

유한요소와 경계요소의 조합에 의한 다층 구조계의 비선형 해석

Nonlinear Finite Element-Boundary Element Analysis of Multi-Layered Structural Systems

김 문 겸*
Kim, Moon-Kyum

허 택 녕**
Huh, Taik-Nyung

이 상 도***
Lee, Sang-Do

요 약

지하구조물의 주위지반은 일반적으로 퇴적층의 형성 또는 지각의 변동에 의해 다층구조를 가지게 되므로, 구조물 및 주위지반의 거동을 정확히 예측하기 위해서는 해석에 다층구조의 영향을 반영해야 한다. 본 연구에서는 다층으로 구성된 지하구조계를 대상으로 하여 구조물과 그 주변에는 비선형 유한요소를 사용하고, 비선형성이 상대적으로 미약한 주변 다층지반에는 선형 경계요소를 사용하여 재료의 비선형성과 비균질성을 고려한 효율적인 조합해석방법을 개발하고자 한다. 반무한영역에 설정되는 다층구조계를 경계요소로 해석할 경우 그 기본해가 제한되어 있으므로, 본 연구에서는 기존의 무한기본해를 이용하는 방법을 사용하였다. 무한기본해를 이용하는 내부영역문제의 경우 각각의 균질한 층을 부영역(subdomain)으로 분할하고 계방정식을 구성한 뒤에 접합면에 대하여 평형조건과 적합조건을 만족시켜 주는 방법을 사용하여 비균질성을 고려한다. 부영역으로 층을 분할한 내부영역문제의 경계요소해석 결과는 선형 유한요소해석 결과와 비교하여 검증하였고, 검증된 경계요소 프로그램을 비선형 유한요소 프로그램과 조합하였다. 조합해석 결과, 굴착부 주변의 응력 집중부에는 비선형 유한요소를 사용하고, 비선형의 영향이 미소한 주변의 다층지반에 대해서는 부영역에 의한 선형 경계요소를 사용하는 조합해석방법이 합리적이고 효율적임을 알 수 있었다.

Abstract

It is usual that underground structures are constructed within a multi-layered medium. In this paper, an efficient numerical modelling of multi-layered structural systems is studied using coupled analysis of finite elements and boundary elements. The finite elements are applied to the area in which the material nonlinearity dominates, and the boundary elements are applied to the far field where the nonlinearity is relatively weak. In the boundary element modelling of the multi-layered medium, fundamental solutions are not readily available. Thus, methods which can utilize existing Kelvin solutions are sought for the interior multi-layered domain problem. The interior domain problem which has piecewise homogeneous layers is analyzed using boundary elements with Kelvin solution, by discretizing each homogeneous subdomain and enforcing compatibility and equilibrium conditions between interfaces. Developed methodology is verified by comparing its results with those from the finite element analysis and it is concluded that coupled analysis using boundary elements and finite elements can be reasonable and efficient.

* 연세대학교 공과대학 토목공학과 부교수
** 연세대학교 산업기술연구소 선임연구원
*** 삼성건설(주) 평택기지현장

이 논문에 대한 토론을 1995년 6월 30일까지 본 학회에 보내 주시면 1995년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

지하구조계를 해석하는 방법으로 유한요소법, 경계요소법 등과 같은 수치해석방법이 전자계산기의 발달과 더불어 다각적으로 시도되어 왔다. 경계가 무한이나 반무한영역에 설정되는 문제의 경우, 굴착부 주변의 응력집중부에는 유한요소를 사용하고 비선형의 영향이 거의 없는 무한 및 반무한 영역에서는 경계요소를 사용하여 조합해석을 실시하는 것이 효율적이다^(1,2). 또한 지반은 일반적으로 퇴적층의 형성 또는 지각변동에 의해 다층구조를 가지게 되므로, 해석에 다층구조의 영향을 반영할 필요가 있다. 본 연구에서는 다층으로 구성된 지하구조계를 대상으로 구조물과 그 주변에는 비선형유한요소를 사용하고, 비선형성이 상대적으로 미약한 다층지반에는 선형경계요소를 사용하는 조합해석방법을 연구하고, 효율적인 해석프로그램을 개발하고자 한다. 반무한영역에 설정되는 다층구조계를 경계요소로 모형화할 때, 반무한 다층기본해의 유도과 수치해석화는 실제 적용에 제한사항이 따르므로⁽³⁾, 본 연구에서는 기존의 무한 기본해를 이용하여 각각의 층을 부영역(subdomain)으로 분할하고 계방정식을 구성한 뒤에, 접합면에서 평형조건과 적합조건을 만족시켜 주는 내부영역문제의 조합해석방법⁽⁴⁾을 사용한다. 유한요소와 경계요소의 조합방법으로는 경계요소의 계방정식을 유한요소형 계방정식으로 변환시키는 유한요소형 접근방법을 사용한다.

2. 다층구조계의 경계요소해석

경계요소법은 크게 직접 경계요소법과 간접 경계요소법으로 나눌 수 있다. 직접 경계요소법이 유한요소법과 조합하기에 용이하므로⁽⁴⁾ 본 연구에서는 직접 경계요소법에 의한 접근방법을 이용하도록 한다.

