

일반 등방경화규칙에 의거한 점토의 비등방 탄소성 구성모델

An Anisotropic Elasto-Plastic Constitutive Model Based on
the Generalized Isotropic Hardening Rule for Clays

이 승 래*¹
Lee, Seung-Rae
오 세 봉*²
Oh, Se-Boong

Abstract

To model the anisotropic behavior of soils in the case of reverse loading, an anisotropic hardening description is proposed on the basis of generalized isotropic hardening (GIH) rule. There is a core of the GIH rule in the allowance of the concept that the center of homology of isotropic hardening can be any proper stress states inside a yield surface. The plastic deformations could be represented for the condition of reverse loading, and an explicit constitutive relationship was formulated by utilizing a simple hardening function. The proposed hardening description has been compared with other anisotropic hardening models. For verification, three sets of triaxial test results have been predicted for the drained and undrained behavior of overconsolidated clays and K_0 consolidated clays.

요 지

역재하시에 나타나는 흙의 비등방거동을 모델하기 위하여, 본 연구에서는 일반 등방경화규칙에 근거한 비등방 경화이론을 개발하였다. 일반 등방규칙은 등방경화의 기준이 되는 중심응력텐서가 임의의 응력상태에서 존재할 수 있도록 허용하므로, 역재하과정에서 발생하는 소성변형을 예측할 수가 있다. 제안된 구성모델은 단순한 경화함수만을 이용하여 수식화되었고, 일반등방경화규칙에 적용된 개념을 기존의 비등방경화규칙과 비교하여 서술하였다. 검증을 위하여, 배수 및 비배수조건, 과압밀상태, K_0 압밀등의 초기조건이 상이한 점토에 대하여 관측된 삼축압축시험의 거동을 예측하였다.

1. 서 론

일반적으로 1차원적으로 압밀되는 점토지반

에서는 전단시 비등방거동을 나타내며, 이러한 비등방거동을 예측하는 것은 지반공학적인 측면에서 매우 중요한 문제라고 사료된다. 그러

*¹ 정회원, 한국과학기술원 토목공학과 부교수

*² 정회원, 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

나 점토를 비롯한 지반재료의 비등방성은 입자 구조 및 하중요인에 의하여 매우 복잡하게 일어나므로, 이를 표현하는 데는 매우 복잡한 수학적 기법이 요구된다.

많은 연구성과⁽¹⁻⁶⁾에 따르면 비등방경화 모델을 이용하여 초기응력조건, 응력경로, 비등방 압밀효과, 주응력축의 회전, 반복재하거동 등의 영향을 고려할 수 있었다. 대부분의 비등방 경화규칙은 등방이동 조합경화규칙(isotropic-kinematic combined hardening rule)으로 소성계수(plastic moduli)를 보간법(interpolation rule)에 의하여 수식화하는 기법을 적용하고 있다. 그런데 이러한 조합경화규칙들은 이동경화규칙을 기반으로 이론화되었기 때문에 등방경화규칙보다 수학적으로 복잡하고 더 많은 경화변수들을 필요로 하는 특성을 지니고 있다. 이러한 결점을 개선하기 위하여 등방경화를 기반으로 하는 비등방경화규칙을 제안하고자 한다.

본 연구에서는 등방경화를 일반화한 개념을 소개하고, 이에 관련된 비등방 경화규칙을 수식화하였다. 이러한 과정에서 적용된 핵심적인 개념은 항복면이 등방경화하는 상동중심(center of homology; 등방경화하는 항복면의 크기가 변화되는 기준점)이 임의의 응력상태에서 존재할 수 있다는 것이다. Pietruszczak와 Mroz⁽³⁾의 규칙 및 Dafalias⁽⁵⁾의 규칙과 개념적인 비교를 통하여, 제안된 경화규칙은 소성계수를 결정하기 위하여 보간법을 이용하지 않고 더욱 간편하게 적용될 수 있다는 것을 알 수 있다.

부호규약은 압축축이 양의 부호이고, 응력은 따로 설명이 없을 경우 유효응력이다. 축대칭 조건($\sigma_2 = \sigma_3$)에 대하여 체적응력 불변량(invariant) $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3) / 3$, 축차응력 불변량 $q = \sigma_1 - \sigma_3$ 이고 체적 및 축차변형을 불변량은 각각 $\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3$, $\epsilon_d = 2(\epsilon_1 - \epsilon_3) / 3$ 이다. 이론의 단순화를 위하여 미소변형률만을 고려하였다.

2. 등방경화규칙의 일반화 및 비등방 경화규칙에의 적용

2.1 등방경화규칙의 일반화

임의의 질점에서의 항복은 변형, 응력과 같은 관측변수(또는 외부변수, observed or external variable)나 잠재변수(또는 내부변수, hidden or internal variable)에 의하여 기술될 수 있다. 이 때 경화규칙(hardening rule)은 항복기준과 내부변수간의 관계를 규정하며, 내부변수의 증분식으로 나타나는 것이 일반적이다. 지반재료의 경화현상을 표현하기 위하여 제안된 경화규칙들은 크게 등방경화규칙⁽⁷⁾과 비등방경화규칙⁽¹⁻⁶⁾으로 구분될 수 있다. 등방경화규칙은 항복면의 형태가 변화하지 않고 크기가(일반적으로) 확장하며 소성거동을 일으키는 경화현상을 표현하는 반면, 비등방경화 규칙은 항복면의 형태, 상대적인 위치, 또는(등방경화를 포함한) 이들의 조합적인 변화로 경화가 야기되어 소성흐름(plastic flow)을 표현할 수 있다.

먼저 재료의 '등방성 및 비등방성'과 '등방경화규칙 및 비등방경화규칙'은 상호간에 일관된 개념이 아님을 주의해야 한다. 전자는 재료의 특성인데 반하여 후자는 항복을 서술하는 규칙이므로, 흙과 같은 비등방성 재료의 거동을 등방 또는 비등방경화규칙을 적용하여 예측할 수 있다. 등방성재료의 거동은 등방경화규칙을 적용하여 예측하는 것이 일반적인데, 이 경우에는 항복면의 중심이 응력축의 원점(이후 응력원점)에 있고 이 응력원점을 기준으로 항복면의 크기가 변화하여 소성변형을 일으키는 것으로 가정하곤 한다. 여기서 유의해야 할 점은 응력원점이 항복면의 중심(일반적으로 원형의 항복기준)인 동시에 항복면이 확장하는 기준 응력인 상동중심(center of homology)이라는 것이다.

하지만 상동중심이 항복면의 중심과 일치하는 것은 등방경화규칙을 준수하기 위한 충분조건일뿐 필요조건이 아니다. 즉 등방경화규칙을 준수하기 위하여 상동중심이 항복면의 중심과

일치할 필요는 없다. 반면에 등방경화규칙을 지키기 위한 필요조건은 소성거동이 일어날 때 항복면의 형태나 상동중심이 변화하지 않은 채로 항복면의 크기만이 확장되는 것이다. 그림 1에서 보여지듯이, 상동응력(homologue stress) ξ 를 상동중심이 나타나는 응력 상태로 정의하면, 상동응력은 항복면의 중심과 일치하지 아니하고 항복면상이나 그 내부에 존재할 수 있으며, 임의의 응력상태에서 항복면의 크기가 상동적으로 변화하는 기준이 된다.

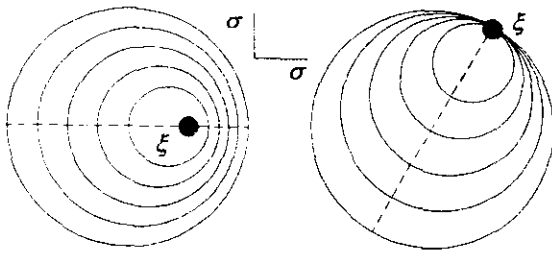


그림 1. 일반 등방경화규칙

이러한 경화규칙을 편의상 '일반 등방경화규칙', 약하여 GIH (*generalized isotropic hardening*)라고 정의하고자 한다. 따라서 앞서 언급한 등방성재료의 등방경화현상은 일반 등방경화규칙의 특수한 예로, 상동응력텐서 ξ 가 응력원점에 있고 항복면의 중심과 일치하는 경우이다. 이러한 등방경화의 일반화개념은 상동응력 ξ 를 임의의 응력상태에서 선정하여 재료의 비등방성을 표현할 수 있는 잠재력을 부여한다.

