

# 표준 파괴인성시험편에 대한 탄소성 유한요소해석

## Elastic Plastic Finite Element Calculation of Standard Fracture Toughness Specimens

박 용 걸\*  
Park, Yong-Gul

요 약

본 연구의 목적은 표준파괴인장시험편에 대한 탄소성유한요소해석이다. 탄소성파괴역학의 이론과 수치해석을 위한 조건들이 기술되고 균열전단의 특이성을 모형화하기 위한 가능성이 논의된다. 표준파괴인장시험편의 탄소성유한요소해석으로 부터 J적분이나 균열개구변위(COD)와 같은 파괴역학계수들과 그들의 상관관계가 계산되고 소성역의 크기와 형태가 구해진다. 실험과 계산결과들이 비교되고 한계하중의 계산이 논의된다.

Abstract

The purpose of this study is elastic plastic finite element analysis for standard fracture toughness specimens. The principles of elastic-plastic fracture mechanics are shortly summerized and the special requirements for computational tools are derived. Possibilities to model the crack tip singularities are mentioned. The relevant fracture parameters like J-Integral and COD and their correlation are evaluated from elastic plastic finite element calculations of standard fracture toughnes specimens. The size and form of the plastic zone are shown. The comparison between experiment and caculation is discussed as well as the application of the limit load analysis.

1. 서 론

모든 파괴역학의 변수나 계수들은 균열근방의 변형, 응력, 변형율이나 이와같은 변수들의 조합으로부터 유도된다. 파괴역학을 이용한 구조물의 파괴해석은 특수한 경계조건에 대한 원리로서 항상 적용할 수 있어야 한다. 더우기 파괴역학에 대한 가정은 순수한 해석적인 방법으로는 그 확실성을 얻을 수 없는 균열전단에 근접한 부분의 응력

과 변형을 조건을 기초로 한다. 이와같은 파괴문제들은 매우 특수한 경우나, 탄성범위 내에 있는 부분, 또는 적절한 수정을 가한 소성역 등에 대해 해석적으로 풀 수가 있다.

일반적으로 이와같은 특별한 경우에 대한 해는 실제문제로 간단히 전환될 수는 없으나 예상되는 결과를 추정할 수는 있다. 또한 이와같은 문제의 해를 구하기 위해서는 수치해법을 이용하지 않으면 안된다. 이와같은 방법은 임의의 하중조건을

\* 대전산업대학교 토목공학과 부교수

이 논문에 대한 토론을 1995년 6월 30일까지 본 학회에 보내 주시면 1995년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

받는 임의의 모양을 가진 구조부재에서 변형, 응력, 변형률등을 구하기 위해 이용될 것이다. 해석상 현저하게 많은 어려움이 있거나 계산량이 많은 경우에 비선형 해석방법을 도입하게 된다. 균열을 가진 구조재에 대한 수치해석은 기지의 조건에 적당한 정확도로 다음 문제들을 해결할 수 있어야 한다.

- 응력과 변형률의 특이성
- 균열전단의 둔화현상
- 균열전단 부근의 큰 변형률

일반적인 수치해법 중에서 유한요소법이 파괴역학의 해를 구하는데 적합하다는 것은 이미 여러 문헌에서 증명되어왔다.<sup>9)</sup> Henshell이나 Barsom은 등매개변수(isoparametric) 요소에 대한 변형률 특이성이 단지 요소의 절점좌표의 선택으로 해결될 수 있다는 것을 보여주었다.<sup>1),2)</sup> 즉, 균열전단의 자유도가 독립이면

$$\epsilon_{ij}(r) = \frac{a_{ij}}{r} + \frac{b_{ij}}{\sqrt{r}} + c_{ij} + \dots$$

그렇지 않으면

$$\epsilon_{ij}(r) = \frac{b_{ij}}{\sqrt{r}} + c_{ij} + \dots$$

이론적인 예와는 달리 실제로 일어나는 파괴역학 문제는 항상 3차원의 상태이다. 평면좌표계에서 구조형태와 하중을 완전히 표현할 수 있는 경우에도 응력과 변형상태의 올바른 결정을 위해 제 3방향의 응력과 변형률에 관한 가정은 필요하다. 먼저 이와같은 가정과 조건들이 정해지고, 전체적으로는 경계조건으로서 평면응력과 평면변형률상태를 고려하게 된다. 실제문제에서 박판구조물의 자유표면에는 법선방향의 응력이 없기 때문에 평면응력상태가 되고, 평면변형률은 단지 경계조건으로 가정된다. 결과적으로 2차원 계산에서 평면응력상태로 가정하느냐 평면변형률상태로 가정하느냐에 따라 그 결과는 큰 차이가 난다. 그러나 이와같은 오차는 2차원 계산의 한계로 피할 수 없으며, 요소와 절점수 등의 조정으로 완전히 보완될 수가 없다.

