

열하중으로 좌굴된 단순 지지 준 등방성 적층판의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Thermally Buckled Quasi-Isotropic Laminated Plates with Simply Supported Edges

신 동 구*
Shin, Dong-Ku

요 약

등분포 열 하중으로 좌굴되고 단순 지지된 준 등방성 직사각형 복합재 평판의 자유진동 해석에 관한 연구를 수행하였다. Von Karman형 비선형 변형도 성분을 1차 전단변형 평판이론에 적용하여 유한요소법으로 후 좌굴 해를 구하였으며 Duhamel-Newman형 탄성이론이 아울러 적용되었다. 후 좌굴 해석으로부터 계산된 변위를 이용하여 좌굴된 평판의 강성을 재평가한 후, 고유치 문제인 자유진동 해석을 수행하였다. 준 등방성 $[\pm 45/0/90]_s$ 직사각형 평판의 폭 대 두께비 및 폭 대 길이비를 변화시켜 이들 설계변수가 평판의 자유진동 특성에 미치는 영향을 분석하였다.

Abstract

The free vibrations of thermally buckled, simply supported, symmetrically laminated, rectangular, and quasi-isotropic plates are investigated. The nonlinear postbuckling analysis is performed by the finite element method based on the first order shear deformable plate theory with the use of von Karman type nonlinear strains and the Duhamel-Newman type constitutive law. The postbuckling solutions are used to obtain free vibration responses of buckled plates. Several numerical examples for quasi-isotropic laminated plates are considered. The effects of width-to-thickness ratios and aspect ratios on the free vibration characteristics of buckled plates are investigated.

1. 서 론

터어빈, 원자로, 항공우주분야 등에 적용되는 구조물 중에는 온도 변화에 의한 열적 하중 하에서 구조적 기능을 수행해야 되는 구조 요소들이

있다. 열적 환경하 구조물에는 금속재보다는 열적 변화에 보다 우수한 기계적 성질을 갖고 있는 박판(Thin-walled)형태의 복합재의 이용이 최근 급증하는 추세이다. 이와같은 박판 복합재 구조물의 열적 환경 및 열 기계적 환경하 정적(Static) 구조

* 국방과학연구소 선임 연구원

이 논문에 대한 토론을 1995년 6월 30일까지 본 학회에 보내 주시면 1995년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

특성을 이해하고자 하는 노력은 활발히 수행되고 있지만 자유진동 특성 및 동적 거동에 대한 연구는 상대적으로 미미한 실정이다. 박판 구조물이 면내력이나 열 하중등의 초기 하중을 받게 되면 박판의 강성은 감소하게 되고 변형된 박판의 진동 특성은 하중이 존재하지 않는 경우와는 다르다. 초기 열변형으로 좌굴된 직사각형 복합재 평판의 진동해석을 본 논문에서 수행하였다. 기 좌굴된 등방성 평판(Buckled isotropic plate)의 자유진동 해석에 관한 연구는 참고문헌(1,3) 등이 있다. Bisplinghoff와 Pian⁽¹⁾은 해석적 및 실험적 방법으로 면내력을 받고 있는 평판의 자유진동 해석을 수행하였으며 Bailey⁽²⁾는 평판의 기하학적 비선형 해석에 적용되는 응력 함수식을 이용하여 다양한 경계조건을 갖는 평판의 자유진동 특성을 해석하여 해석치가 그의 실험치와 잘 일치하고 있음을 보여 주었다. 참고문헌 (3)에서 Yang과 Han은 고전평판 이론을 적용하여 유한요소법으로 고유치 해를 구하였다. 한편, 초기 열하중을 받고 있는 이방성 복합재 평판(Anisotropic composite plate)의 자유진동 해석은 최근에 비로소 연구가 진행되고 있는 실정이다.^(4,6) Noor와 Burton⁽⁴⁾은 3차원 탄성이론을 적용하여 자유진동 및 민감도 해석을 수행하였는데 작용하중을 좌굴력보다는 작은 범위로 한정하였다. Chang과 Jen⁽⁵⁾은 Berger가 제안한 해석적 방법으로 직교 이방성(Orthotropic) 평판의 자유진동 특성을 분석하였으며 참고문헌(6)에서 Gray와 Mei는 고전 평판이론에 의한 유한요소법으로 좌굴된 복합재 평판의 자유진동 해석을 수행하였다.

본 논문에서는 등분포 열 하중(Uniform thermal load)을 받고 있는 단순 지지된 준 등방성(Quasi-isotropic) 직사각형 복합재 평판의 자유진동 해석에 관한 연구를 수행하였다. 평판에 열하중을 작용시키면 열 팽창에 의해 응력이 발생하게 되고 강성(Stiffness)은 감소하며 하중을 좌굴할 때까지 증가시키면 순간적으로 평판의 강성은 사라져서 고유 진동수는 영이된다. 임계 열하중 이상으로 하중을 증가시키면 평판의 후 좌굴 강성(Postbuckling strength)에 의해 다시 고유 진동수는 급격히 증가한다. 이와 같은 후 좌굴 하중영

역에서 기 좌굴된 평판의 강성을 평가하기 위한 해석은 기하학적 비선형 평판이론으로 수행해야 한다. 여기에서는 Von Karman형 비선형 변형도 성분을 1차 전단변형 평판이론(First order shear deformation plate theory)에 적용하여 유한요소법으로 후 좌굴 해를 구하였으며 Duhamel-Newman형⁽⁷⁾ 탄성이론이 아울러 적용되었다. 후 좌굴 해석으로부터 계산된 변위를 이용하여 좌굴된 평판의 강성을 재평가한 후, 고유치 문제인 자유진동 해석을 수행하였다. 평판이 좌굴되기 전 및 좌굴 후의 진동특성을 해석하기 위하여 작용 열하중 크기에 대한 제한은 두지 않았다. 본 논문에서 구한 해를 다른 연구 결과와 비교하여 해의 정확성에 대한 검증을 수행하였으며 준 등방성 $[\pm 45/0/90]_s$ 직사각형 평판의 폭 대 두께비 및 폭 대 길이비를 변화시켜 이들 설계변수가 평판의 자유진동 특성에 미치는 영향을 분석하였다. 평판의 열 기계적 물성치는 온도에 의해 변하지 않는 것으로 가정하였다.