GIH의 관점에서 보면, Cam-clay 모델⁽⁷⁾의 타원형태의 항복면은 그림 2에서 보여지듯이 응력원점을 상동중심으로 항복면의 상동형태를 유지한 채로 등방경화함을 알 수 있다. 이때 항복면의 중심응력텐서 a 는 상동중심(여기서는 응력원점)과 일치하지 않고 항복면의 크기에만 의존하여 변화하는 변수이다. 그리고 항복면의 크기를 나타내는 변수 ρ 는 상동중심과 현 응력상태에 상응하는 항복면간의 상대적인 위치를 나타낸다. 따라서 GIH의 개념을 적

용하면 항복면의 크기를 나타내는 내부변수와 상동응력으로부터 항복면의 상대적인 위치는 자동적으로 결정되므로 ρ 만으로 경화함수를 간편하게 표현할 수 있고, 항복면의 확장에 의하여 항복면의 중심이 응력원점을 기준으로 이동하게 된다. 반면 Prevost⁽¹⁾는 Cam-clay 모델이 등방-이동 조합경화 규칙(isotropic-kinematic combined hardening rule)을 따르는 것으로 보고, 항복면중심에 대하여 항복면이 등방경화하는 동시에 항복면의 중심응력텐서가 적합한 이동경화규칙에 따라 이동한다고 해석하였다.

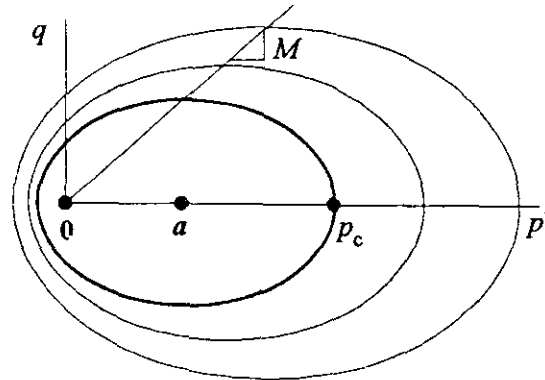


그림 2. Cam-clay모델의 경화거동

2.2 일반 등방경화개념을 적용한 비등방경화규칙

일반 등방경화규칙을 적용하기 위하여, 새로운 내부변수 θ 를 도입하고자 한다. 내부변수 θ 는 연속적인 재하과정에서는 변화하지 않지만 하중방향의 급격한 변화(예를 들면 재하-제하 과정)가 일어나면 변하는 변수이다. 이러한 하중방향의 급격한 변화는 Bauschinger 효과와 같은 재료의 거동에 크게 영향을 끼치는 것으로 보여지며, 내부변수 θ 는 불연속적인 형태로 변화하여 급격한 재하방향의 변화와 관련된 재료의 기억을 저장하는 세분기억 내부변수(discrete memory internal variable)로 사용할 수 있다. 본 연구에서는 GIH의 상동응력과

관련된 내부변수를 세분기억 내부변수 θ 로 선정하였다. 이러한 세분기억 내부변수에 대한 개념은 Dafalias와 Popov⁽⁸⁾에 의하여 최초로 채택되었지만 GIH의 개념에 상응하도록 적용한 것은 본 연구에서 처음으로 시도한 것이다.

주어진 항복면에 대하여 임의의 상동응력이 결정되면, 항복면의 상동응력에 대한 상대적인 위치를 규정하는 기준이 필요하다. 이러한 기준상태를 하나의 항복면으로 정의하면, 그 항복면을 기준면(reference surface)이라고 명명할 수 있다. 또 기준면에 대한 상동중심을 기준응력(reference stress) ρ 라고 정의할 수 있다.

GIH개념에 근거하여 재료의 비등방성 및 반복재하거동(hysteretic behavior)을 고려하기 위하여 다음과 같은 가정을 설정하였다.

가정 1: 기준면 $F=0$ 은 기준응력 ρ 에 대하여 등방적으로 경화하는 항복면으로 가정하며, 항복면과는 다르게 독립적인 경화함수에 의하여 경화가 일어난다.

가정 2: 내부변수 θ 는 재하방향이 급격하게 변화하는 순간의 응력상태에서 발생하며, 이는 일반적인 지반재료들의 경우 약간의 역재하만으로 비가역적인 변형이 나타나는 특성을 반영한 것이다.

기준면의 형태는 재료거동을 적합하게 표현할 수 있도록 선정해야 한다. 본 연구에서는 한계상태이론의 구성모델⁽⁷⁾에서 이용하는 타원 형태의 항복면을 이용하고자 한다. 따라서 기준응력 ρ 는 응력원점 0로 나타난다. 이 기준면은 응력원점을 기준으로 소성체적 변형률(plastic volumetric strain)의 변화에 따라 등방적으로 경화하며 상태경계면(state boundary surface)에서 연속적인 재하가 일어날 경우에는 항복면 역할을 할 수 있다.

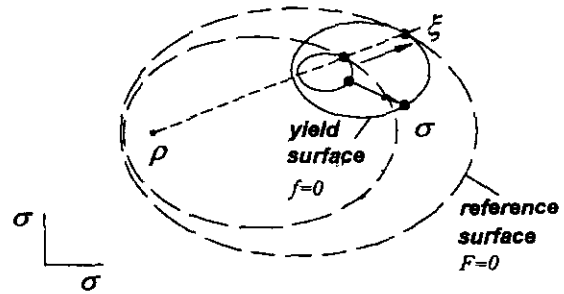
만일 역재하(reverse loading) 조건이 일어나면, 항복면 $f=0$ 은 새로운 내부변수 θ 에 대하여 경화가 일어나며, 가정 2에 의하여 소성 변형이 즉시 유발된다. 동시에 가정 1에 의거하여 유발된 소성변형은 기준면을 기준응력에 대하여 확장 및 축소시킨다. 이러한 항복면과

기준면의 복합적인 GIH 규칙은 상동응력 ξ 를 기준응력 ρ 로부터 멀어지거나 가까워지도록 한다(그림 3(a)). 따라서 상동응력이 변화하므로 항복면에 대한 비등방 경화규칙이 발생한다.

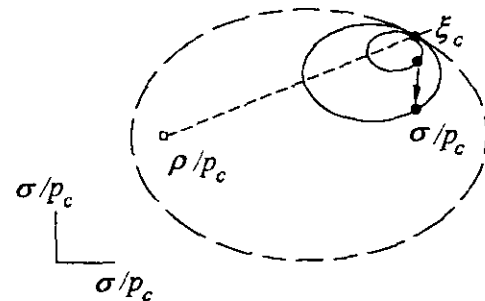
여기서 세분 기억 내부변수 θ 의 역할을 하는 표준상동응력(normalized homologue stress) ξ_c 를 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\xi_c = \xi / \rho_c \quad (1)$$

이 때 ρ_c 는 선행압밀응력으로 그림 2와 같이 기준면의 크기를 나타내는 변수로 사용된다. 표준상동응력 ξ_c 는 기준면에 대한 상동응력의 상대적인 위치를 나타내는 데 그림 3(b)에서 보여지듯이 연속적인 재하과정에서는 그 값이 변화하지 않는다.



(a) 상동응력 ξ 의 이동



(b) 표준상동응력 ξ_c 의 고정위치

그림 3. 항복면과 기준면의 복합적인 경화거동

그림 4 (a)에서는 K_0 압밀과정동안 기준면이 기준응력인 응력원점에 대하여 등방적으로

경화하는 현상을 볼 수 있다. 이 때 기준면은 각 응력상태에 상응하는 항복면의 역할을 한다. 가정 2에 따라서 규준상동응력 ξ_c 는 재하방향이 급격하게 변화하는 응력상태에서 바로 발생하는데, 예를 들어 1축팽창(그림 4 (b)의 A 점)이나 팽창이후 압축전단(그림 4 (c)의 B 점)에서 볼 수 있다. 그림 4 (b)와 (c)에서는 유효응력이 p_c 로 규준화되었기 때문에 기준면의 크기가 고정되었으며 무차원량인 규준상동응력 ξ_c 가 응력장에서 나타날 수 있었다. 기준면 내부에서의 연속적인 재하과정(그림 4 (b)의 ABE경로 및 (c)의 BC경로)에서는 GIH거동에 의하여 소성변형이 발생하므로, 기준면의 크기(p_c)가 기준응력 p 를 기준으로 변화한다. 특히, 상동응력 ξ 는 기준면의 변화에 따라 변한다.