## 2. 파괴역학 계수의 계산

### 2.1 균열개구변위의 결정(COD)

균열개구변위는 균열전면을 향한 균열선단변위의 보간에 의해 결정될 수 있으며, 광범위한 소성변형의 경우 특히 이 방법의 정확도는 아주 좋다. 왜냐하면 균열의 변위는 균열선단 부근에서 근사적인 선형거동을 하고, 또한 유한요소법에서 주요 미지량으로서의 변위가 최고의 정확도로 구해지기 때문이다.

### 2.2 J-적분의 결정(평균변형률 상태)

J적분은 유한요소 프로그램의 확장에 의해 쉽게 계산될 수 있다.<sup>7)</sup>

$$J = \int (Wdy - t \cdot \frac{\delta U}{\delta x} ds) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } W(\epsilon) &= \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \\ t &= \{t_i\} = \{\sigma_{ij} n_j\} \{u\} \end{aligned}$$

균열면에서  $\delta A$ 의 변화에 대한 위치에너지의 변화로 표현되는 J의 정의로부터

$$J = -\frac{\delta U}{\delta A}$$

유한요소공식으로 부터

$$\begin{aligned} U &= 1/2 \cdot \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\} - \{u\}^T \cdot \{F\} \\ -\frac{\delta U}{\delta A} \Big|_{L=\text{const}} &= -\frac{\delta \{u\}^T}{\delta A} \cdot ([K] \cdot \{u\} - \{F\}) \\ &\quad - 1/2 \cdot \{u\}^T \cdot \frac{\delta [K]}{\delta A} \{u\} \\ &\quad + \{u\}^T \frac{\delta \{F\}}{\delta A} \end{aligned} \quad (2)$$

$$[K] \cdot \{u\} - \{F\} = 0$$

$$\delta \{F\} / \delta A = 0$$

$$J = -1/2 \cdot \{u\}^T \cdot \frac{\delta [K]}{\delta A} \cdot \{u\} \quad (3)$$

3차원의 경우 J는 실제로 정의되지 않는다. 선형탄성파괴역학에서 J의 정의에 의해 탄성상태의 균열을 따라 위치에너지의 변화로부터  $J' = G = -\delta U / \delta A$  변환을 정의하는 것이 가능하다.<sup>8)</sup>

이와같은 방법은 탄소성상태 하에서도 합리적인 결과를 가져온다는 것이 결과에서 나타날 것이다. 이 방법은  $\delta[K]$ 를 결정하는데 있어서 일반적으로 균열선단근방에서 단지 몇개의 요소들 만으로 구성되므로 계산시간을 많이 줄일 수 있다.

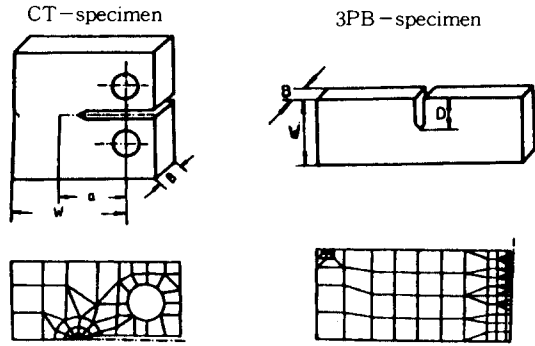


Fig.1 Geometries and FE meshes of specimens

3. 해석결과 및 고찰

유한요소해석은 다음 2개의 서로 다른 파괴인성 시험편에 의해 수행된다.

- compact tension specimen(CT)
  - three point bend specimen(3PB)
- 시험편의 모양과 유한요소 mesh는 그림1과 같다.

3.1 CT시험편

CT시험편의 유한요소해석은 표면과 중간부의 응력과 변형율이 다르므로 표면은 평면응력 상태로 중간부는 평면변형을 상태로 각각 2차원해석을 수행하였다.