2. 기하학적 비선형 평판 이론

본 논문에서는 Timoshenko형의 1차 전단변형 평판 이론과 Von Karman의 비선형 변형도 이론이 아울러 적용되었다. 1차 전단변형 평판 이론은 변형 전 중립면에 수직이었던 단면이 변형 후 반드시 수직을 유지할 필요는 없다는 가정이 고전 평판 이론(Classical lamination theory)과 다른 점이다. 복합재는 보강섬유(Reinforcing fiber)와 평행인 방향의 열 팽창계수가 매우 작은 반면 보강섬유에 직각방향의 열 팽창계수는 매우 크기 때문에 횡방향 전단변형을 무시하는 고전적층 이론보다는 1차 전단변형 평판이론으로 열 하중을 받는 복합재 평판의 후 좌굴 해석을 하는 것이 보다 정확한 해를 구하게 한다.⁽⁸⁾ 그림 1에는 등분포 열하중을 받고 직사각형 평판의 각종 치수, 변위 성분 및 작용 열하중을 보여 준다. 1차 전단 변형 평판 이론에서 변위장은 다음 식으로 표현 된다.

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u^0(x,y) + z \varphi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v^0(x,y) + z \varphi_y(x,y) \\ w &= w(x,y) \end{aligned} \quad (1)$$

윗 식에서 u, v 및 w 는 각각 x, y 및 z 방향 변위이며 u^0 와 v^0 는 각각 중립면에서의 x 및 y 방향 변위를 나타내며 φ_x 와 φ_y 는 각각 xz 및 yz 평면에서의 휨 변형 기울기를 의미한다. Von Karman형 변형도 성분은 다음 식 (2)로 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u^0_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + z \varphi_{x,x} = \epsilon_x^0 + z \kappa_x \\ \epsilon_y &= v^0_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + z \varphi_{y,y} = \epsilon_y^0 + z \kappa_y \\ \gamma_{xy} &= u^0_{,y} + v^0_{,x} + w_{,x} w_{,y} \\ &+ z (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) = \gamma_{xy}^0 + z \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \varphi_x + w_{,x} \\ \gamma_{yz} &= \varphi_y + w_{,y} \end{aligned} \quad (2)$$

윗 식에서 변위 성분 다음의 따옴표는 뒤 따르는 좌표 축에 대한 편미분을 나타낸다. 식 (2)에서 평판의 중립면에서의 변형도 및 곡률은 다음 식 (3)과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= u^0_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ \epsilon_y^0 &= v^0_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 \\ \gamma_{xy}^0 &= u^0_{,y} + v^0_{,x} + w_{,x} w_{,y} \\ \kappa_x &= \varphi_{x,x}, \quad \kappa_y = \varphi_{y,y}, \quad \kappa_{xy} = \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} \end{aligned} \quad (3)$$

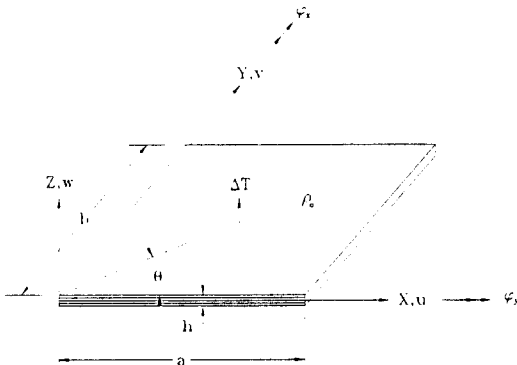


그림 1. 직사각형 적층판의 치수

1차 전단 변형 기하학적 비선형 평판 이론에서 운동 방정식은 다음 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= \rho u^0_{,tt} + I \varphi_{x,tt} \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= \rho v^0_{,tt} + I \varphi_{y,tt} \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} &= w_{,x} (N_{x,x} + N_{xy,y}) \\ &+ w_{,y} (N_{xy,x} + N_{y,y}) + \rho w_{,tt} \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x &= I u^0_{,tt} + J \varphi_{x,tt} \\ M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y &= I v^0_{,tt} + J \varphi_{y,tt} \end{aligned} \quad (4)$$

윗 식에서 N_i, Q_i 및 M_i 는 다음 식 (5)와 같이 정의되는 면력, 전단력 및 굽힘력 성분이며 ρ, I 및 J 는 관성 계수(Inertia coefficients)이고 아래 식 (5)에서 ρ_0 는 밀도이다.

$$\begin{aligned} [N_x, N_y, N_{xy}] &= \int [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}] dz \\ [Q_x, Q_y] &= \int [\sigma_{xz}, \sigma_{yz}] dz \\ [M_x, M_y, M_{xy}] &= \int [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}] z dz \\ [\rho, I, J] &= \int \rho_0 [1, z, z^2] dz \end{aligned} \quad (5)$$

한편, 위와 같이 정의된 면력 및 굽힘력 성분은 탄성체에서의 Duhamel-Neuman 법칙을 적용하면 다음 식 (6)과 같이 변형도 및 곡률의 함수로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

윗 식에서 $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} (i,j=1,2,6)$ 및 $A_{ij} (i,j=4,5)$ 는 면강성, 커플링강성, 굽힘강성 및 횡 전단강성 계수이다. (9) 식 (6)에서 N_i^T 와 M_i^T 는 열 하중 ΔT 에 의해 발생하는 면력 및 모멘트로 다음 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{NL} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} (1,z) \Delta T dz \quad (7)$$

윗 식에서 $\overline{Q_{ij}}$ 는 변환 환원강성(Transformed reduced stiffness), α_x , α_y 및 α_{xy} 는 열 팽창계수이며 NL은 전체 플라이(PLY) 수를 나타낸다.