2.1 경계적분방정식

연속체 내의 한 점에서 응력텐서를 σ_{ij} , 물체력을 b_i 로 나타내면 평형방정식은 다음과 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{1}$$

대상영역 Ω 의 전체경계 Γ 를 기하학적 경계 Γ_u 과 역학적 경계 Γ_t 로 분할할 때, 경계조건은 Γ_u 과 Γ_t 에 대하여 각각 식 (2)와 같다.

$$u_i = \bar{u}_i, \text{ on } \Gamma_u, \quad t_j = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_j \text{ on } \Gamma_t \tag{2}$$

여기서 u_i 는 변위벡터, t_j 는 표면력벡터이며 \bar{u}_i 및 \bar{t}_j 는 기지의 변위벡터 및 표면력벡터이다. 또한 n_j 는 외부로 향한 수직벡터의 방향여현이다.

대상영역에 대하여 가중잔차방정식을 구성하면 식 (3)과 같다.

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ki,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) t_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_t} (\bar{t}_k - t_k) u_k^* d\Gamma \tag{3}$$

여기서 u_k^* 는 가중영역에서의 변위벡터이며, t_k^* 는 가중영역에서의 변위벡터에 대응하는 표면력벡터이다. 식 (3)을 두 번 부분적분하고 변형률-변위 관계를 이용하여 정리하면 다음과 같은 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ki,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma_u} \bar{u}_k t_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_t} u_k t_k^* d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} t_k u_k^* d\Gamma \tag{4}$$

여기서 영역 내 임의점 i 에서 x_p 의 방향으로 단위하중 δ_p^i 가 작용될 때의 응력을 σ_{pkj}^* 라고 하면 다음의 방정식이 성립된다.

$$\sigma_{pkj}^* + \delta_p^i = 0 \tag{5}$$

이 방정식의 해 (기본해)를 가중영역으로 하여 적분방정식을 경계문제화하면 다음과 같다.

$$c_{pk} u_k^i + \int_{\Gamma_u} \bar{u}_k t_{pk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_t} u_k t_{pk}^* d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_{pk}^* d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_k u_{pk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} t_k u_{pk}^* d\Gamma \tag{6}$$

여기서 u_{ik} 는 i 점에서 x_p 방향으로 가해진 단위하중에 의한 x_k 방향으로의 변위이고 t_{pk}^* 와 u_{pk}^* 는 각각 가중영역에서의 표면력과 변위이다. 또한 c_{pk} 는 경계면의 기하학적 형상에 의하여 결정되는 상수이다.

2.2 경계요소 계방정식

경계적분방정식은 한 점의 변위에 대하여 전체 경계 Γ 와 전체 영역 Ω 에 대한 적분항으로 표시된다. 경계적분방정식을 풀기 위해 경계를 요소화하고, 이 요소에 대한 근사해를 구하기 위한 계방정식을 구성한다. 경계적분방정식을 행렬 형태로 표현하기 위해 전체좌표계에 대한 변위벡터 \vec{u} 와 표면력벡터 \vec{t} 를 형상함수로 나타낸다. 변위벡터와 표면력벡터를 선형요소로 이산화하면 다음과 같다.

$$\vec{u} = [\phi] \vec{u}_n \tag{7}$$

$$\vec{t} = [\phi] \vec{t}_n \tag{8}$$

여기서 $[\phi]$ 는 형상함수행렬이며 \vec{u}_n 과 \vec{t}_n 은 각각 절점에서의 변위벡터와 표면력벡터이다. 경계적분방정식 (6)에 식 (7)과 (8)을 대입하고 물체력항을 무시하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[c] \vec{u} + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} [t^*] [\phi] d\Gamma \right) \vec{u}_n = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} [u^*] [\phi] d\Gamma \right) \vec{t}_n \tag{9}$$

여기서 N 은 경계상의 절점수를 나타낸다. 식 (9)를 수치적분의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$[c] \vec{u} + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{q=1}^L \det[J]_q w_q([t^*] [\phi]_q) \right] \vec{u}_n = \sum_{j=1}^N \left[\sum_{q=1}^L \det[J]_q w_q([u^*] [\phi]_q) \right] \vec{t}_n \tag{10}$$

여기서 $\det[J]$ 는 Jacobian 행렬, w 는 Gauss 적분의 가중치, L 은 경계요소의 수이다. 따라서 계방정식은 다음과 같은 행렬식으로 표시된다.

$$[H] \vec{u} = [G] \vec{t} \tag{11}$$

여기서 행렬 $[H]$ 와 $[G]$ 는 기본해로부터 계산되는 계수행렬이다.

2.3 부영역(Subdomain)