\* 하중-변위곡선 : 평면변형을 상태에서의 해석결과를 비교하면 변위가 과소평가되고, 반면 평면응력 상태에서는 과대평가된다. 평면변형을 상태의 해석과 실험결과는 잘 부합한다.

\* 소성역 : 우리는 소성역으로부터 시험편의 응력 상태를 구하려고 한다. 이론적으로 작은 소성역의 크기는<sup>8)</sup>

$$r_p \cdot (2\pi \cdot R_p^2) / K_I^2 = \cos^2(\theta/2) \cdot [1 + 3 \cdot \sin^2(\theta/2) - 4\nu' \cdot (1 - \nu')] \quad (4)$$

여기서,  $\nu' = \begin{cases} \nu & \text{(plane strain)} \\ \text{Poisson's ratio} & \\ 0 & \text{(plane stress)} \end{cases}$

$r_p$  and  $\theta$  : 소성역의 극좌표  
 $R_p$  : 항복응력

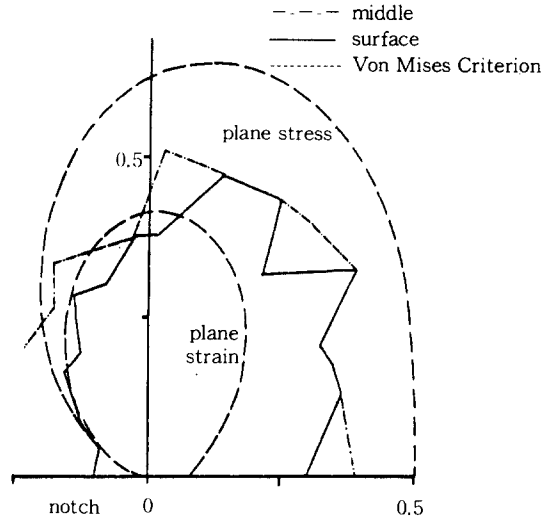


Fig.2 Normalised plastic zone at fracture load

낮은 하중에서 소성역의 형태와 크기는 시험편의 표면과 중간부의 차이가 적다. 중간부의 소성역은 평면변형을 상태하의 이론적인 형태에 가깝다. 그림2는 평면응력과 평면변형을 상태에서의 이론적인 소성역의 형태와 해석적인 파괴하중하의 소성역을 보여준다. 낮은 하중과 비교하여 한계하중에서의 소성역은 시험편의 표면에서 보다 중간에서 더 크다. 평면응력상태하에서 하중이 증가함에 따라 소성역은 이론적인 형태에 점점 더 가까워진다.

\* J적분과 COD : 그림 3은 J적분과 균열개구변위  $\delta$ 값 사이의 선형적인 관계를 보여준다.

$$J = \beta \cdot R_p \cdot \delta \quad (5)$$

유한요소해석으로부터  $\beta=1.2$ (표면),  $\beta=1.64$ (중간부)의 값을 얻는다.

3.2 3점 휨시험편(3PB)

해석은 평면변형을 상태의 2차원으로 수행된다.

\* 하중-변위곡선 : 가해진 평면변형을 상태하

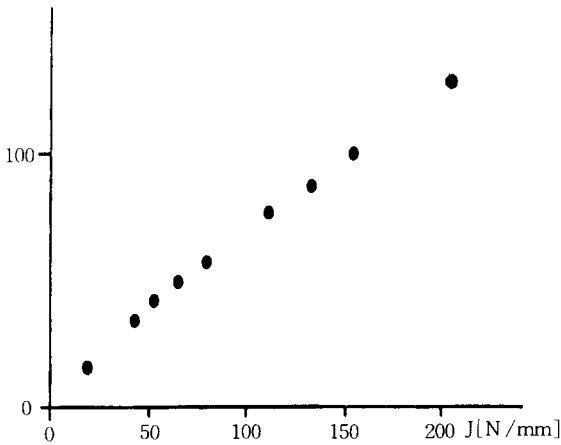
$\delta \cdot R_p$  [N/mm]

Fig.3 Correlation between J-integral and COD(middle)

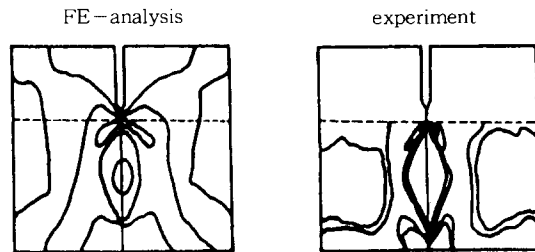


Fig.4 Contours of the plastic zones in 3PB specimen

의 해석은 시험데이터와 거의 완벽한 일치율을 나타낸다.

