian 추정값. ()안은 표준오차

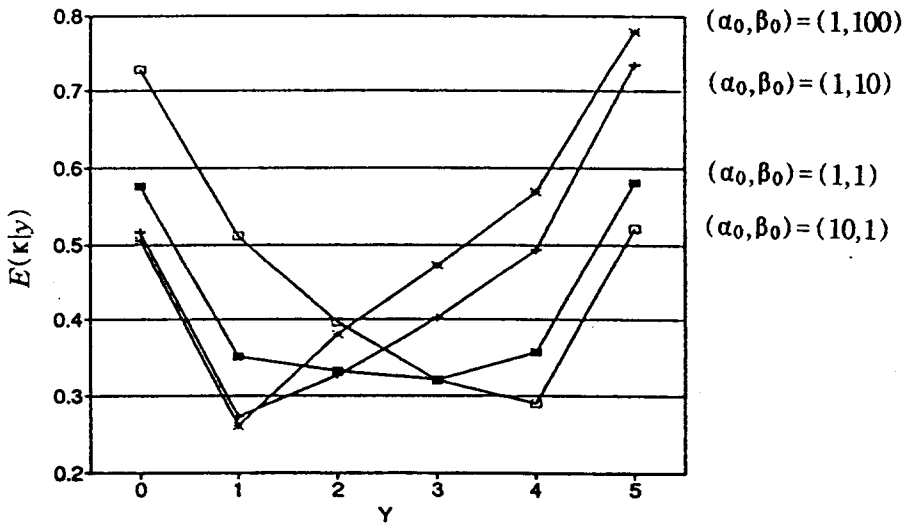
y	$E(\kappa y)$				$E(\mu y)$			
	$\alpha_0=1$ $\beta_0=1$	$\alpha_0=1$ $\beta_0=10$	$\alpha_0=1$ $\beta_0=100$	$\alpha_0=10$ $\beta_0=1$	$\alpha_0=1$ $\beta_0=1$	$\alpha_0=1$ $\beta_0=10$	$\alpha_0=1$ $\beta_0=100$	$\alpha_0=10$ $\beta_0=1$
0	0.5756 (0.0088)	0.5159 (0.0091)	0.5058 (0.0090)	0.7281 (0.0063)	0.2605 (0.0065)	0.0749 (0.0021)	0.0095 (0.0003)	0.8265 (0.0034)
1	0.3520 (0.0075)	0.2732 (0.0069)	0.2598 (0.0066)	0.5113 (0.0071)	0.3868 (0.0065)	0.1337 (0.0032)	0.0195 (0.0004)	0.8234 (0.0034)
2	0.3332 (0.0075)	0.3280 (0.0072)	0.3810 (0.0071)	0.3968 (0.0071)	0.4612 (0.0065)	0.1685 (0.0032)	0.0200 (0.0004)	0.8290 (0.0033)
3	0.3214 (0.0073)	0.4030 (0.0072)	0.4729 (0.0068)	0.3203 (0.0073)	0.5402 (0.0066)	0.1671 (0.0031)	0.0189 (0.0004)	0.8380 (0.0031)
4	0.3586 (0.0076)	0.4922 (0.0071)	0.5685 (0.0064)	0.2899 (0.0072)	0.6114 (0.0066)	0.1854 (0.0036)	0.0201 (0.0004)	0.8599 (0.0028)
5	0.5806 (0.0090)	0.7351 (0.0064)	0.7792 (0.0053)	0.5215 (0.0093)	0.7387 (0.0067)	0.1811 (0.0035)	0.0198 (0.0004)	0.9282 (0.0022)

<표 2> n=1일 때 κ 와 μ 의 수치적적분에 의한 Bayesian 추정값.

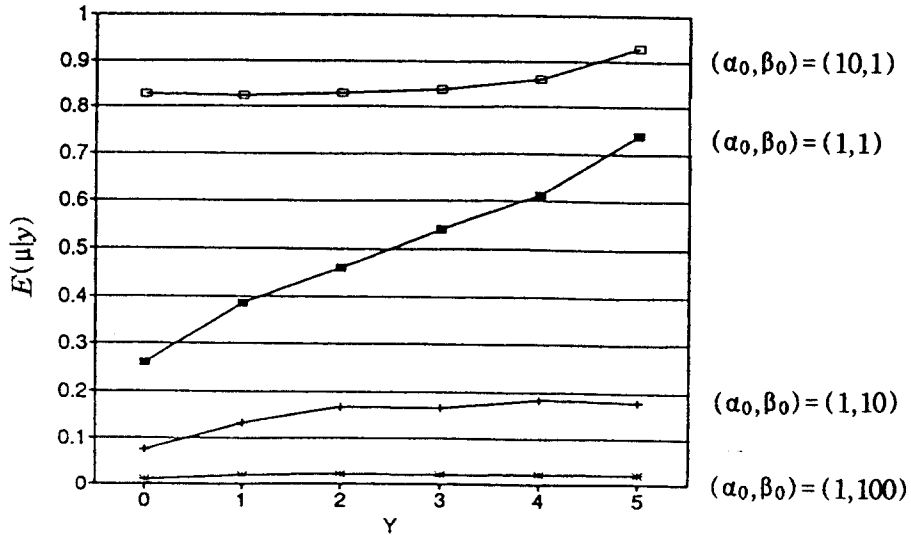
y	$E(\kappa y)$				$E(\mu y)$			
	$\alpha_0=1$ $\beta_0=1$	$\alpha_0=1$ $\beta_0=10$	$\alpha_0=1$ $\beta_0=100$	$\alpha_0=10$ $\beta_0=1$	$\alpha_0=1$ $\beta_0=1$	$\alpha_0=1$ $\beta_0=10$	$\alpha_0=1$ $\beta_0=100$	$\alpha_0=10$ $\beta_0=1$
0	0.5837	0.5237	0.5029	0.7389	0.2681	0.0750	0.0097	0.8222
1	0.3475	0.2803	0.2589	0.4989	0.3897	0.1360	0.0191	0.8222
2	0.3226	0.3220	0.3664	0.3966	0.4631	0.1600	0.0198	0.8266
3	0.3226	0.3966	0.4651	0.3220	0.5369	0.1734	0.0198	0.8400
4	0.3475	0.4989	0.5626	0.2803	0.6103	0.1777	0.0198	0.8640
5	0.5837	0.7389	0.7707	0.5237	0.7319	0.1777	0.0198	0.9245