다층지반을 고려한 기본해의 유도는 반무한영역의 문제에 대한 기본해의 유도에 사용되는 투영점 (image point) 을 도입하여 무한탄성영역에 대한 Kelvin의 기본해에 층과 층 사이의 평형조건과 적합조건을 만족시켜주는 보충항을 추가하여 구성할 수 있다⁽⁵⁾. 이 때 층들이 평행하게 놓여 있지 않은 경우에는 보충항을 추가해야 하며 source point 는 고정된 하나의 층에 존재하므로 굴착부가 여러 층에 존재하는 경우에 적용이 어렵다. 반면에 다층구조를 구성하는 각각의 층이 등방성 균질체라는 가정 하에 대상영역을 분할하여 각각의 균질한 (piecewise homogeneous) 층을 부영역으로 모형화하면, 위의 문제는 해결이 쉽지만 그림 1에 보인 바와 같이 부영역과 부영역 사이의 접합면을 적절한 수의 요소로 이산화 (discretization) 해야만 한다. 그림 1에서 전체 영역 Ω 는 부영역 Ω^1 과 Ω^2 로 구성되며 Ω^1 과 Ω^2 는 접합면 Γ_1 를 공유한다. 부영역 Ω^1 의 경계는 외부경계 Γ^1 과 접합면 상의 경계 Γ_1 로 구성되고 부영역 Ω^2 의 경계는 외부경계 Γ^2 와 접합면 상의 경계 Γ_1 로 구성된다. 따라서 개개의 부영역에 대해 독립적으로 식 (11)과 같은 계방정식을 구성한 후, 이 식들을 조합하고 접합면 Γ_1 에서의 평형조건과 적합조건을 고려하여 전체 영역에 대한 계방정식을 얻는다.

그림 1에서 부영역 Ω^1 에 대해 계방정식을 구성하면 다음과 같다.

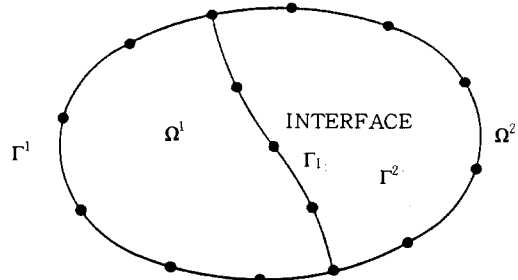


그림 1. 2개의 부영역으로 분할된 전체영역

$$\begin{bmatrix} [H^1] & [H_1^1] \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [G_1^1] \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_1 \end{matrix} \quad (12)$$

여기서 \vec{u}_1 과 \vec{t}_1 은 외부경계 Γ^1 에서의 절점 변위 벡터와 표면력벡터이고, \vec{u}_1 과 \vec{t}_1 은 Ω^1 에 속한 접합면 Ω^1 에서의 절점 변위벡터와 표면력벡터이다. 마찬가지로 부영역 Ω^2 에 대해 계방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} [H^2] & [H_1^2] \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{u}_2 \\ \vec{u}_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} [G^2] & [G_1^2] \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{t}_2 \\ \vec{t}_2 \end{matrix} \quad (13)$$

여기서 \vec{u}_2 와 \vec{t}_2 는 외부경계 Γ^2 에서의 절점 변위 벡터와 표면력벡터이고 \vec{u}_2 와 \vec{t}_2 는 Ω^2 에 속한 접합면 Ω^2 에서의 절점 변위벡터와 표면력벡터이다.

Ω^1 과 Ω^2 사이의 접합면 Γ_1 에서 적합조건과 평형조건을 각각 다음과 같다.

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \quad (14a)$$

$$\vec{t}_1 = -\vec{t}_2 = \vec{t}_1 \quad (14b)$$

식 (14)를 식 (12)와 (13)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} [H^1] & [H_1^1] & [0] \\ [0] & [H_1^2] & [H^2] \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [G_1^1] & [0] \\ [0] & -[G_1^2] & [G^2] \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_1 \\ \vec{t}_2 \end{matrix} \quad (15)$$

식 (15)는 행렬 $[H]$ 와 $[G]$ 가 banded 형태인 점을 제외하면 식 (11)의 계방정식과 형태가 같다.

접합면상의 변위벡터와 표면력벡터는 모두 미지값이며 문제의 경계조건을 Neumann type 이라고 가정하면 식 (15)는 다음과 같이 미지값을 좌변에, 기지값을 우변에 구분하여 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [H^1] & [H_1^1] & -[G_1^1] & [0] \\ [0] & [H_1^2] & [G_1^2] & [H^2] \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_1 \\ \vec{t}_1 \\ \vec{u}_2 \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [G^1] & [0] \\ [0] & [G^2] \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_2 \end{matrix} \quad (16)$$

또는 문제의 경계조건을 Dirichlet type 이라고 가정하면 식 (15)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [G^1] & [G_1^1] & -[H_1^1] & [0] \\ [0] & -[G_1^2] & -[H_1^2] & [G^2] \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_1 \\ \vec{u}_1 \\ \vec{t}_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} [H^1] & [0] \\ [0] & [H^2] \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{matrix} \quad (17)$$

식 (16) 또는 (17)을 식 (2)의 경계조건에 따라 정리하면 다음과 같다.

$$[A] \vec{x} = \vec{f} \quad (18)$$

여기서 \vec{x} 는 미지의 표면력벡터와 변위벡터를 의미하고 \vec{f} 는 지정된 변위와 표면력 값들의 영향을 고려한 기지의 벡터이며, $[A]$ 는 \vec{x} 에 따라 $[H]$ 또는 $[G]$ 로 구성된 계수행렬이다. 그림 1에서 대상영역의 전체 경계를 N 개의 절점으로 구성한 경우, 식 (18)의 $[A]$ 는 $2N \times 2N$ 의 크기를 가지며 계방정식 (18)의 해를 구함으로써 접합면의 표면력과 변위를 포함한 $2N$ 개의 미지값들을 구할 수 있다.