\* 소성역 : 소성역의 형태에 대한 실험과 계산결과가 잘 일치한다. (그림 4) 하중이 증가함에 따라 균열반대 쪽의 하중점에서 나타나는 소성역은 균열쪽에서 나타나는 소성역보다 더 빨리 확장되며, 최소한 같은 크기를 나타낸다. 그러므로 파괴역학계수(J,  $\delta$ )는 이와같은 영향을 받으나, 이것이 균열의 실제적인 거동을 묘사하지는 않는다.

\* J적분과 COD : J적분은 계산과 실험결과를 비교하는데 가장 적합하며, J적분의 탄소성계수들이 표1에 주어진다. 실측된 균열개구변위  $\delta$ 의 비교를 위해 유한요소해석의 보간법에 의해  $\delta$ 값을 구하였으며,  $\delta$ 에 대한 계산과 실험결과가 잘 일치된다. J와  $\delta$ 는 식(5)에서  $\beta=1.34$ 에 의해 연관된다.

#### 4. 적분의 계수 비교

Sumpter의 방법이 실험과 계산 모두에 잘 적용된다. 그는 하중 대 하중점변위곡선의 총에너지를 탄성과 소성 두부분으로 구분하여 계산하는 것을 제안하였다.<sup>5)</sup> :

$$J_s = \frac{\eta_e \cdot U_e}{B(W-a)} + \frac{\eta_p \cdot U_p}{B(W-a)} \quad (6)$$

여기서, 탄소성계수  $\eta_e$ 와  $\eta_p$ 는 해석결과로부터 구해지며, 또한 실험에서의 하중 대 하중점변위곡선으로부터  $\eta_e$ 이 구해진다.

표1로 부터 서로 다른 시편에서  $\eta_e$ 는 상대적인 균열길이  $a/W$ 에 따라 변하며, 같은 시편의 서로 다른 두께에 대해서는 무관하다는 것을 알 수 있다.

Table 1. Elastic and plastic factors  $\eta_e$  and  $\eta_p$ 

Specimen		a/w	$\eta_e$	$\eta_p$
CT	Plane Stress <sup>0</sup>	0.48	2.34	0.8
CT	Plane Stress <sup>0</sup>	0.45	2.36	0.6
CT	Plane Strain <sup>0</sup>	0.48	2.32	1.7
CT	Plane Strain*	0.48	2.33	
CT	Plane Strain*	0.53	2.28	
3PB	Plane Stress	0.37	1.71	1.2
CT	EX <sup>+</sup> *	0.48	2.34	
3PB	EX <sup>+</sup>	0.37	1.68	

<sup>0</sup> Specimen thickness 17 mm

\* Specimen thickness 25 mm

<sup>+</sup> Experimental data

#### 5. 한계하중의 계산

소성한계하중이란 가상변위증가량  $\delta_0$ 에 의해서 수행된 외적일의 증가량이 내적일의 증가량과 같거나 초과되는 하중으로 정의된다.<sup>10)</sup>

$$\delta W_{\text{ext}} \geq \delta W_{\text{int}} \quad (7)$$

재료의 slip선은 내적일을 결정하는데 있어서 정확하게 해석되어야 한다. 한계하중에 도달하기 위해서는 적어도 한개의 재하 구조부재단면이 완전히 소성상태로 되어야 한다. 여러가지 부재형상과 하중조건에 대한 한계하중의 값들이 문헌에서

주어지며<sup>10)</sup>, 한계하중값은 그 시험편의 노치가 유한곡률반경노치인지 피로균열노치인지에 무관하다. 이로부터 소성한계하중 상태의 시험편의 파괴가 피로균열 근방의 응력과 변형율의 특이성에 의해 영향을 받지 않는다는 결론을 내릴 수가 있으며, 따라서 그와같은 시험편으로부터 합리적인 파괴역학계수( $\delta_c$ ,  $J_c$  등)들을 얻는다는 것은 불가능하다.