3. 유한요소 수식화

평판의 운동방정식 (4)로부터 다음과 같은 가상 변위 함수(Variational functional)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_A [(\rho u^0)_{,tt} + I \varphi_{x,tt}] \delta u^0 + N_x \delta u^0_{,x} \\
 & + N_{xy} \delta u^0_{,y} + N_{xy} \delta v^0_{,x} \\
 & + (\rho v^0)_{,tt} + I \varphi_{y,tt}] \delta v^0 + N_y \delta v^0_{,y} \\
 & + \rho w_{,tt} \delta w + Q_x \delta w_{,x} \\
 & + Q_y \delta w_{,y} + \delta w_{,x} (w_{,x} N_x + N_{xy} w_{,y}) \\
 & + \delta w_{,y} (w_{,x} N_{xy} + N_y w_{,y}) \\
 & + (I u^0)_{,tt} + J \varphi_{x,tt}] \delta \varphi_x + M_x \delta \varphi_{x,x} \\
 & + M_{xy} \delta \varphi_{x,y} + Q_x \delta \varphi_x \\
 & + (I v^0)_{,tt} + J \varphi_{y,tt}] \delta \varphi_y + M_{xy} \delta \varphi_{y,x} \\
 & + M_y \delta \varphi_{y,y} + Q_y \delta \varphi_y] dx dy \\
 & + \int_s [N_n \delta u_n^0 + N_{ns} \delta u_s] ds + \int_s V \delta w_n ds \\
 & + \int_s [M_n \delta \varphi_n + M_{ns} \delta \varphi_s] ds \quad (8)
 \end{aligned}$$

식 (8)에서 V , N_n 및 N_{ns} , M_n 및 M_{ns} 는 각각 평판의 경계 S에서의 면외 전단력, 면내 수직력 및 전단력, 굽힘 및 비틀림 모멘트로 다음 식(9)와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 V = & (Q_x + w_{,x} N_x + w_{,y} N_{xy}) \eta_x \\
 & + (Q_y + w_{,x} N_{xy} + w_{,y} N_y) \eta_y \\
 N_n = & N_x n_x n_y + 2 N_{xy} n_x n_y + N_y n_x n_y \quad (9) \\
 N_{ns} = & (N_y - N_x) n_x n_y + (n_x n_y - n_x n_y) N_{xy} \\
 M_n = & M_x n_x n_y + 2 M_{xy} n_x n_y + M_y n_x n_y \quad (9) \\
 M_{ns} = & (M_y - M_x) n_x n_y + (n_x n_y - n_x n_y) M_{xy}
 \end{aligned}$$

식 (9)에서 n_x 와 n_y 는 평판의 경계 S에 대한 단위 수직 벡터 성분이다.

식 (6)의 면력 및 굽힘력 성분은 변형도-변위 관

계식 (3)을 이용하여 변위의 함수로 표현할 수 있고 이들 면력 및 굽힘력 성분을 가상변위 함수식 (8)에 대입하면 식 (8)은 u^0 , v^0 , w , φ_x 및 φ_y 로 표현될 수 있다. 이들 변위를 주 자유도(Primary degrees of freedom)로 하여 유한요소의 각 절점 변위로 치환한 후, 모든 요소에 대하여 취합하면 다음과 같은 행렬 방정식을 구할 수 있다.

$$[M] \{\dot{\Delta}\} + [K(\Delta)] \{\Delta\} = \{F\} \quad (10)$$

윗 식에서 $\{\Delta\}$ 는 유한요소 절점에서의 변위벡터, $[M]$ 은 질량행렬, $[K(\Delta)]$ 는 강성행렬, 그리고 $\{F\}$ 는 작용하중 벡터를 각각 나타낸다. 좌굴된 평판의 자유진동 해석을 위해서는 정적 비선형 후 좌굴해석을 먼저 수행하고 여기서 구한 변위를 이용하여 변형된 평판의 강성을 평가하고 자유진동 해석을 수행해야 한다. 먼저 정적 후 좌굴 해석은 식 (10)에서 시간에 독립적인 항만을 고려하므로 다음 식과 같이 단순화 된다.

$$[K(\Delta)] \{\Delta\} = \{F\} \quad (11)$$

행렬 방정식 (11)에서 강성행렬 $[K(\Delta)]$ 가 변위의 함수로 표현되어 있으므로 이 식은 비선형 연립 방정식임을 알 수 있다. 따라서, 후 좌굴 해를 구하기 위해서는 식 (11)의 비선형 방정식의 해를 계산해야 되는데 본 논문에서는 비선형 해법중의 하나인 Newton-Raphson 연속 축차법⁽¹⁰⁾을 적용하였다. Newton-Raphson 알고리즘은 기본적으로 비선형 식을 Taylor 급수로 전개하여 2차 이상의 고차항을 무시하고 축차(Iteration)에 의해 근사적으로 해를 각 작용 하중단계별로 점진적으로 계산하는 방법이다. 이 알고리즘을 식 (11)에 적용하면 현재 고려하고 있는 하중단계에 있어서 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$[K_T] \{\Delta\}_{r+1} = ([K_T] - [K]) \{\Delta\}_r + \{F\} \quad (12)$$

윗 식에서 $[K_T] = [\partial\{R\}/\partial\{\Delta\}]_r$, $\{R\} = [K(\Delta)] \{\Delta\} - \{F\}$ 이며 r 은 축차 회수이다. 식 (12)에서 $(r+1)$ 번째 축차의 강성행렬은 r 번째의 축차로부터 구한 변위 벡터 $\{\Delta\}_r$ 을 대입하여 구한다.