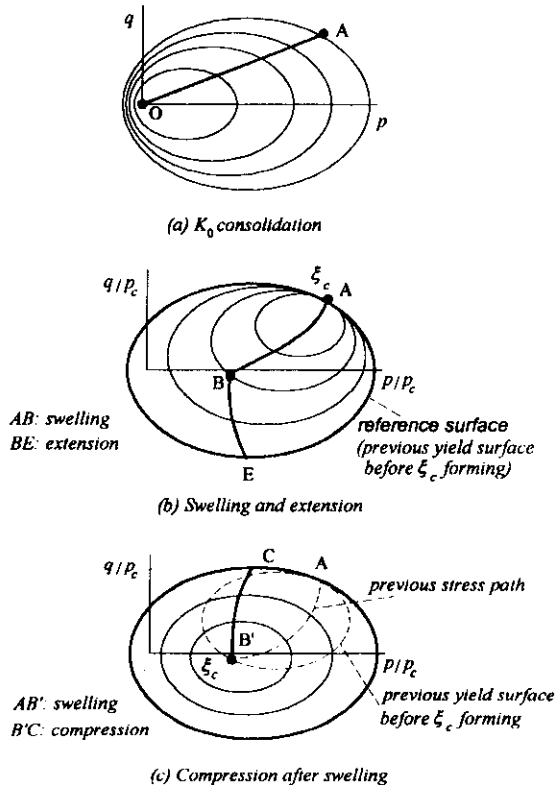


그림 4. 규준상동응력의 유발

재하방향의 급격한 변화는 다음과 같이 수식화할 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{\sigma}} \leq 0 \quad (2)$$

시간효과, 온도, 화학적 작용 등의 주변 환경 요인에 의하여 규준상동응력 ξ_c 가 발생할 수도 있지만 본 연구에서는 물리적인 하중요인에 대해서만 고려하였다.

내부변수 ξ_c 가 형성되면, 항복면은 한 점으로부터 시작되고 이 때의 항복면의 법선방향을 결정할 수 없다. 기준면상에서 중립재하(neutral loading, $(\partial F / \partial \underline{\sigma}) \cdot \underline{\dot{\sigma}} = 0$)가 발생할 때도 동일한 효과가 일어난다. 한편 연속조건(condition of continuity)⁽⁹⁾에 의하면, 항복면을 따라 일어나는 중립재하는 소성변형을 유발할 수 없다. 따라서 기준면상의 중립재하 동안에는 ξ_c 의 형성이 소성거동을 유발하지 않는다. GIH 개념의 일관성을 확보하기 위하여, 항복면이 한 점으로 나타나는 재하조건에서는 소성변형이 유발될 수 없다. 즉 기준면을 따라 발생하는 중립재하시에는 항복면은 한 점인채로 기준면을 따라 ξ_c 를 형성하며 이동한다.

기준면 내부의 중립재하시($(\partial F / \partial \underline{\sigma}) \cdot \underline{\dot{\sigma}} = 0$)에도 ξ_c 가 형성되고 항복면이 즉시 하나의 점으로 나타난다. 따라서 항복면 내부 또는 항복면을 따라서 발생하는 역재하가 존재할 수 없다. 특히 항복면이 외부요인에 의하여 확장되기 이전에는 소성거동이 발생하지 않는다.

규준상동응력 ξ_c 의 불연속적인 형성은 불연속적인 이동경화규칙으로 고려할 수 있다. 가정 2의 규준은 Phillips⁽¹⁰⁾의 이동경화규칙과 유사한데, 이 규칙은 응력변화의 방향에 따라 항복면이 이동하게 된다. 규준상동응력의 불연속적인 형성과 GIH 개념에 의하여 복합적인 경화현상이 고려될 수 있으며 복잡한 이동경화함수의 사용이 불필요하다.

2.3 GIH의 기하학적인 특성

기준면과 잠재된 항복면간의 기하학적인 특성은 상동응력과 함께 그림 5에 나타나 있다.

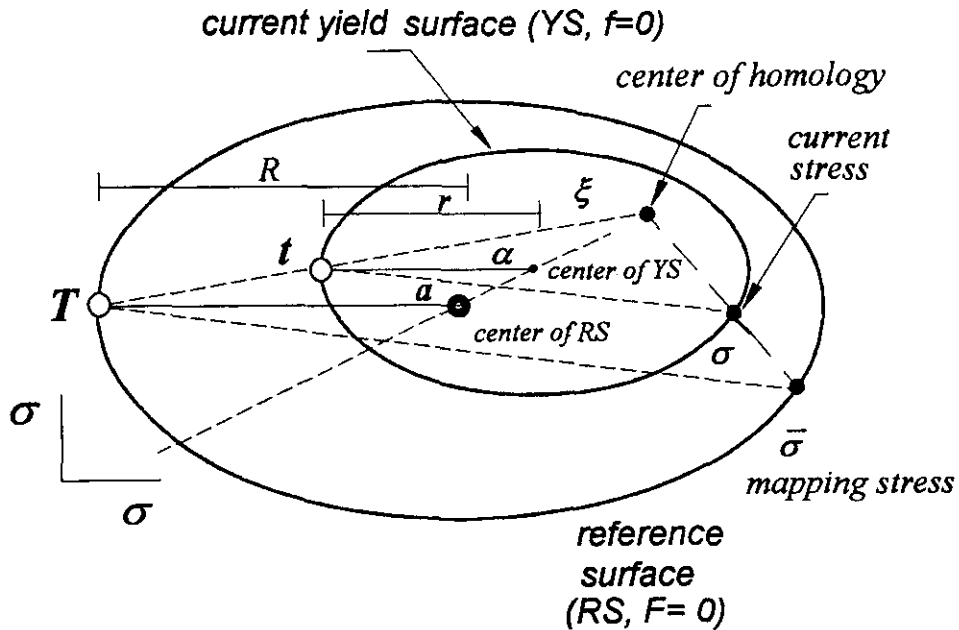


그림 5. 상동응력에 대한 기준면과 항복면의 기하학적 특성

임의의 응력축을 따라 나타나는 기준면 타원의 반경(예를 들어 체적응력축 변경)을 R 이라 하고 항복면의 반경을 r 이라고 정의한다.

사상응력 $\bar{\sigma}$ 는 σ 를 상동응력 ξ 로부터 기준면 상에 사상한 응력상태로 정의된다. 이 때 일정한 상수 k 에 대하여 $(\bar{\sigma} - \xi) = k(\sigma - \xi)$ 의 관계를 나타낸다. 마찬가지로 기준면 중심텐서 a 는 항복면 중심텐서 α 를 상동응력 ξ 로부터 방사 확장한 것으로 간주될 수 있으며, $(a - \xi) = k(\alpha - \xi)$ 이다. 그림 5에 나타난 삼각비례에 의하여 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$k = \frac{\|\bar{\sigma} - \xi\|}{\|\sigma - \xi\|} = \frac{\|T - \xi\|}{\|t - \xi\|} = r/R \quad (3)$$

여기서 t 는 반경 r 선과 항복면간의 교점응력이고 T 는 t 의 사상응력이다. 따라서 상동응력 ξ 에 상응하는 기준면상의 사상응력 $\bar{\sigma}$ 는 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$\frac{\bar{\sigma} - \xi}{R} = \frac{\sigma - \xi}{r} \quad (4)$$

또한 항복면과 기준면의 중심응력은 다음 관

계가 성립된다.

$$\frac{a - \xi}{R} = \frac{\alpha - \xi}{r} \quad (5)$$

현재 응력상태에서 항복면상의 법선방향은 사상응력에서 기준면의 법선방향과 일치함을 쉽게 유도할 수 있다. 즉,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (6)$$

3. 기존의 구성모델들과의 비교

소성변형률의 증분식은 관련유동규칙(associated flow rule)을 가정하여 일관조건(consistency condition)을 적용함으로써 구할 수 있다.

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{\underline{n} \cdot \underline{\sigma}}{K_p} \underline{n} \quad (7)$$

여기서 $\underline{n} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$ 이고,

$$K_p = - \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^2}$$

윗 식에 나타난 소성계수(plastic modulus) K_p 를 구하기 위하여, 적합한 경화함수를 선정하여 항복규준함수의 응력텐서 및 소성변형률텐서에 대한 미분값을 구하여야 한다. 그러나 비등방경화모델에서는 이런식으로 경화함수를 통하여 소성계수를 구하는 것이 매우 어렵다. 왜냐하면, 단순한 경화함수에서 사용되는 내부변수조차도 관측되지 않는 변수이며, 등방-이방 조합(isotropic-kinematic combined)경화와 같은 복잡한 경화규칙에서는 많은 경화변수들을 사용하기 때문에 경화함수를 결정하기 어렵기 때문이다. 따라서 Dafalias^(4, 5)나 Pietruszczak와 Mroz⁽³⁾는 사상규칙(mapping rule) 또는 보간법(interpolation rule)을 사용하여 경화함수를 통하지 않고 소성계수를 구하였다. 이 때 사상응력과 현응력상태간의 거리를 변수로 소성계수를 보간하였으며, 자세한 내용은 여러 문헌보고^(3, 4, 5)에 설명되어 있다.