\* CT시험편 : 다음 식은 시험편의 slip선에 의해 유도된 것이다.<sup>11)</sup>

$$P_L = 0.6R_p(1-a/W)^2 / (1+a/W)WB$$

\* 3PB시험편 : 소성역의 윤곽선으로 부터 한계하중은<sup>10)</sup>

$$P_L = 0.15R_p(W-a)^2$$

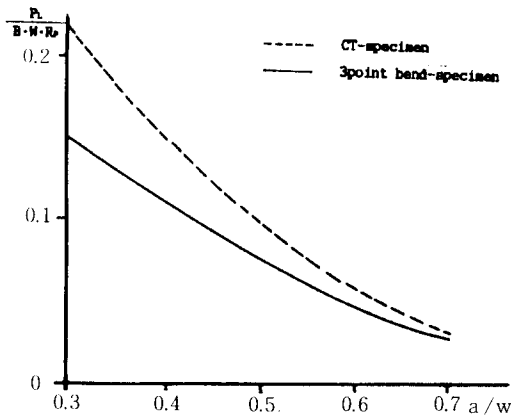


Fig.5 Evaluated limit load versus a/w

6. 결 론

2가지 파괴인성시험편에 대한 탄소성 유한요소 해석으로부터 J적분, COD와 같은 파괴역학계수들을 계산하였으며 그 결과 다음의 결론을 얻었다.

1. CT시험편의 해석에서 평면변형을 상태에서는 변위가 과소평가되며 평면응력상태에서는 과대평가된다. 한계하중에서의 소성역은 시험편의 표면에서 보다 중간에서 더 크며 평면응력상태에서 하중이 증가함에 따라 소성역의 형태는 이론적인

형태에 가까워진다. 또한, J적분과 COD는 선형적인 관계를 갖는다.

2. 3PB시험편의 해석에서는 평면변형을 상태에서 하중-변위곡선과 J적분-COD의 계산과 실험결과가 잘 일치한다. 하중이 증가함에 따라 균열 반대쪽의 하중점에서 나타나는 소성역은 균열쪽에서 나타나는 소성역보다 더 빨리 확장되며, 최소한 같은 크기를 나타낸다.

3. J적분계수는 Sumpter의 방법이 실험과 계산모두에 잘 적용되며, 서로 다른 시험편에 대해  $\eta_e$ 는 상대적인 균열길이 a/W에 따라 변하고 같은 시험편에서 서로 다른 두께에 대해서는 무관하다.

4. 한계하중의 계산에서 소성한계하중 상태의 시험편의 파괴가 피로균열 근방의 응력과 변형율의 특이성에 의해 영향을 받지 않는다.

참 고 문 헌

1. Barsoum, R. S, "Triangular Quarter-point Elements as Elastic and Perfect-plastic Crack Tip Elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.* 11, 85-98, 1977.
2. Henshell, R. D, Shaw, K. G, "Crack Tip Finite Elements are Unnecessary", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 9, 495-507, 1975.
3. Parks, D. M, "A Stiffness Derivative Finite Element Technique for Determination Crack Tip Stress Intensity Factors", *Int. J. of Fracture*, 10, No.4, 487-502, 1974.
4. Rice, J. R, Johnson, M. A, "The Role of Large Crack Tip Geometry Changes in Plane Strain Fracture", *Inelastic behavior of solids*, McGraw-Hill, 1970.
5. Sumpter, J. D. G, "Elastic-plastic Fracture Analysis and Design Using the Finite Element Method", PhD Thesis, Imperial college of science and technology, London, 1973.
6. Wells, A. A, "The Mechanics of the Fracture Transition in Yielding Material", CODA paper, 46, 1970.
7. Owen, D. R. J, Fawkes, A. J, *Engineering Fracture Mechanics Numerical Methods and Appl.* Pineridge Press, 1983.
8. Owen, D. R. J, Hinton, E, *Finite Elements in*

*Plasticity*, Pineridge Press, 1980.

9. Zienkiewicz, O. C. *The Finite Element Method*  
McGraw-Hill, London, 1977.
10. Kaninnen, M. F. *Advanced Fracture Mechanics*  
Oxford Univ Press, 312-322, 1985.
11. Anderson, T. L. *Fracture Mechanics*, CRC  
press, 177-188, 1991.

(접수일자 1994. 10. 8)