평판이 좌굴된 상태의 자유진동 해석은 식 (12)

로부터 구한 변위 해를 식 (10)의 강성행렬에 대입하여 다음 식과 같은 고유치 문제(Eigen-problem)의 해를 구하면 된다.

$$[M] \{\dot{\Delta}\} + [K(\Delta)] \{\Delta\} = 0 \quad (13)$$

이와 같은 고유치 문제는 IMSL⁽¹¹⁾의 부 프로그램 GVCRG를 이용하여 자유 진동수 및 진동 모우드를 계산하였다.

4. 수치 예제 및 토론

본 해석 절차에 대한 검증을 위하여 앞 절에서 논술한 후 좌굴 해석 및 자유진동 해석 알고리즘을 이용한 유한요소 프로그램의 해석 결과를 다른 참고문헌의 결과와 비교하였다. 준 등방성 평판의 두께비(b/h) 및 길이비(a/b)를 설계변수로 선택하여 이들 설계변수가 좌굴 전 및 후의 자유진동 특성에 미치는 영향을 분석하였다. Newton-Raphson 알고리즘에 위한 유한요소 후 좌굴 해석시에는 좌굴 하중에서 분기점(Bifurcation point)이 발생하여 해를 구하기가 매우 어렵는데 이와 같은 수치적 난점을 해결하기 위하여 일반적으로 $w(x,y) = w_0 \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$ 형의 초기 처짐을 도입한다. 본 논문에서도 $w_0 = 0.1h$ 의 초기 처짐을 고려하였고 CRAY-YMP2 컴퓨터로 후 좌굴해 및 자유진동 응답을 계산하였다. 한편, 그림 1과 같은 평판의 단순 지지 경계조건은 $x=0$ 및 a 에서 $u=w=\phi_y=0$ 이며 $y=0$ 및 b 에서 $v=w=\phi_x=0$ 이다.

4.1 직사각형 알루미늄 평판

등분포 열 하중하 단순 지지된 알루미늄 및 준 등방성 복합재 평판에 대한 해를 참고문헌(6)의 결과와 비교하였다. 알루미늄 평판의 크기는 $18" \times 6"$ 이며 두께는 $0.05"$ 이고 $E=10 \times 10^6 \text{psi}$, $\nu=0.3$, $\alpha=12.5 \times 10^{-6} / ^\circ\text{F}$ 이고 밀도는 $0.11\text{lb}/\text{in}^3$ 이다. 해석에 사용된 유한요소 모델은 12×4 로 48개의 요소와 65개의 절점으로 구성되어 있다. 본 해석 및 참고문헌(6)에서 구한 4개의 저차 진동수를 작용 열 하중의 함수로 그래프화한 것을 그림 2는 보여

주는데 1, 2, 3차 진동수는 두 해가 거의 동일하고 4차 진동수는 두 해 간의 차이가 5%이내인 것을 알 수 있다. 이 그림에서 무차원화(Normalization)를 위해 도입한 ω_0 는 열 하중이 작용하지 않을 때의 1차 진동수로 971.2 rad/sec 로 계산되었으며 ΔT_{cr} 은 좌굴 열 하중의 크기로 4.28°F 로 계산되었다. 이 그림으로부터 평판이 좌굴하기 전까지는 진동수가 계속 감소하고 좌굴 직전에는 급격히 감소하며 좌굴 하중에서는 1차 진동수가 영이 되고 좌굴 직후 급격히 증가하다가 깊은 후 좌굴 영역(Deep postbuckling load range)에 접어들수록 곡선의 기울기가 완만해져서 서서히 증가함을 알 수 있다. 아울러 진동수가 저차일수록 열 하중의 변화에 보다 민감하게 변화하는 것을 알 수 있다. 한편, 후 좌굴 영역에서 각 곡선이 교차하는 점이 존재하는 것을 그림 2로부터 알 수 있는데 이 점은 모우드의 형태가 변화하는 현상을 의미한다. 알루미늄 평판의 최저 진동수는 작용 열 하중 $\Delta T \leq 1.6\Delta T_{cr}$ 영역에서는 1차 모우드에 해당하며 $1.6\Delta T_{cr} \leq \Delta T \leq 4\Delta T_{cr}$ 에서는 2차 모우드에 ΔT 가 $4\Delta T_{cr}$ 이상이면 3차 모우드에 대응하는 진동수가 최저 진동수인 것이다.