2.4 접합면의 처리

다층구조계를 선형경계요소로 모형화할 때, smooth한 경계를 갖지 않는 곳에는 표면력 불연속조건(traction discontinuity condition)을 위해 동일한 좌표에 복절점(double node)을 사용해야만 한다⁽⁴⁾. 즉, 이웃한 요소에서 각각 취해진 단위 수직벡터(unit normal vector)가 서로 이루는 각이 크면 요소와 요소가 만나는 절점에서 단위 수직벡터를 정의할 수 없으므로, 하중과 변위의 관계가 아닌 표면력과 변위의 관계로 구성되는 경계요소법에서는 이러한 경우 복절점이 사용되며 복절점을 이루는 두 절점은 동일한 변위를 갖는다. 특히, 이웃한 부영역에서 복절점이 사용된 모서리가 만나는 경우 다음과 같이 경계조건을 부여하여 해를 구한다.

그림 1에서 Ω^1 에 속한 외부경계 Γ^1 과 Ω^2 에 속한 외부경계 Γ^2 와 접합면 Γ_I 가 동시에 만나는 부분을 복절점을 포함하여 나타내면 그림 2와 같다. 설명을 위하여 두 부영역이 공유하는 접합면을 분리하였다. 그림 2에서 n번째 요소와 n+1번째 요소는 각각 Ω^1 에 속한 외부경계 Γ^1 과 Ω^1 에 속한 접합면 Γ_I 상에 있고, m+1번째 요소와 m번째 요소는 Ω^2 에 속한 외부경계 Γ^2 와 Ω^2 에 속한 접합면 Γ_I 상에 있다. Ω^1 에서 n번째 요소의 2번 절점과 n+1번째 요소의 1번 절점은 동일한 좌표를 갖는 복절점이며 Ω^2 에서 m+1번째 요소의 1번 절점과 m번째 요소의 2번 절점 또한 동일한 좌표를 갖는 복절점이다.

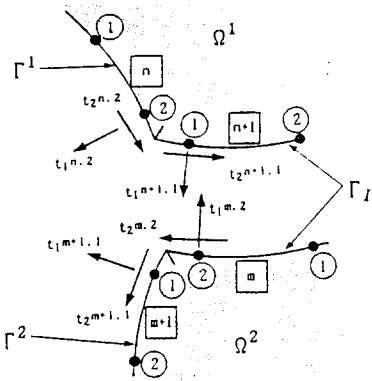


그림 2. 접합면의 경계조건

그림에서 외부경계에 작용하는 표면력 t_i^k 는 j번째 요소의 k 절점에 작용하는 국부좌표계의 i방향 표면력성분을 의미한다. 그림 2의 복절점에서 미지값은 외부경계에 작용하는 표면력성분 4개, 접합면에 작용하는 표면력성분 4개, Ω^1 의 복절점에서의 변위성분 2개, Ω^2 의 복절점에서의 변위성분 2개를 합하여 모두 12개이다. 접합면에서 Ω^1 에 속한 n+1번째 요소의 1번 절점과 Ω^2 에 속한 m번째 요소의 2번 절점에 대해 식 (12)와 같이 적합조건과 평형조건을 적용하면 미지값은 4개의 외부경계 표면력성분, 2개의 접합면 표면력성분, 2개의 변위성분으로 각각 줄며 만약, 외부경계에 작용하는 표면력성분 4개 모두가 지지값이거나 3개의 외부

경계 표면력성분과 1개의 변위성분이 지지값이라면 Hooke의 법칙으로부터 주어지는 4개의 연립방정식의 해를 구함으로써 나머지 4개의 미지값들을 구할 수 있다⁽⁶⁾. 그러므로 본 연구에서 총과 총사이의 접합면이 외부경계와 만나는 경우, 모서리에서 2개의 복절점이 각각 1개의 절점을 접합면 상에서 공유하므로 3개의 절점이 사용되며 외부경계에 있는 2개의 절점에 대해 경계조건을 적용하여 문제의 해를 구한다.

3. 유한요소-경계요소의 조합

유한요소와 경계요소의 조합은 경계요소의 계방정식을 유한요소형 계방정식으로 변환시키는 유한요소형 접근 방법을 사용한다⁽⁷⁾. 그림 3과 같이 전체 대상영역을 유한요소영역과 경계요소영역으로 구성하면, 경계요소영역의 전체경계 Γ 는 유한요소영역과 접합면을 공유하는 경계 Γ^{FE} 와 접합면을 제외한 경계 Γ^{BE} 로 구성된다. 접합면 Γ^{FE} 에서의 경계조건은 식 (14)와 같다. 경계요소 계방정식 (11)을 Γ^{FE} 와 Γ^{BE} 에 따라 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} [H^{FE}] & [H^{BE}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_I^{FE} \\ \bar{u}_{BE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^{FE}] & [G^{BE}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t}_I^{FE} \\ \bar{t}_{BE} \end{bmatrix} \tag{19}$$