역재하과정의 거동에서는, 소성계수를 보간하여 결정하는 것이 매우 간편하고 효과적이다. 반면, 일반적으로 이용되는 비등방 경화모델에서는 고전적인 소성론에 근거하지 않았기 때문에 경화거동에 대한 수식들의 물리적인 의미가 결여될 수밖에 없다. 그러나 예측치의 정확도를 개선하는 것보다는 고전 소성이론 및 경화현상의 물리적 의미를 부여하는 것이 현단계에서는 더욱 필요하다고 할 수 있다. GIH의 개념을 적용하면, 고전적인 소성이론을 위배하지 않고 비등방 경화규칙을 상동응력 ξ 의 형성만으로 간편하게 구현할 수 있다. 더우기 경화변수로 항복면의 크기만 사용되므로 보간법을 사용할 필요가 없다.

역재하 거동을 표현할 수 있는 능력을 검증하기 위하여, GIH 규칙을 다른 비등방 경화규칙을 사용한 구성모델과 비교하였으며, 본 논문의 후반부에 구체적인 구성관계식이 유도되었다. 단순화를 위하여 항복면의 형태를 원형으로 가정하고 압밀면(consolidation surface: Pietruszczak and Mroz⁽³⁾) 및 경계면(bounding surface: Dafalias^(4, 5))의 크기가 일정한

경우에 대하여 비교하였다.

Mroz 등⁽²⁾과 Pietruszczak와 Mroz⁽³⁾는 흙에 대한 비등방 경화모델을 제안하였는데, 이 모델은 등지항복면(nesting yield surfaces)의 개념과 소성계수의 보간법을 채택하였다. 그림 6에서 보여지듯이, O점에서 압밀이 완료된 이후에 경로 OA는 압밀면 $F=0$ 내부로 향한다. 이 때 등지항복면 $f=0$ 은 응력점을 따라서 이동한다. A점 이후에 응력경로가 다시 역방향으로 바뀌면 응력 역재하면(stress reversal surface) $f_L=0$ 이 형성되고, 2번째 역재하가 일어나고 역재하 응력상태 A가 기억된다. 이 역재하과정은 $f=0$ 과 $f_L=0$ 이 B'점에서 일치할 때까지 계속되고, 결국은 2번째 역재하과정과 응력 역재하점 A에 대한 기억이 소멸된다. 응력경로 B'B가 압밀면에 도달할 때까지 진행되면 O점에 대한 기억이 회복된다.

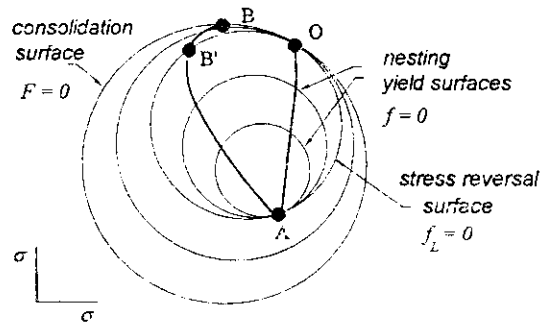


그림 6. 등지항복면의 개념

이러한 등지항복면의 개념은 GIH규칙에 의하여 설명될 수 있다. 역재하과정 OA경로에서, O점을 기준으로 GIH가 발생한다. O점에서는 상동응력 ξ 가 발생하고 그림 6의 압밀면은 기준면의 역할을 한다. 2번째 역재하 AB가 진행되면, A점에서 상동응력이 생성하고 상응하는 기준면은 응력 역재하면 $f_L=0$ 과 같이 된다. 등지항복면 모델은 압밀면과 응력 역재하면이 모두 기준면이 될 수있고 상동응력이 형성되는 것은 GIH 개념의 가정 2와 동일하다. 따라서 등지항복면은 그들이 이동한다는 것을

제외하고는 기준면 내부의 GIH 항복면과 거의 동일하다.

경계면모델의 개념 및 방사 사상규칙(radial mapping rule)은 Dafalias^(4, 5)에 의하여 제안되었다. 소성 내부변수인 β 와 사상응력 $\bar{\sigma}$ 는 그림 7에서 나타나며, $\bar{\sigma}$ 는 β 와 σ 를 연장한 선과 경계면과의 교점에서 나타난다.

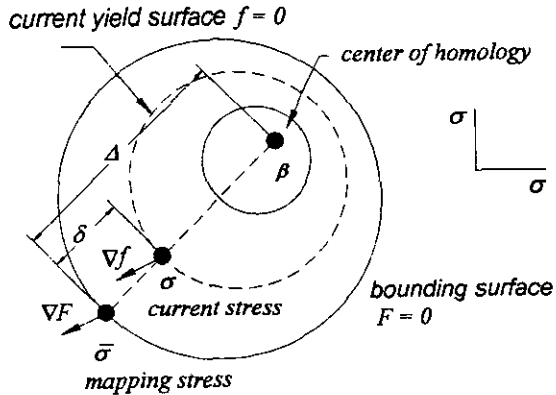


그림 7. 경계면 모델 개념

사상응력 $\bar{\sigma}$ 는 다음과 같은 관계를 갖고 있다.

$$\bar{\sigma} = \frac{R}{r}(\sigma - \beta) + \beta \quad (8)$$

이 때 R/r 은 경계면과 항복면의 크기의 비이고 그림 7에서는 $\Delta/(\Delta - \delta)$ 과 동일하다. 또 경계면과 항복면의 사상응력과 현 응력에 대한 법선벡터는 동일하다.

식 (8)에 있는 경계면에 대한 사상응력의 특성과 그림 7의 법선방향벡터가 일치하는 것은 각각 식 (4)와 (6)에 있는 GIH의 기하학적인 특성과 일치한다. 단 기준면과 상동응력 ξ 는 경계면과 배압(back stress) β 에 상응하는 개념이다. 이러한 개념의 일치는 GIH 개념을 적용한 구성관계가 경계면 모델이 표현할 수 있는 재료의 거동을 나타낼 수 있음을 의미한다. 상동응력의 생성은 Dafalias⁽⁵⁾의 배압에 대한 이동경화규칙으로 일반화될 수 있지만 본 연구에서는 다루지 않았다.

GIH규칙과 등지면 모델 및 경계면 모델과

의 개념적인 일치점들은 기존의 모델의 능력과 장점을 손상하지는 않지만, GIH규칙을 적용한 구성관계가 역재하분야의 재료거동을 표현할 능력이 있다는 것을 보장할 수 있다.

4. GIH에 근거한 비등방 경화모델

4.1. 기준면과 항복면

기준면과 항복면은 주응력장에서 타원형으로 선정되었고 다음의 식 (9)와 (10)과 같은 식을 나타낸다.

$$F = (p - sp_c)^2 + q^2 / m^2 - d^2 p_c^2 = 0 \quad (9)$$

$$f = (p - \alpha)^2 + (q - \beta)^2 / m^2 - r^2 = 0 \quad (10)$$

여기서 s 는 한계상태간격비(spacing ratio of critical state)이다. 기준면의 중심응력 a 의 좌표는 p - q 평면에서 $(sp_c, 0)$ 이다. d 는 기준면의 p 축 반경을 p_c 로 나눈 재료계수이다. p 축 반경에 대한 q 축 반경의 비는 m 으로 Ms/d 로 구할 수 있으며, M 은 한계상태 강도⁽⁷⁾이다. 항복면의 p 축 반경은 r 이고, α 와 β 는 중심응력에서 α 의 p - q 성분이다. 추가적으로 한계상태 간격비는 정규압밀상태 시료의 비배수 삼축시험결과로부터 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.⁽¹¹⁾

$$s = \frac{2}{M} \frac{S_u}{p_c} \frac{1}{1-\kappa} \quad (11)$$

여기서 S_u 는 비배수 전단강도이고 계수 λ 와 κ 는 $\ln p$ - e 관계에서 각각 정규압밀선과 팽창선의 경사이다.