4.2 두께비가 다른 준 등방성 정사각형 적층판 준 등방성 $[\pm 45/0/90]_s$ 정사각형 적층판의 무차원화된 자유 진동수(ω/ω_0)를 작용 열하중($\Delta T/\Delta T_{cr}$)

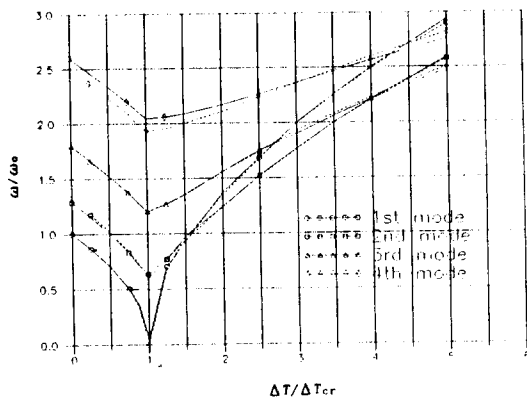


그림 2. 직사각형 알루미늄 평판의 자유 진동계수(ω/ω_0)비교 (실선 : 본 해석, 점선 : 참고문헌 6)

$T/\Delta T_{cr}$ 의 함수로 나타낸 것은 그림 3과 같은데 실선은 본 해석에 의한 결과이고 점선은 참고문헌 (6)의 결과이다. 해석에 사용된 평판의 한변 길이는 10.0 in, 두께는 0.04 in이고 8×8 유한요소 모델이 사용되었으며 4변은 단순 지지되어 있다. 이 적층판의 기계적 물성치는 표 1과 같으며 ΔT_{cr} 은 29°F, ω_0 는 457.38 rad/sec로 계산되었다. 그림 3으로부터 두해가 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있으며 $\Delta T=3.3\Delta T_{cr}$ 에서 모우드가 변화하는 것을 보여 준다.

표 1. 복합 적층판의 열 기계적 물성치

$E_1=19.23$ Msi, $E_2=1.55$ Msi
$G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.83$ Msi, $\nu_{12}=0.24$
$\alpha_1=-0.43 \times 10^{-6}$ /°F, $\alpha_2=13.6 \times 10^{-6}$ /°F
$t_{ply}=0.005$ in, $\rho_0=2.48$ (lb/in ³)/(in/sec ²)

한편, 평판의 설계시 중요한 설계변수의 하나인 평판의 폭 대 두께비(b/h)가 후 좌굴 영역에서 자유 진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 앞의 경우($b/h=250$)보다 평판이 2.5배 두꺼운 $b/h=100$ 인 경우를 아울러 고려하였다. 두께비가 다른 평판의 고유 진동수와 작용 열 하중을 각각의 평판이 가진 ω_0 와 ΔT_{cr} 로 무차원화하여 그림 4에 나타내었다. 점선은 $b/h=250$, 실선은 $b/h=100$ 인 경우에 해당되는데 이 그림은 무차원화된 자유 진동수에는 좌굴된 평판의 두께비는 거의 영향을 주지 않음을 보여준다.

4.3 준 등방성 직사각형 적층판

평판 설계시 또 다른 주요 설계변수의 하나인 평판의 길이 대 폭의 비(a/b)를 변화시켜 좌굴된 평판의 자유 진동응답에 미치는 영향을 분석하였다. 해석에는 표 1의 물성치를 사용하였고 $b/h=100$, $h=0.04$ in, 적층순서는 $[\pm 45/0/90]_s$ 이며 폭 b 를 일정하게 유지하고 길이 a 를 변화시켰다. $a/b=0.5-3$ 인 직사각형 적층판의 최저 진동수와 작용 열 하중을 각각의 평판이 가진 자유 진동수

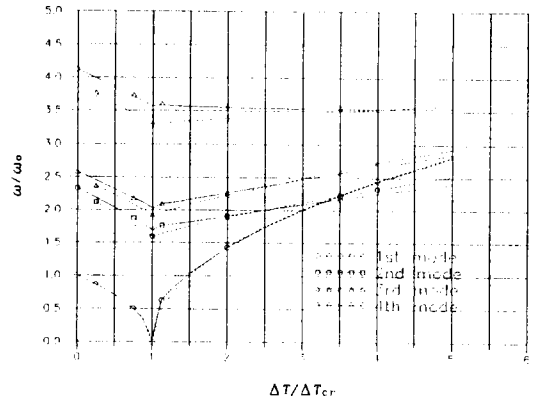


그림 3. 직사각형 $[\pm 45/0/90]_s$ 적층판의 자유 진동계수(ω/ω_0)비교 (실선 : 본 해석, 점선 : 참고문헌 6)

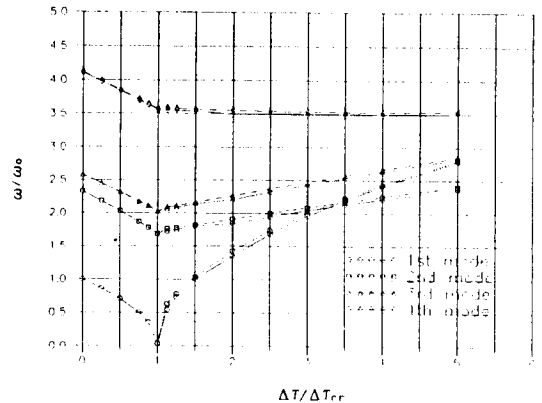


그림 4. 두께비가 다른 직사각형 $[\pm 45/0/90]_s$ 적층판의 자유 진동계수(ω/ω_0) (실선 : $b/h=100$, 점선 : $b/h=250$)

ω_0 와 좌굴 열 하중 ΔT_{cr} 로 무차원화하여 응답을 그린 것은 그림 5와 같다. 이 그림으로부터 평판의 a/b 는 무차원화된 자유 진동수에 미치는 영향이 거의 없음을 알 수 있다. 한편, 계산된 진동수는 $\omega b^2(\rho_0/E_2h^2)^{1/2}$ 으로, 작용 열 하중은 $\alpha_2\Delta T$ 와 같은 절대적인 기준으로 무차원화하여 진동수를 작용 열 하중의 함수로 그린 것을 그림 6~그림 8은 보여준다. 그림 6, 7 및 8은 각각 1, 2 및 3차 모우드에 대응하는 진동수이다. 이들 그림으로부터 a/b 가 작을수록 좌굴 열 하중은 증가하며 좌굴 후보 다 급속히 진동수가 증가함을 알 수 있다. 또한 저