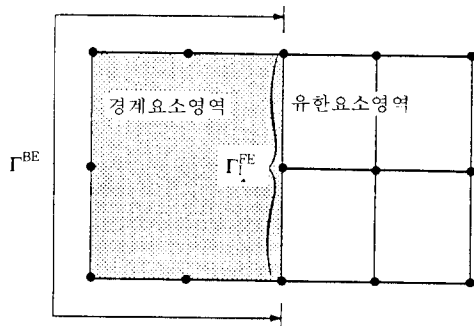


그림 3. 유한요소영역과 경계요소영역으로 분할된 전체영역

여기서 \vec{u}^{FE} 와 \vec{t}^{FE} 는 Γ^{FE} 에서의 변위와 표면력 벡터를 의미하고 \vec{u}^{BE} 와 \vec{t}^{BE} 는 Γ^{BE} 에서의 변위와 표면력 벡터를 나타낸다. 경계 Γ^{BE} 에 대해 식 (2)와 같이 경계조건을 적용하면 식 (19)는 다음 식과 같다.

$$\begin{bmatrix} [H^{FE}] & [H^{BE}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}^{FE} \\ \vec{V}^{BE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^{FE}] & [G^{BE}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t}^{FE} \\ \vec{V}^{BE} \end{bmatrix} \quad (20)$$

윗 식에서 \vec{V}^{BE} 는 Γ^{BE} 에서의 미지 변위와 표면력 벡터를 의미하고 \vec{V}^{BE} 는 Γ^{BE} 에서의 기지 변위와 표면력 벡터를 나타낸다. 이 때 경계조건에 따라 행렬 $[H]$ 와 $[G]$ 도 재구성되며 \vec{u}^{FE} 와 \vec{V}^{BE} 의 크기에 따라 부행렬로 분할하면 식 (21)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}^{FE} \\ \vec{V}^{BE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] \\ [G_{21}] & [G_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t}^{FE} \\ \vec{V}^{BE} \end{bmatrix} \quad (21)$$

위의 두번째 관계식에서 \vec{V}^{BE} 를 \vec{V}^{BE} 로 표현하면 다음과 같다.

$$\vec{V}^{BE} = [H_{22}]^{-1} [[G_{21}] \vec{t}^{FE} + [G_{22}] \vec{V}^{BE} - [H_{21}] \vec{u}^{FE}] \quad (22)$$

식 (22)를 식 (21)의 첫번째 관계식에 대입하고 경계 Γ^{FE} 에서의 미지의 표면력 벡터 \vec{t}^{FE} 와 미지의 변위 벡터 \vec{u}^{FE} 에 대해 정리하면 식 (23)과 같다.

$$\begin{aligned} & [[H_{11}] - [H_{12}] [H_{22}]^{-1} [H_{21}]] \vec{u}^{FE} \\ & = [[G_{11}] - [H_{12}] [H_{22}]^{-1} [G_{21}]] \\ & + [[G_{12}] - [H_{12}] [H_{22}]^{-1} [G_{22}]] \vec{V} \end{aligned} \quad (23)$$

\vec{u}^{FE} , \vec{t}^{FE} 와 \vec{V}^{BE} 의 계수행렬을 각각 $[H_{11}^*]$, $[G_{11}^*]$ 와 $[G_{12}^*]$ 로 표현하면 식 (23)은 다음과 같다.

$$[H_{11}^*] \vec{u}^{FE} = [G_{11}^*] \vec{t}^{FE} + [G_{12}^*] \vec{V}^{BE} \quad (24)$$

윗 식에서 $[G_{11}^*]^{-1}$ 를 양변에 곱하고 형상함수를 이용하여 절점에서의 변위와 표면력 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & [[N] [G_{11}^*]^{-1} [H_{11}^*]] \vec{u}^{FE} = [N] \vec{t}^{FE} \\ & + [[N] [G_{11}^*]^{-1} [G_{12}^*]] \vec{V}^{BE} \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 \vec{u}^{FE} , \vec{t}^{FE} 와 \vec{V}^{BE} 는 절점에서의 변위와 표면력이며 $[N]$ 은 형상함수의 적분으로 얻어진다.

따라서 식 (25)는 다음과 같이 유한요소 형태로 쓸 수 있다.

$$[K]^{BE} \vec{u}^{FE} = \vec{f}^{FE} + \vec{F}^{BE} \quad (26)$$

여기서 $[K]^{BE}$ 는 Γ^{BE} 로부터 구한 대칭강성도행렬이며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [K]^{BE} = & \frac{1}{2} [[N] [G_{11}^*]^{-1} [H_{11}^*] \\ & + ([N] [G_{11}^*]^{-1} [H_{11}^*])^T] \end{aligned} \quad (27)$$

그리고 \vec{f}^{FE} 와 \vec{F}^{BE} 는 각각 Γ^{FE} 와 Γ^{BE} 에 작용하는 외부 하중으로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{f}^{FE} &= [N] \vec{t}^{FE} \\ \vec{F}^{BE} &= [[N] [G_{11}^*]^{-1} [G_{12}^*]] \vec{V}^{BE} \end{aligned} \quad (28)$$

경계요소의 계방정식은 하중-변위의 관계를 갖게 되었으므로, 경계요소의 강성도행렬, 하중벡터를 유한요소와 경계요소의 접합부인 Γ^{FE} 에서 공유하는 절점에 대하여 탄소성 유한요소에 대한 강성도행렬, 하중벡터와 각각 조합하면, 유한요소 형태의 전체 강성도행렬과 하중벡터를 구성할 수 있다.