압축 및 인장전단과 심한과압밀상태의 거동

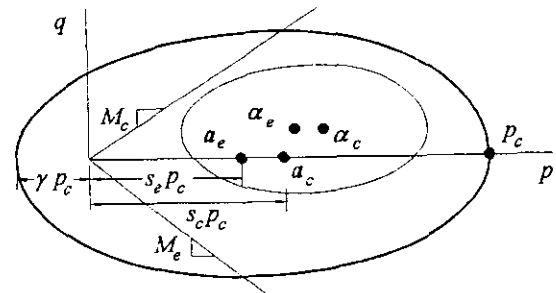


그림 8. 기준면과 항복면

을 적합하게 고려하기 위하여 4개의 4등분 타원을 연결하여 그림 8과 같이 기준면과 항복면으로 선정하였다.

따라서 한계상태 강도 M 과 간격비 s 는 압축측에서는 M_c, s_c 이고 인장측에서는 M_t, s_t 이다. 또 γ 는 그림 8에서 보여지듯이 기준면이 p 축의 음(-)측에서 만나는 점을 나타내는 계수이다. 기준면은 4개의 4등분 타원을 이용하여 매끄러운 폐곡선을 이루는데, 압축측 타원의 중심텐서 a_c 는 좌표가 $(s_c p_c, 0)$ 이고 인장측 중심 a_t 는 좌표가 $(s_t p_t, 0)$ 이다.

항복면은 기준면과 동일한 형태를 가지고 있으며, 항복면의 중심은 다음과 같이 결정될 수 있다.

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_c \quad \text{if } q \geq \beta \quad (12a)$$

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_t \quad \text{if } q < \beta \quad (12b)$$

여기서 중심 텐서의 체적 및 축차축 성분은 각각 (α_c, β) , (α_t, β) 이다.

나머지 계수들은 항복면 중심응력에 대한 현 응력상태의 조건에 의하여 구분된다.

$$d = 1 - s, m = Ms / (1 - s), p \geq \alpha \text{인 경우} \quad (13a)$$

$$d = \gamma + s, m = Ms / (\gamma + s), p < \alpha \text{인 경우} \quad (13b)$$

이때 M 과 s 는 압축전단 및 인장전단에 따라 다른 값을 가지므로 계수 d 와 m 은 하나의 기준면에 대하여 4개의 값을 가지게 된다.

4.2 기준면과 항복면의 경화함수

기준면에 대한 경화함수는 Cam-clay모델⁽⁷⁾과 같이 다음 식으로 나타낸다.

$$\dot{p}_c = \frac{1+e}{\lambda-\kappa} p_c \dot{e}_c \quad (14)$$

이때 간극비 $e = e_a - (\lambda - \kappa) \ln p_c - \kappa \ln p_0$ 이고 e_a 는 체적응력이 1일 때의 간극비이다. 소성 체적변형률이 발생하면 기준면이 확장하거나 축소한다.

지반재료는 축차변형에 대하여 매우 연약한 거동이 나타나므로, 역재하과정에서 GIH에 의한 항복면의 크기는 소성 축차변형률에 의하여 나타날 수 있다고 가정하였다. 즉,

$$\dot{\varepsilon}_d^p = \int d\varepsilon_d^p = \frac{a}{m^2 \|\underline{\xi}_c\|^2} \frac{(cr_c/dp_c)^b}{1 - cr_c/dp_c} \quad (15)$$

이 때의 적분범위는 역재하과정을 통하여 규정하고, 소성 축차변형률속도 $d\varepsilon_d^p = \sqrt{2/3} \|d\varepsilon_{kk}^p - d\varepsilon_{kk}^e/3\|$ 이다. 계수 a, b 및 c 는 경화에 대한 재료계수들이고 계수 c 는 1.0보다 크지 않다. $c = 1.0$ 일 경우에는 항복면이 한계상태에 도달해야 기준면과 만난다. m 과 $\underline{\xi}_c$ 는 경화함수가 압축 및 인장전단, 과압밀상태에 따라 각각 다르게 적용되도록 영향을 준다.

항복면의 경화함수가 단지 소성변형률 텐서의 체적부분에 의해서만 지배되므로 등방상태에서의 팽창시 거동을 모델하는 데 있어서 유의해야 할 점이 있다. 삼축 등방팽창시험시, 기준상동응력은 기준면의 내부로 향하는 응력경로의 시발점에서 발생한다. 이 때 아무런 축차변형률이 발생하지 않으므로 식 (15)의 r_c 는 마치 중립재하시의 거동처럼 크기가 0인 채로 확장하지 않는다. 따라서 앞서 논의한 연속조건을 만족시키기 위하여 등방팽창시에는 탄성 체적응력만이 나타난다.

4.3 구성관계식의 수식화

일관조건(consistency condition)에 의하여 다음 식이 성립한다.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \dot{\underline{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial r_c} \dot{r}_c = 0 \quad (16)$$

이 때 소성 변형률속도 텐서는 윗 식으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{(\partial f / \partial \sigma) \cdot \underline{\sigma}}{H} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } H = & -\frac{\partial f}{\partial r_c} \left(\frac{\partial r_c}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial \underline{\varepsilon}_c^p} \frac{\partial f}{\partial p} \right. \\ & + \frac{\partial r_c}{\partial \underline{\varepsilon}_c^p} \frac{\partial f}{\partial q} \left. \right) - \frac{\partial f}{\partial \underline{\alpha}} \left(\frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial \underline{\varepsilon}_c^p} \right. \\ & \left. \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial r_c} \left(\frac{\partial r_c}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial \underline{\varepsilon}_c^p} \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial r_c}{\partial \underline{\varepsilon}_c^p} \frac{\partial f}{\partial q} \right) \right) \end{aligned}$$

세부사항은 부록에 유도되어 있다.

탄성 체적 및 전단계수 K, G 는 체적응력에 선형적으로 비례하는 것으로 가정하면,

$$K = \frac{1+e}{\kappa} p, \quad G = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \quad (18)$$

이고, ν 는 포아송비(Poisson's ratio)이다. 식 (17)과 (18)로 부터, 다음 식이 유도된다(부록 참조).

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K(1-Kf_p^2/\bar{H}) & -3KGf_p f_{q_0}/\bar{H} \\ -3KGf_p f_{q_0}/\bar{H} & 3G(1-3Gf_{q_0}^2/\bar{H}) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{\epsilon}_d \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\text{여기서 } \bar{H} = H + Kf_p^2 + 3Gf_{q_0}^2.$$

비배수 삼축시험시의 구성관계는 식 (19)로 부터 쉽게 구할 수 있는 데, 단지 $\dot{\epsilon}_v=0$ 이라는 조건만 추가하면 된다. 일축압밀시의 거동은 변형률 구속조건 $2\dot{\epsilon}_v - 3\dot{\epsilon}_d=0$, 배수삼축시험은 응력 구속조건 $\dot{q} - 3\dot{p}=0$ 을 만족하도록 하여 예측할 수 있다. 증분형태의 구성식 (19)는 적합한 구속조건과 함께 변형률 조절 프로그램으로 선형적인(explicit) 적분으로 풀 수 있다. 이제 필요한 재료계수만 구하면 구성거동을 예측할 수 있게 된다.

5. 등방 및 비등방압밀 점토의 거동 예측

재료 계수들은 실내시험을 통하여 구하고, 등방 및 비등방 압밀된 점토의 삼축시험을 대상으로 모델링하였다. 사용된 실험자료는 Loudon⁽⁷⁾, Henkel⁽¹²⁾, Parry와 Nadarajah⁽¹³⁾의 자료로서 계수들은 표 1에 나열했다. a, b 는 항복면의 경화계수인데, 작은 범위내의 값으로 나타났으며, c 는 1.0으로 적용하였다.