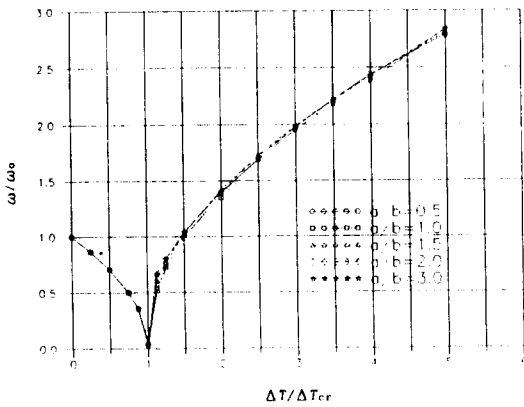


그림 5. 직사각형 $[\pm 45/0/90]_s$ 적층판의 1차 진동계수 (ω_1/ω_0)

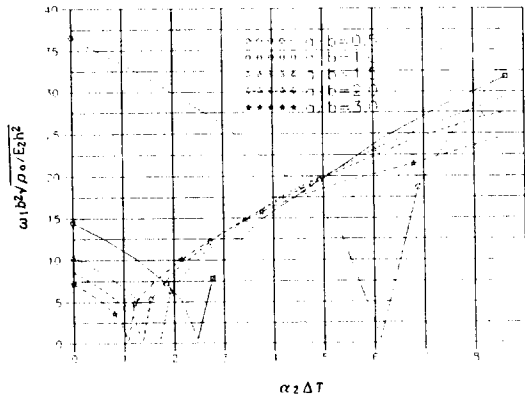


그림 6. 직사각형 $[\pm 45/0/90]_s$ 적층판의 1차 진동계수

$$\omega_1 b^2 \sqrt{\rho_0 / E_2 h^2}$$

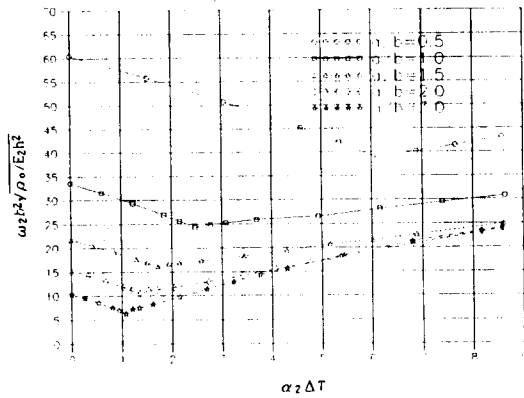


그림 7. 직사각형 $[\pm 45/0/90]_s$ 적층판의 2차 진동계수

$$\omega_2 b^2 \sqrt{\rho_0 / E_2 h^2}$$

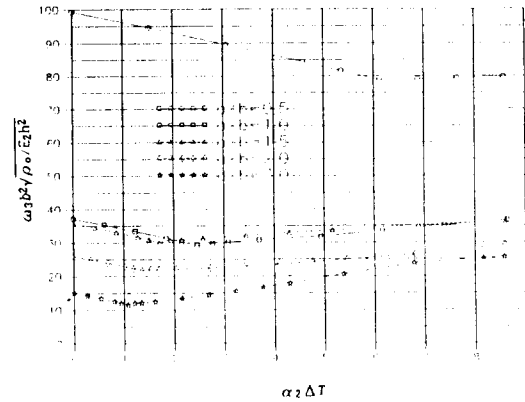


그림 8. 직사각형 $[\pm 45/0/90]_s$ 적층판의 3차 진동계수

$$\omega_3 b^2 \sqrt{\rho_0 / E_2 h^2}$$

차 진동수일수록 열 하중에 매우 민감하게 변화하는 것을 아울러 관찰할 수 있다.

5. 결 론

등분포 열 하중으로 좌굴되고 단순 지지된 준 등방성 직사각형 복합재 평판의 자유진동해석에 관한 연구를 1차 전단변형 평판이론을 적용하여 유한요소법으로 수행하였다. 기하학적 비선형 후 좌굴 해석으로부터 계산된 변위를 이용하여 평판의 강성을 각 작용하중 단계별로 재평가한 후 자유진동 해석을 수행하였다. 준 등방성 $[\pm 45/0/90]_s$ 직사각형 평판의 폭 대 두께비 및 폭

대 길이비를 변화시켜 이들 설계변수가 평판의 자유진동 특성에 미치는 영향을 분석하였다. 본 연구 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 평판이 좌굴하기 전까지는 진동수가 계속 감소하고 좌굴 직전에는 급격히 감소하며 좌굴 하중에서는 1차 진동수가 0이되고 좌굴 직후 급격히 증가하다가 깊은 후 좌굴 영역에 접어들수록 진동수는 서서히 증가한다.
- 2) 처차 모드에 대응하는 진동수일수록 열 하중의 변화에 보다 민감하게 변화한다.
- 3) 평판의 폭 대 두께비 및 길이 대 폭의 비와 무관하게 거의 동일한 형상의 ω/ω_0 및 $\Delta T/\Delta T_{cr}$ 곡선을 얻었다.

4) 진동수는 $\omega b^2 \sqrt{\rho_0 / E_2 h^2}$ 로 작용 열 하중은 $\alpha_2 \Delta T$ 로 무차원화할 경우 a/b 가 작을수록 좌굴 열 하중은 증가하며 좌굴 후 보다 급속히 진동수가 증가한다.