소성이론에 의한 유한요소 영역에서의 증분형태의 평형방정식은 다음과 같다.

$$[K^{ep}]^{FE} \vec{du}^{FE} = \vec{dF}^{FE} \quad (29)$$

여기서 $[K^{ep}]^{FE}$ 는 탄소성 강성도행렬이며 \vec{du}^{FE} 와 \vec{dF}^{FE} 는 각각 절점변위의 증분과 외부 하중에

의한 등가절점하중의 증분을 의미한다. 조합해석에 적용하기 위해 식 (29)의 평형방정식을 경계요소 영역에서 변환된 계방정식 (26)과 Γ^{FE} 에 따라 조합하여 전체 영역에 대한 하중 변위 관계식을 구성하면 다음과 같다.

$$([K^{ep}]^{FE} + [K]^{BE})(\vec{du}^{FE} + \vec{du}_i^{FE}) = (\vec{dF}^{FE} + \vec{df}_i^{FE} + \vec{dF}_i^{BE}) \quad (30)$$

이로부터 전체 강성도행렬과 전체 하중의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$[K]^G \vec{du}^G = \vec{dF}^G \quad (31)$$

여기서 $[K]^G$ 는 조합된 전체 강성도행렬, \vec{du}^G 는 조합된 전체 변위의 증분, \vec{dF}^G 는 조합된 전체 외부하중의 증분을 나타낸다. 조합된 전체 강성도행렬과 조합된 전체 외부하중의 증분 및 변위의 증분을 이용하여 비선형 유한요소해석 알고리즘⁽⁸⁾에 따라 조합해석을 실시한다.

4. 수치해석 및 검증

본 장에서는 내부영역문제의 다층구조계를 부영역에 의한 경계요소법으로 해석하여 얻은 결과를 선형 유한요소를 사용하여 얻은 해석결과와 비교하여 경계요소 프로그램의 검증을 실시한다. 또한, 검증된 부영역에 의한 경계요소 프로그램을 비선형 유한요소 프로그램과 조합하여 해석을 실시하고 얻은 결과를 비선형 유한요소 에 의한 해석결과와 비교하도록 한다.

4.1 부영역에 의한 경계요소법

해석모형은 그림 4와 같이 지표면으로부터 깊이 25m에 지름 10m의 원공이 있는 평면변형률 상태의 2층 구조로서 지표면으로부터 첫번째 지층의 깊이는 10m이다. 하중조건은 원공주위에 0.4MPa의 내압을 받는 경우이며, 물체력의 영향은 무시하였다. 이 외의 본 해석에 사용된 주요물성은 표 1과 같다.

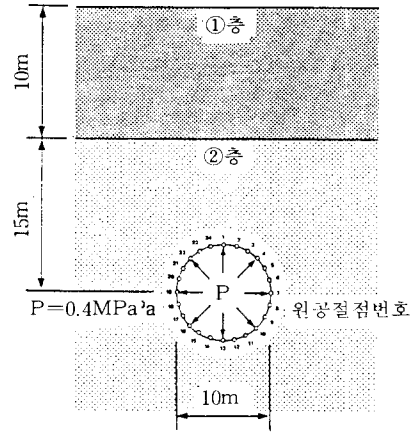


그림 4. 해석대상(2층)

표 1. 해석대상의 물성(2층)

층	탄성계수 (MPa)	포아송비	집착력* (MPa)	내부마찰각* (deg.)
1	300	0.30	0.1	10
2	600	0.25	0.3	20

(*: 조합 및 비선형 해석시)

그림 5는 190개의 4절점 등매개요소와, 227개의 절점을 사용한 유한요소망을 도시했으며, 그림 5와 동일한 영역의 경계와 원공주위에 대하여 88개의 선형 경계요소와 복절점을 포함하여 95개의 절점을 사용한 경계요소망을 그림 6에 도시하였다.

두 해석결과로부터 원공주위의 수평방향 변위와 수직방향 변위를 대상으로 표 2에 나타내었다. 표에서 보는 바와 같이 수평변위는 최대 2.09%, 수직변위는 최대 5.77%의 차를 보이고 있지만 대

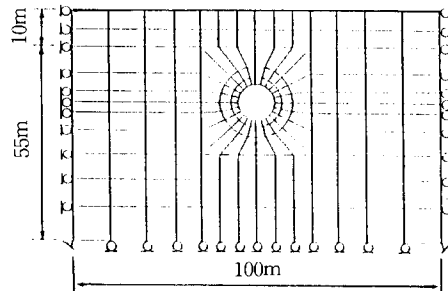


그림 5. 유한요소 해석모형

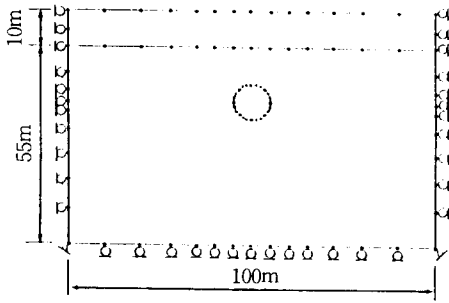


그림 6. 경계요소 해석모형

표 2. 원공변위(선형해석)

(단위 : cm)