5.1 등방압밀된 Kaolin의 비배수 전단거동

그림 9와 10에서는 다양한 과압밀비에 따른 등방압밀시료의 거동이 제안된 모델에 의하여 예측되었다. 그림 9에서는 등가압력(equivalent pressure) p_0 로 유효응력을 표준화하여, 한계상태 토질역학이론에서와 같이 예측된 경로가 유일한 점에서 비배수전단강도에 도달하는 것

표 1. 사용된 재료계수

계 수	Loudon ⁽⁷⁾	Henkel ⁽¹²⁾	Parry & Nadarajah ⁽¹³⁾
(a) Yield surface and reference surface			
M_c	0.95	0.95	0.8
M_e	-	-	-0.81
s_c	0.443	0.443	0.49
s_e	-	-	0.37
γ	0.30	0.10	0.10
(b) Hardening function for reference surface and elasticity			
λ	0.24	0.093	0.325
κ	0.045	0.035	0.060
ν	0.25	0.25	0.20
e_c	2.375	0.908	3.327
(c) Hardening function for yield surface			
a	0.00020	0.00030	0.00005
b	1.8	1.8	1.6

을 볼 수 있다. 여기서 등가압력 p_0 는 현 간극비에 상응하는 정규압밀선상의 유효등방응력을 의미한다. 표준화된 응력경로들은 잘 예측되었으며, 특히 미약한 과압밀(lightly overconsolidated) 상태에서는 매우 정확하게 예측하고 있다. 반면, 심한 과압밀(heavily overconsolidated) 상태의 경우에는 경로의 형태가 실제보다 곡선이 유연하고 예측된 강도가 한계상태에서 나타나지 않아 예측치와 일치할 수 없었다.

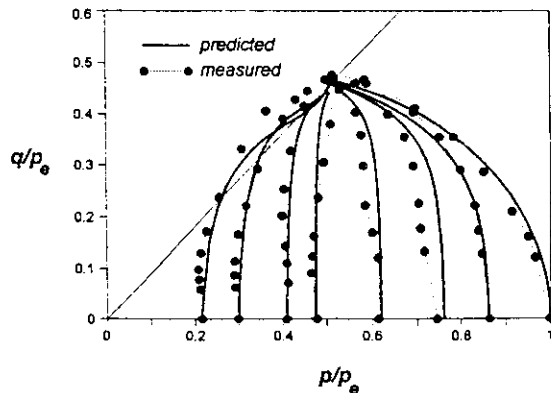
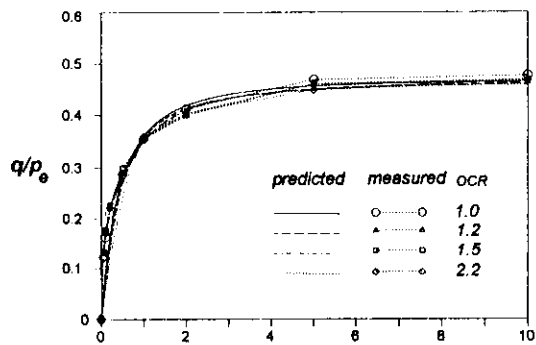
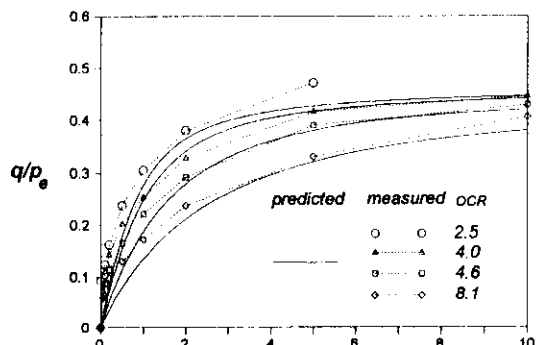


그림 9. 등방압밀된 Kaolin의 비배수 응력경로

그림 10 (a), (b)에서 보여지듯이, 응력-변형률관계 모든 과압밀비에 대하여 예측치와 예측치가 잘 일치하고 있다. Roscoe와 Burland⁽⁷⁾에 의하면, $p/p_e - q/p_e$ 평면상에서 미약한 과압밀상태의 시료는 등축차변형률선(contours of equal shear distortion)이 p/p_e 축과 평행하게 나타난다. 이러한 현상은 등가압력에 의하여 규준화된 구성관계는 과압밀비에 상관없이 일치하게 나타나는데, 그림 10 (a)에서 제안된 모델에 의하여 매우 잘 예측할 수 있었다.



(a) Wet side



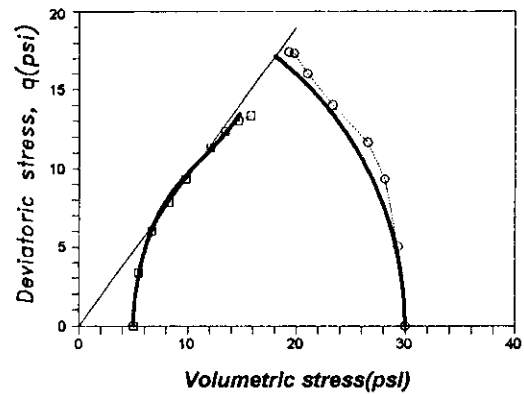
(b) Dry side

그림 10. Kaolin의 응력-변형률 관계

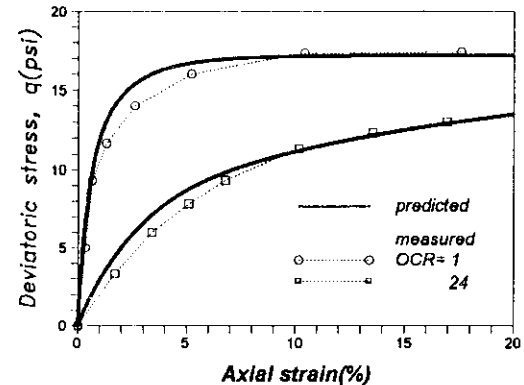
5.2 등방압밀된 Weald clay의 비배수 전단거동

그림 11 (a)에서는 재성형된 Weald clay⁽¹²⁾의 정규압밀상태 및 과압밀상태 거동에 대하여

비배수 삼축시험의 응력경로를 실측치와 매우 유사하게 예측하였다. 한편, 그림 11 (b)를 보면 예측된 응력-변형률관계는 실험치와 대체로 정확하게 일치하였다.



(a) Undrained stress paths



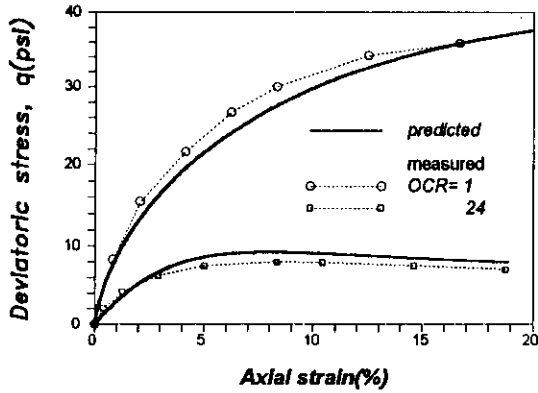
(b) Stress-strain relationships

그림 11. Weald clay의 비배수거동

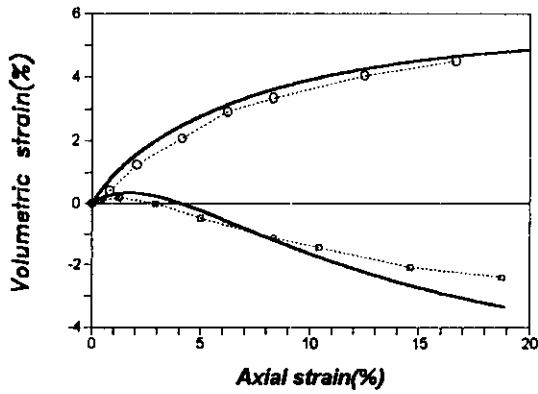
동일한 초기조건에서 Weald clay의 배수거동을 그림 12와 같이 모델링하였으며, 재료계수들은 비배수시험과 동일하게 사용하였다. 응력-변형률관계 및 체적변형이 정규압밀 및 과압밀상태에 대하여 보여진다.

심한 과압밀상태의 응력-변형률관계에서 나타나는 연화(softening) 현상을 모델링할 수 있었으며, 체적팽창도 예측되었다. 결국 제안된 모델은 점토의 배수 및 비배수 거동을 일관

되게 예측할 수 있었다.



(a) Stress-strain relationships



(b) Volume change behavior

그림 12. Weald clay의 배수거동

5.3 비등방 압밀된 Kaolin의 삼축시험

그림 13에는 K_0 팽창 및 이후의 비배수전단 응력경로가 나타나 있다.⁽¹³⁾ Roscoe와 Burland⁽⁷⁾의 보고처럼 한계상태이론은 K_0 값을 과대 평가하는 데, 이로 인하여 발생하는 오차를 없애기 위하여 팽창이전의 응력을 계측치로부터 구하였다. p - q 평면상의 팽창경로가 잘 예측되었고, 이후의 압축 및 인장 전단경로는 비선형적인 형태를 잘 포착할 수 있었다. 또 비배수 전단강도가 모두 계측치와 잘 일치하고 있다. 따라서 제안된 구성모델은 K_0 -압밀 점토의

다.