참 고 문 헌

1. R.L. Bisplinghoff and T.H.H. Pian, "On the Vibration of Thermally Buckled Bars and Plates", *Proc. 9th International Congress for Applied Mechanics* 7, pp.307-318, 1957.
2. C.D. Bailey, "Vibration of Thermally Stressed Plates with Various Boundary Conditions", *AIAA J.* 11, pp.14-19, 1973.
3. T.Y. Yang and A.D. Han, "Buckled Plate Vibrations and Large Amplitude Vibrations Using Higher-Order Triangular Elements", *AIAA J.* 21, No.5, pp.758-766, 1983.
4. A.K. Noor and W.C. Burton, "Three-Dimensional Solutions for the Free Vibrations and Buckling of Thermally Stressed Multilayered Angle-Ply Composite Plates", *J. Applied Mechanics* 59, pp.868-877, 1992.
5. W.P. Chang and S.C. Jen, "Nonlinear Free Vibration of Heated Orthotropic Rectangular Plates", *Int. J. Solids Structures* 22, No.3, pp. 267-281, 1986.
6. C.C. Gray and C. Mei, "Finite Element Analysis of Thermal Post-Buckling and Vibrations of Thermally Buckled Composite Plates", *Proc. AIAA/ASME/ASCE/ASH/ASC 31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conf.*, AIAA paper no 91-1239, pp.2996-3007, 1991.
7. J.C. Halpin and N.J. Pagano, *Consequences of Environmentally Induced Dilatation in Solids*, Recent Advances in Engineering Science, Gordon and Breach, 1970.
8. R.C. Averill and J.N. Reddy, "Thermomechanical Postbuckling Analysis of Laminated Composite Shells", *Proc. AIAA/ASME/ASCE/ASH/ASC 33rd Structures, Structural Dynamics and Materials Conf.*, AIAA paper no 93-1337, pp. 351-360, 1993.
9. J.M. Whitney, *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic Publishing Co. Inc., pp.24-26, 1987.
10. K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., pp.489-491, 1982.
11. "IMSL MATH / LIBRARY-User's Manual", *IMSL*, 1989.

(접수일자 1994. 10. 14)

Composite Structures for Civil and Architectural Engineering

저 자 : D. H. Kim(김덕현)

출판사 : E & FN SPON

An Imprint of Chapman & Hall(영국)

총 503쪽

장구한 인류문화의 역사를 통하여 네가지 건설 및 구조의 요소/시스템이 발전되어 왔다. 이들은 기둥과 보, 석조아치, 목재트러스 및 현대 철근콘크리트와 강철구조물들인데, 이들 기본 건설개념의 발전은 그 시대에 사용가능한 건설재료와 이러한 재료를 사용하는데 응용할 수 있는 이론의 개발과 밀접한 관계가 있다. 역사시대는 “석기시대”, “청동기시대”, “철기시대” 등과 같이 건설재료에 의해서 불리우기까지 한다. 현 시대는 융통성 있는 선택의 시대이다. 현대 과학과 기술은 수없이 많은 첨단 신소재와 응용할 수 있는 이론들 및 이들 소재를 이용하는 기술들을 등장시켜 왔고, 또 앞으로도 계속 만들어 낼 것이다. 그런고로 현대를 어느 한가지만의 재료로 부를 수는 없다. 현대는 선택의 시대로서, 최적소재를 적시에, 최적용도로 볼 수 있기 때문이다. 그러나 이러한 상황은, 재료의 선택이 불가능했던 시기와 달라서, 재료, 구조형태, 제작 및 가설 방법 등의 최적 선택을 필요로 한다. 현대 재료특성의 다양성 때문에, 오늘날의 기술자나 설계자는 재료를 선택하고 설계할 수 있어야만 한다. 새로운 구조개념은, 모든 주어진 조건아래서, 구조 시스템을 결정하고, 이 시스템에 가장 적합한 재료를 선택하는 것을 포함한다.

저자는 위의 개념을 구조물 건설의 제5의 기본

개념이라 부른다. 이 개념은, 많은 사람들이 인식하지 못하는 사이에 여러 전공분야의 공학 전문가들에 의해서 상당한 범위까지 적용되어 왔다. 오늘날, 토목 기술자나 건축 설계자가 이러한 개념을 일상의 실무업무에 응용할 지식과 능력을 갖추지 못하면, 은행 서기가 계산기나 개인용 컴퓨터를 다른 능력을 못 갖춘 것과 같은 비참한 형편에 놓이게 될 것이다.

이 개념이 제품으로 현실화된 것을, 복합재료 또는 복합재료 구조 시스템이라 부를 수 있다. 복합재료는 두가지 또는 그 이상의 소재들을 복합적으로 결합시켜, 특정특색을 위해 만들어진 최종 제품을 의미한다. 두가지 이상의 소재가 결합되는 고로, 단일 소재에는 없는 여러가지 특성을 만들어 낼 수 있다. 기능상으로 볼 때, 복합재료는 크게 두가지 요소로 이루어진다. 하나는 역학적 기능을 주는 보강재와 이를 지지 고정 및 보호하는 母材(matrix)이다. 두가지 다 고분자, 금속, 또는 세라믹일 수 있다.

복합재료와 관련된 소재나 이론의 확립은, 소재 과학과 주로 항공우주공학과 같은 관련 응용공학을 통하여, 거의 완벽하게 이루어져 있다. 그러나 오늘날의 기술은 너무나 다양해져서 서로 다른 공학분야간에는 거의 대화가 없다. 이러한 의사소통의 부족현상은, 같은 공학 분야 내에서도 서로 전공이 다른 경우 심각한 상태로 존재하고 있다. 복합재료의 응용은 관련된 모든 공학 및 기술분야에 대한 어느 정도 수준의 지식을 필요로 한다. 이 책의 목적은, 복합재료에 대한 최신의 지식을 소재 과학이나 항공공학 등과 같이 복합재료를 더 넓게 사용하고 있는 여러 전공분야로부터 실제 응용을 위해 사용될 수 있도록 한데 모아 융합시킴으로써 이러한 의사소통의 간격을 메꾸고자 하는데 있다. 이 책은 기술자들이 자신감을 갖고 복합재료 구조물을 설계할 수 있게 해주는 최초의 광범위한 지침서가 된다.