절점	유한요소해석		경계요소해석		해석차(%)	
	수평변위	수직변위	수평변위	수직변위	수평변위	수직변위
1	0.000	0.562	0.000	0.574	0.000	2.135
2	0.099	0.546	0.101	0.557	2.020	2.015
3	0.191	0.498	0.195	0.510	2.094	2.410
4	0.271	0.425	0.276	0.435	1.845	2.353
5	0.332	0.331	0.338	0.339	1.807	2.417
6	0.372	0.224	0.377	0.229	1.344	2.232
7	0.385	0.112	0.390	0.112	1.299	0.000
8	0.372	0.000	0.377	-0.003	1.344	-
9	0.333	-0.104	0.339	-0.110	1.802	5.769
10	0.272	-0.193	0.277	-0.201	1.838	4.145
11	0.192	-0.261	0.196	-0.270	2.083	3.448
12	0.099	-0.305	0.101	-0.314	2.020	2.951
13	0.000	-0.319	0.000	-0.329	0.000	3.135

$$*해석차(\%) = \frac{\text{경계요소해석} - \text{유한요소해석}}{\text{유한요소해석}} \times 100$$

체적으로 두 해석결과는 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한 본 예제와 같은 구조물에서 중요시 되는 원공의 천정과 측벽에서 발생하는 변위를 중심으로 해석차를 비교하여 보면, 수평변위의 경우는 원공의 측벽(절점 7)에서 1.299%, 수직변위의 경우는 원공의 천정(절점 1)에서 2.135%를 보이고 있음을 알 수 있다. 그림 7에는 표 2의 해석결과를 도시한 것이다. 그림에 보인 바와 같이 경계요소해석에 의한 수평변위와 수직변위는 유한요소에 의한 변위와 잘 일치하고 있지만 유한요소에 의한 변위보다 크게 나타나고 있다. 이는 기본해를 사용하는 경계요소법에 의한 해석결과가 상대적으로 엄밀해에 접근하고 있음을 보여준다.

4.2 비선형 유한요소-경계요소 조합해석

조합해석의 검증을 위해 전 절의 예제에서 사용된 동일한 물성, 하중조건 및 기하학적 형상을 가지고 비선형 해석을 실시하였다. 이 때, 조합해석 시 재료의 항복규준으로 Mohr-Coulomb 파괴규준을 사용하였다. 비선형 유한요소해석을 위한 요소망은 전 절의 선형 유한요소망을 동일하게 사용하였고, 동일한 영역에 대하여 조합해석을 실시하기 위하여 경계요소영역에는 88개의 선형 경계요소와 복절점을 포함하여 95개의 절점을, 유한요소영역에는 48개의 4절점 등대개요소와 72개의 절점을 사용하여 구성된 조합요소망을 그림 8에 도시하였다.

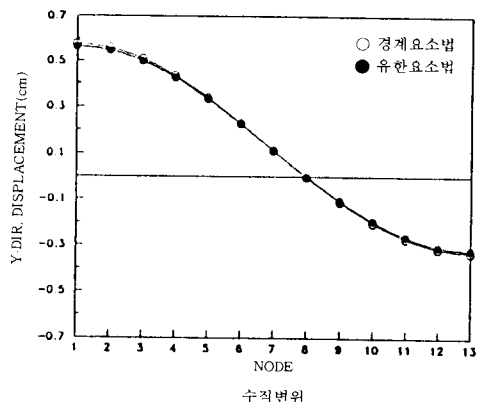
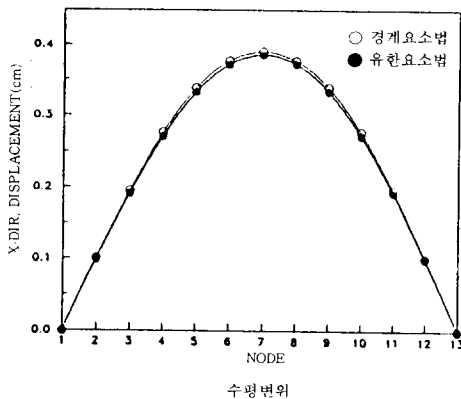


그림 7. 원공변위(선형해석)

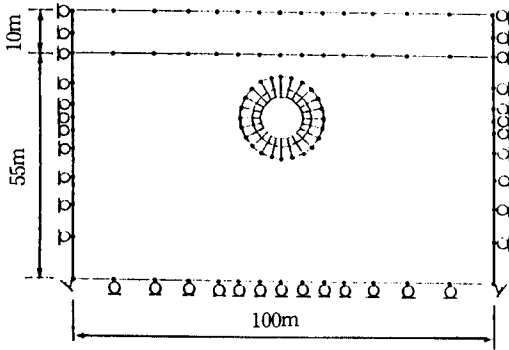


그림 8. 조합해석모형

조합해석 및 비선형 유한요소해석을 수행한 결과는 원공에서의 수평변위와 수직변위를 중심으로 표 3에 나타내었다. 표에서 보는 바와 같이 수평변위는 최대 3.061%, 수직변위는 최대 3.509%의 차를 보이고 있지만 대체적으로 두 해석결과는 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한 원공의 천정과 측벽에서 발생하는 변위를 중심으로 해석차를 비교하여 보면, 수평변위의 경우는 원공의 측벽(절점 7)에서 0.774%, 수직변위의 경우는 원공의 천정(절점 1)에서 2.349%를 보이고 있음을 알 수 있다. 그림 9는 표 3의 해석결과를 도시한 것이다. 그림에 보인 바와 같이 조합해석에 의한 수평변위와 수직변위는 비선형 유한요소해석에 의한 변위와 잘 일치하고 있지만, 전 절의 예제에서와 같이 비선형 유한요소해석에 의한 변위보다 크게 나타남을 알