< 그림 1 > $f_1(k|y)$ versus y when $R=5$



< 그림 2 > $E(k|y)$ versus y when $R=5$



<그림 3> $E(\mu|y)$ versus y when $R=5$

참 고 문 헌

- [1] Berger, J.O.(1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, New York: Springer-Verlag.
- [2] Carlin, B.P., and Gelfand, A.E.(1991). An Iterative Monte Carlo Method for Nonconjugate Bayesian Analysis, *Statistics and Computing*, Vol. 1, 119-128.
- [3] Carlin, B.P., and Gelfand, A.E., and Smith, A.F.M.(1991). Hierarchical Bayesian Analysis of Change Point Problems, *Journal of the Royal Statistical Society. Ser.C.*, Vol. 41, 389-405.
- [4] Cohen, J.(1960). A Coefficient of Agreement for Nominal Scales, *Educational and Psychological Measurement*, Vol. 20, 37-46.
- [5] Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M. (1990). Sampling-based Approaches to Calculating

- Marginal Densities, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 85, 398-409.
- [6] Geman, S. and Geman, D.(1984). Stochastic Relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian Restoration of Images, *IEEE,PAMI-6*, Vol. 6, 721-741.
- [7] Haseman and Soares(1976). The Distribution of Fetal Death in Control Mice and its Implications on Statistical Test for Dominant Lethal Effects, *Mutation research*, Vol. 41, 277-288.
- [8] Haseman and Kupper(1978). The use of a Correlated Binomial Model for the analysis of certain Toxicological Experiments, *Biometrics*, Vol. 34, 69-76.
- [9] Kloeck, T., and van Dijk, H.K.,(1978). Bayesian estimates of equation system parameters; an application of integration by Monte Carlo, *Econometrica*, Vol. 46, 1-19.
- [10] Kraemer, H.C. (1979). Ramifications of a population model for κ as a coefficient of reliability, *Psychometrika*, Vol. 44, 461-472.
- [11] Lindley, D.V.(1980). Approximate Bayesian Methods, in *Bayesian Statistics*, eds.J.M.Bernardo,M.H. Degroot, D.V.Lindley, and A.M.F.Smith, Valencia, Spain: University Press.
- [12] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. and Teller, E.(1953). Equation of State Calculations by Fast Computer Machines, *Journal of Chemical Physics*, Vol. 21, 1087-1092.
- [13] Smith, A.F.M and Gelfand, A.E.(1992). Bayesian statistics without tears: A sampling-resampling perspective, *The American Statistician*, Vol. 46, 84-88.
- [14] Tanner, M.A. and Wong, W.H. (1987). The calculation of posterior distributions by data augmentation, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, 528-550.
- [15] Tierney, L. and Kadane, J.B.(1986). Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 81, 82-86.
- [16] Um, J.S.(1991). Conditional inference about kappa in the Beta-binomial model, *PhD Thesis*, The Ohio State University.
- [17] Wei, G.C.G. and Tanner, M.A.(1990). Posterior Computations with Censored Regression Data, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 85, 829-839.
- [18] Zeger, S. and Karim, M.R.(1991). Generalized Linear Models with Random Effects: A Gibbs Sampling Approach, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 86, 79-86.

Posterior Density Estimation of Kappa via Gibbs sampler in The Beta-binomial Model

Jong Seok Um¹⁾, Il Su Choi²⁾, Yunkee Ahn³⁾

Abstract

Beta-binomial model, which is reparametrized in terms of the mean probability μ of a positive diagnosis and the κ measure of agreement, is widely used in psychology. When μ is close to 0, inference about κ become difficult because likelihood function becomes constant. We consider Bayesian approach in this case. To apply Bayesian analysis, Gibbs sampler is used to overcome difficulties in integration. Marginal posterior density functions are estimated and Bayesian estimates are derived by using Gibbs sampler and compare the results with the one obtained by using numerical integration.

1) Department of Statistics and Computer Science, Hansung University, Seoul, 136-042, KOREA.

2) Department of Applied Statistics, Yonsei University, Seoul, 120-749, KOREA.

3) Department of Applied Statistics, Yonsei University, Seoul, 120-749, KOREA.