인장측에서는 실제의 경로와 상당한 차이를 나타내는 데, 이는 일축압밀로 인한 비등방성 때문인 것으로 사료된다. 따라서 등방압밀시의 거동을 적합하게 나타내도록 선정된 기준면 및 항복면으로는 비등방적인 거동을 잘 표현할 수 없다. Anandarajah와 Dafalias⁽⁶⁾, Pietruszczak와 Mroz⁽³⁾는 회전되거나 이동된 항복기준을 제시하였는데, 본 연구에서는 다음의 연구과정으로 미루고자 한다.

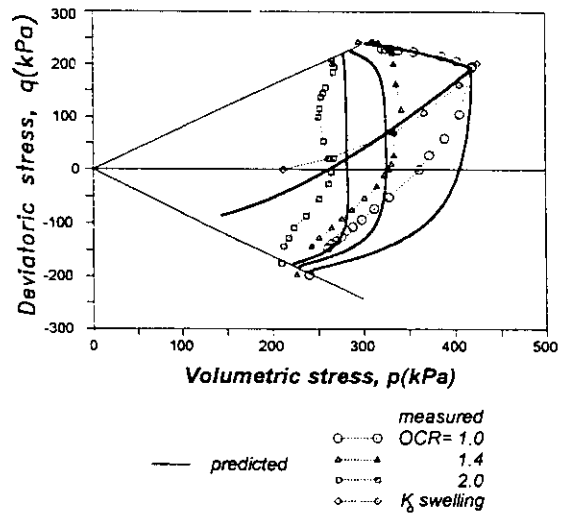


그림 13. Kaolin의 비배수 응력경로

비배수 응력경로를 일관되게 표현할 수 있었으며 응력변형률관계는 대체로 적합하게 예측되었으리나 인장측에 대해서는 변형률이 약간 과소평가되었다(그림 14 참조). 실제의 거동과 같이 인장측에서는 10% 이상의 대변형률시에 파괴가 일어나는 것으로 예측하였다.

6. 토의사항

식 (15)의 경화함수와 관련된 재료계수 c 는 항복면이 파괴이전에 기준면과 만나게 하는 역

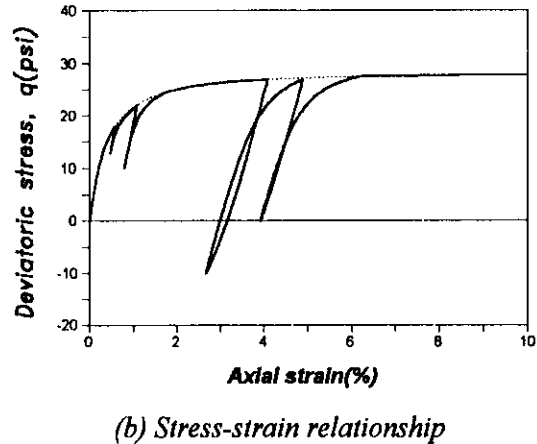
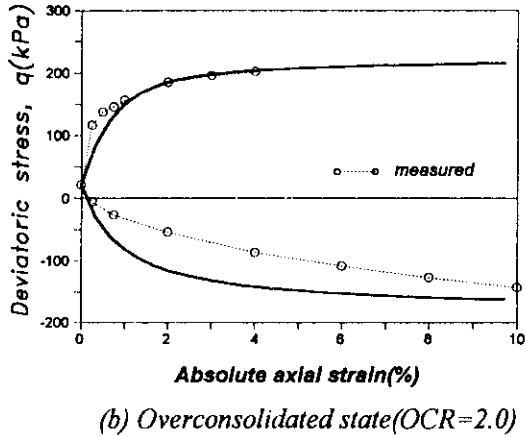
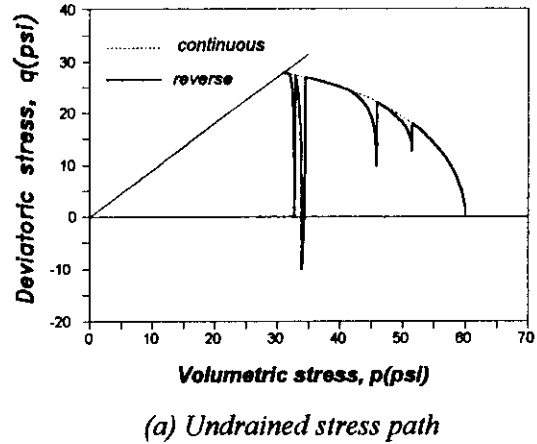
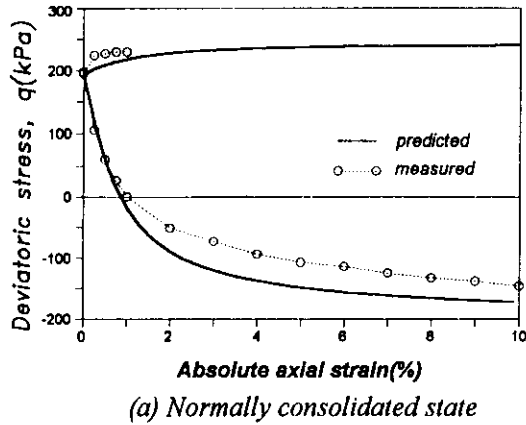


그림 14. Kaolin의 응력-변형률 관계

그림 15. $c=0.9$ 일 경우의 역재하 거동

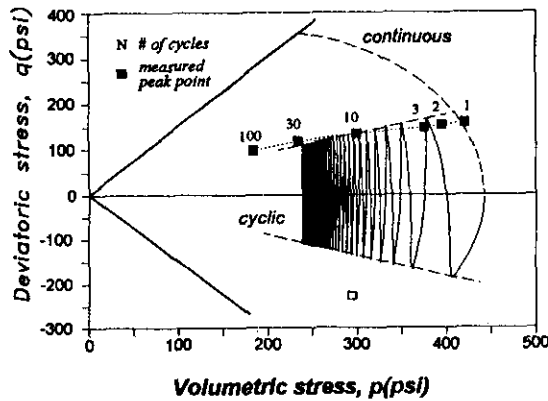
할을 한다. 본 연구에서는 $c=1.0$ 을 사용하였으며 항상 한계상태 파괴에 도달하였을 때 기준면과 항복면이 일치하게 된다. 그림 15에서는 항복면이 파괴에 도달하기 이전에 기준면과 만나고, 이후에 기준면의 항복에 의하여 소성 변형이 일어나는 거동을 $c=0.9$ 인 경우를 통하여 보여준다. 이 때 사용된 재료계수들은 표 1의 Loudon과 Wroth의 실험자료값들과 동일하다.

예측된 거동은 파괴 이전에 기준면에 도달하였고 응력경로 및 응력-변형률 관계의 일부분은 연속재하시의 관계와 일치함을 볼 수 있다. 특히 그림 15 (b)에 나타난 응력-변형률 관계는 Roscoe와 Burland⁽⁷⁾에 의하여 보고된 상태

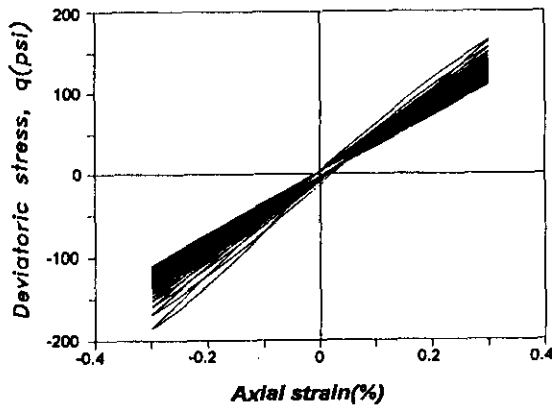
경계면 내부에서의 항복을 잘 보여주고 있다.

그림 16에서는 비배수 변형률조절 삼축시험을 통한 반복재하시의 실험거동과 예측치를 나타내고 있다. Taylor와 Bacchus⁽¹⁴⁾의 실험치로부터 구한 재료계수는 다음과 같다: $\lambda=0.142$, $\kappa=0.022$, $e_s=1.827$, $M_c=M_e=1.5$, $s_c=s_e=0.476$, $a=0.00025$, $b=1.6$, $c=1.0$, $\nu=0.25$. 축방향 변형률은 $\pm 0.3\%$ 로 가해졌다.