전쟁이 끝나고 평화가 오면서 경제 번영의 시기가 오면 새로운 세대에 속하는 사람들은 선배들이

어떻게 전투를 치렀는지 알지 못한다. 국가 건설이란 심각한 임무를 수행한 개척기 세대는 기본 계획서부터 자금조달, 경영, 모든 종류의 건설의 설계 및 시공을 수행해야만 한다. 반면에 평화로운 번영기의 세대들은 일반적으로 자기 전공 분야 내에서 일정한 일상 업무만 수행한다. 그러나, 과학 기술의 발전 속도는 이 새로운 세대의 각성을 요구하고 있다. 더구나 발전이 거듭될수록 기술자들은 다양한 지식과 결정적인 중대한 결심을 하고 책임을 질 용기를 필요로 하는 직책을 맡게 된다. 복합재료의 설계는, 급속하게 발전하는 기술의 범위와 복잡성에서 발생하는 모든 도전을 직면할 수 있는 용기를 가진 개척자 정신을 필요로 한다. 이러한 능력이 결핍된 기술자는 가까운 장래에 쓸모없는 사람이 될 것이다. 이 책은, 새 세대의 기술자들과 한때 개척전선에서 활약했던 원로 기술자들에게, 복합재료 설계와 건설에서 직면하게 될 도전을 극복하는데 도움이 될 필요한 기본 기술을 마련해 준다.

새로운 재료들의 이점을 최대한으로 활용하기 위하여, 현대의 기술자는 단순한 재료사용자가 아니라, 자기의 사업(프로젝트)에 가장 적합한 재료와 제작방법을 선택하고 설계하는 “재료설계자”이어야 한다. 기술자의 재료와 제작 방법에 대한 시방서(지침서)는 품질관리의 기준을 포함해야 한다. 그러나, 이러한 모든 복잡성에도 불구하고 일정한 규칙을 제대로 터득하면, 복합재료를 이해하고 응용하는 것은 어렵지 않은 일이다. 이 책의 목적은 어려운 기존 복합재료 이론들을 토목 및 건축 기술자들이 이용하기에 쉽고 익숙한 “언어”로 표현하는데 있다.

이 책은 첨단복합재료의 사용에 가장 적합한 구조개념/형태의 역학에 대한 철저한 설명을 하고 있고, 건설에 사용할 때 적합한 대표적인 적층의 각도 배향들에 대한 간단하면서도 정확한 해석방법을 제공하고 있다. 이 책은 수학적 이론을 실제 설계에 연결하는 방법을 제시하고 있다. 각 장은 그 제목에 대한 최신의 이론 및 기술내용을 소개하면서, 장래 연구 및 개발의 방향을 제시해 주고 있다. 650여 참고문헌을 제공하여, 추가적인 정보원을 밝혀주고 있다.

복합재료의 기본 개념이 자세히 주어진 제1장은 독자에게, 나머지 장들을 이해하는데 필요한 기술적 시야와 필요한 배경(background)을 줄 것이다. 제2장에는 보강재와 모재(matrix)와 같은 성분 소재들의 특성들이 주어지고 있다. 토목 건축 기술자들에게 특히 중요한 소재들이 소개되어 있다. 고분자, 금속, 세라믹 및 시멘트 모재(matrix)로 이루어진 여러 종류의 복합재료의 역학적 성능들도 주어지고 있다. 고전적 탄성론과 구조역학에 대한 심도 깊은 고찰이 제3장에 수록되어 있다. 복합재료 설계에 필요한 구조형식의 이론이 강조되어 있다. 구조물의 좌굴과 진동을 포함하는 고유치 문제는 제4장에 소개되어 있다. 변단면과 임의의 경계조건을 가진 구조요소의 고유치 문제를 해석할 수 있는 방법도 주어지고 있다. 응력-변형을 관계식, 공학적 상수, on-axis에서 off-axis로 또는 반대로의 변환공식들, 불변수(invariants), 적층론, 미시역학(micromechanics) 등을 포함하는 비등방성 탄성론이 5장에 수록되어 있다. 1차원 복합재료 역학을 6장에서 소개한 후, 경계조건 문제와 고유치 문제를 포함하는 복합재료 평판의 문제가 상세하게 7장에서 논의된다. 저자가 개발한 토목 건축 기술자가 사용하기에 쉽고 편리하면서도 정확한 해석방법도 이 장에 설명되어 있다. 지금까지의 방법으로 최대응력과 변형을 등을 구한 다음, 구조물 설계과정에서 이 값들을 구조요소의 최대강도 및 파괴시 변형율과 비교되어야 한다. 8장에는 복합재료의 파괴/강도 이론이 심도있게 검토되고 설명되어 있다. 복합재료의 기계적 및 화학적 접착에 의한 연결방법이 9장에 자세이 다루어져 있다. 이제까지 주어진 복합재료의 해석방법, 연결방법 및 강도이론을 갖고 실제 설계가 이루어질 수 있다. 복합재료 구조요소의 설계 과정과 방법이 10장에 설명되어 있다. 임의의 3차원 구조를 해석하는 한 방법이 간단히 설명되고 최적 설계 이론의 현황이 역시 주어지고 있다. 부록에는 구조물의 수치해석에 대한 폭넓은 방법들과 행렬대수를 위한 선형대수학이 간단히 소개되어 있다.

최 창 근

한국과학기술원 교수