변형률 진폭은 실제거동과 유사하게 응력경로상에서 선형적으로 감소됨을 예측할 수 있었다(그림 16 (a)). 한계상태 체적응력에 도달함에 따라 유효 체적응력이 감소하는 거동을 예측할 수 있었고 그림 16 (b)의 응력-변형률



(a) Undrained stress path



(b) Stress-strain relationship

그림 16. 반복재하거동

관계는 접선계수가 점차로 감소하는 경향을 나타내었다.

지반 재료의 동적인 거동에 적용하기 위하여, 본 구성모델은 변형이 진행됨에 따라 일어나는 강도감소 효과⁽²⁾(material degradation effects) 및 주응력축의 회전효과를 고려할 수 있도록 수정되어야 한다. 하지만 본 연구에서는 반복재하시의 정확성을 개선하는 부분은 다루지 않았다.

본 연구자들은 제안된 구성모델을 이용하여 지반공학 문제의 수치해석을 진행하고 있다. 특히 K_0 -압밀된 지반의 소성거동을 비교적 잘 반영할 수 있다고 판단된다. 그런데 비선형 유한요소해석에서 요구되는 반복적 알고리즘

에 대하여, 구성관계의 응력적분은 불명료 알고리즘⁽¹⁵⁾(implicit stress integration technique)을 적용해야 한다. 본 연구의 후속편에서는 사다리꼴 규칙(trapezoidal rule)에 의한 응력적분을 수행하고, K_0 -압밀 점토에서의 지반거동을 수치적으로 해석하게 될 것이다.

7. 결 론

본 연구에서는 일반 등방경화규칙(generalized isotropic hardening rule)을 적용하여 비등방경화 구성모델을 제안하였다. 등방경화의 상동중심은 역재하가 발생하는 응력상태에서 생성되며, GIH의 비등방규칙은 (1) 표준상동 응력의 불연속적인 생성, (2) 기준면과 항복면의 중복된 GIH에 의하여 나타난다. 따라서 역재하 분야에서의 항복이 모델될 수 있었고 제안된 모델은 단순한 경화함수만을 사용하여 흙의 비등방거동을 예측하였다. 기존의 모델들과 비교하여 볼 때, 제안된 경화규칙은 비등방적인 재료거동을 대등하게 재현할 수 있는 능력이 있는 것으로 판단되었다. 등방, 비등방 압밀 점토에 대하여, 상이한 과압밀비 및 배수조건에 따라 삼축압축한 실험치를 잘 예측하였다.

참 고 문 헌

1. Prevost, J. H. (1978) "Anisotropic Undrained Stress-Strain Behavior of Clays", *J. Geotechnical Engineering Div.*, ASCE, 104, 1075-1090
2. Mroz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C. (1981) "An Anisotropic, Critical State Model for Soils Subject to Cyclic Loading", *Geotechnique*, 31, 451-469
3. Pietruszczak, S.T. and Mroz, Z. (1983) "On Hardening Anisotropy of K_0 -Consolidated Clays", *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 7, 19-38
4. Dafalias, Y. F. (1980) "The Concept and Application of Bounding Surface in Plasticity Theory", *Physical Non-Linearities in Structu-*

- ral Analysis, IUTAM Symposium, Senlis, France, Hult, J. and Lemaitre, J. Eds., (1981) Springer Verlag, Berlin, Germany, pp. 56-63
5. Dafalias, Y. F. (1986) "Bounding Surface Plasticity. I: Mathematical Formulation and Hypoplasticity", *J. Engineering Mechanics Div.*, ASCE, 112, 966-987
 6. Anandarajah, A. and Dafalias, Y. F. (1986) "Bounding Surface Plasticity. III: Application to Anisotropic Cohesive Soils", *J. Engineering Mechanics Div.*, ASCE, 112, 1292-1318
 7. Roscoe, K. H. and Burland, J. B. 1968 "On the Generalized Stress-Strain Behavior of Wet Clay", *Engineering Plasticity*, Hayman, J. and Leckie, F. A. Eds., Cambridge Univ. Press, pp. 535-609
 8. Dafalias, Y. F. and Popov, E. P. (1976) "Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity", *J. of Applied Mechanics Div.*, ASME, 43, 645-651
 9. Prager, W. "Recent Developments in (1949) Mathematical Theory of Plasticity", *J. Applied Physics*, 20, 235-241
 10. Phillips, A. (1972), "On Rate-Independent Continuum Theories of Graphite and their Experimental Verification", *Nuclear Engineering and Design*, 18, 203-211
 11. Wroth, C. P. (1984) "The Interpretation of In-Situ Soil Test", *Geotechnique*, 34, 449-489
 12. Henkel, D. J. (1956) "The Effects of Overconsolidation on the Behavior of Clays during Shear", *Geotechnique*, 6, 139-150
 13. Parry, R. H. G. and Nadarajah, V. (1974) "Observation on Laboratory Prepared, Lightly Overconsolidated Specimens of Kaolin", *Geotechnique*, 24, 345-358
 14. Taylor, P. W. and Bacchus, D. R. 1969 "Dynamic Cyclic Strain Tests on Clay", Proc. 7th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engng., Mexico, Vol. 1, pp. 401-409
 15. Borja R. I. and Lee, S. R. (1990) "Cam-Clay Plasticity, Part I: Implicit Integration of Elasto-Plastic Constitutive Relations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 78, 49-72

(접수일자 1994. 2. 4)

부 록

변수중에서 2차 텐서는 굵은 문자로 $\sigma, \xi, \theta, \xi_v, \rho, \dot{\epsilon}, a, \alpha$ 와 같이 나타내었다. 응력에 대한 f 의 미분식은

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2(p - \alpha), \quad \frac{\partial f}{\partial q} = 2(q - \beta) / m^2 \quad (A1)$$

α 에 대한 f 의 미분식 및 성분은 다음과 같다

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -2(p - \alpha), \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = -2(q - \beta) / m^2 \quad (A2)$$

r_v 에 대한 f 의 미분식은 다음과 같다:

$$\frac{\partial f}{\partial r_v} = -2r_v \quad (A3)$$

식 (3)으로부터 α 를 다음과 같이 수식화 할 수 있다.

$$\alpha = \xi + \frac{r_v}{dp_c}(a - \xi) \quad (A4)$$

연속 재하시에 $a/p_c, \xi/p_c$ 는 일정한 값을 지니므로 α 의 미분은 다음 식으로 나타난다.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p_c} = \frac{\partial \xi}{\partial p_c} = \xi / p_c, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial r_v} = \frac{a - \xi}{dp_c} \quad (A5)$$

p_c 의 미분은 식 (14)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial p_c}{\partial \epsilon_v^p} = \frac{1+e}{\lambda - \kappa} p_c \quad (A6)$$

r_v 에 대한 미분은 식 (15)로부터 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_v}{\partial p_c} &= r_v / p_c, \quad \frac{\partial r_v}{\partial \epsilon_d^p} \\ &= \frac{m^2 \|\xi_c\|^2}{ac} \frac{dp_c(1 - cr_v/dp_c)^2}{(1-b)(cr_v/dp_c)^b + b(cr_v/dp_c)^{b-1}} \end{aligned} \quad (A7)$$

그러므로 식 (17)이 유도된다. 식 (17)에서, 체적 및 축차변형률 성분은

$$\dot{\epsilon}_v^p = \frac{f_p p + f_q q}{H} \frac{\partial f}{\partial p} \quad (A8)$$

$$\dot{\epsilon}_d^p = \frac{f_p p + f_q q}{H} \frac{\partial f}{\partial q} \quad (A9)$$

이며, 변형률의 구분(decomposition), 즉 $\dot{\underline{\varepsilon}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e + \dot{\underline{\varepsilon}}^p$ 에 의하여 변형률속도 텐서는

$$\dot{p} = K(\dot{\varepsilon}_v - \dot{\varepsilon}_v^p), \dot{q} = 3G(\dot{\varepsilon}_d - \dot{\varepsilon}_d^p) \quad (\text{A10})$$

이다. 식 (A8) 을 식 (A9)에 대입하고, 식 (A9) 에 $\partial f / \partial p$, $\partial f / \partial q$ 를 곱한 후 더하면 다

음 식을 유도할 수 있다.

$$f_{,p} \dot{p} + f_{,q} \dot{q} = \frac{K f_{,p} \dot{\varepsilon}_v + 3G f_{,q} \dot{\varepsilon}_d}{H + K f_{,p}^2 + 3G f_{,q}^2} H \quad (\text{A11})$$

식 (A8), (A10)를 식 (A9)에 대입하면, 식 (11)이 구해진다.