표 3. 원공변위(비선형해석)

(단위 : cm)

절점	유한요소해석		조합해석		해석차(%)	
	수평변위	수직변위	수평변위	수직변위	수평변위	수직변위
1	0.000	0.596	0.000	0.610	0.000	2.349
2	0.098	0.580	0.101	0.594	3.061	2.414
3	0.192	0.533	0.196	0.546	2.083	2.439
4	0.277	0.456	0.281	0.469	1.444	2.851
5	0.345	0.355	0.348	0.366	0.870	3.099
6	0.388	0.239	0.391	0.246	0.773	2.929
7	0.403	0.116	0.406	0.119	0.744	2.586
8	0.388	-0.004	0.391	-0.004	0.773	0.000
9	0.345	-0.114	0.348	-0.118	0.870	3.509
10	0.279	-0.207	0.282	-0.213	1.075	2.899
11	0.195	-0.277	0.198	-0.283	1.538	2.166
12	0.100	-0.321	0.102	-0.327	2.000	1.869
13	0.000	-0.336	0.000	-0.341	0.000	1.488

$$* \text{해석차}(\%) = \frac{\text{조합해석} - \text{유한요소해석}}{\text{유한요소해석}} \times 100$$

수 있다.

표 4에는 원공주위에서 발생하는 수평응력과 수직응력을 비교하였다. 이 때, 유한요소영역의 응력은 Gauss점에서 발생하는 응력을 원공주위의 절점응력으로 환산한 값이다. 표에서 보는 바와 같이 유한요소해석 결과를 기준으로 원공절점의 수평응력은 최대 1.974%, 수직응력은 최대 -2.542%의 차이를 보이며 잘 일치함을 알 수 있다. 그림 10에는 표 4의 수직응력과 수평응력을 도시한 것이다.

한편 원공주위의 응력상태를 분석하기 위하여

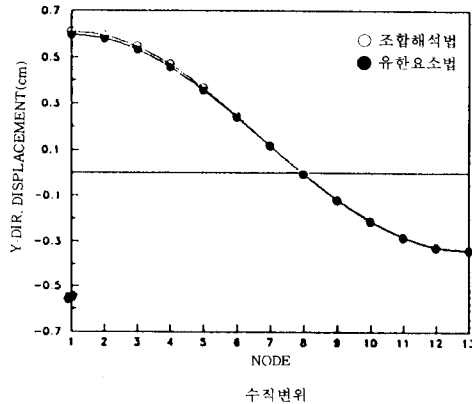
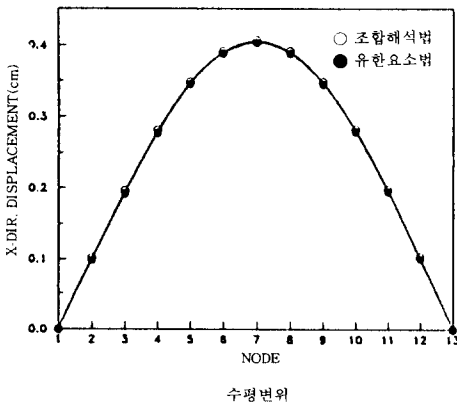


그림 9. 원공변위(비선형해석)

표 4. 원공에서의 절점응력(비선형해석)
(단위 : MPa)

절점	유한요소해석		조합해석		오차(%)	
	수평응력	수직응력	수평응력	수직응력	수평응력	수직응력
1	0.292	-0.254	0.290	-0.250	-0.685	-1.575
2	0.294	-0.252	0.295	-0.250	0.340	-0.794
3	0.298	-0.247	0.300	-0.245	0.671	-0.810
4	0.302	-0.242	0.305	-0.240	0.993	-0.826
5	0.304	-0.237	0.305	-0.235	0.329	-0.844
6	0.305	-0.235	0.310	-0.230	1.639	-2.128
7	0.304	-0.236	0.310	-0.230	1.974	-2.542
8	0.303	-0.238	0.305	-0.235	0.660	-1.261
9	0.302	-0.241	0.300	-0.240	-0.662	-0.415
10	0.300	-0.246	0.300	-0.245	0.000	-0.407
11	0.298	-0.249	0.300	-0.250	0.671	0.402
12	0.296	-0.252	0.300	-0.250	1.351	-0.794
13	0.295	-0.254	0.300	-0.250	1.695	-1.575

그림 11에는 원공중심으로부터 수평거리에 따른 응력을 도시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 두 해석방법에 의한 원공주위의 응력도 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다. 따라서 본 예제와 같이 재료의 비선형과 비균질성을 포함한 다층구조계에 본 논문에서 개발된 조합해석 프로그램이 적용될 수 있음을 보였다. 또한 내부영역문제의 비균질한 영역을 부영역으로 분할하고 각각의 부영역에 무한 기본해를 이용하는 경계요소법이 비균질한 문제에 적용될 수 있음을 보였다.

5. 결 론

지하구조계의 해석에 경계요소법을 사용하면 유한요소법에 비하여 입력자료가 간단하고 해석 수행의 소요시간이 적으며, 높은 정확도를 가진 해석결과를 얻을 수 있다. 그러나 비균질성과 비선형성을 가진 문제에 경계요소법을 적용하려면 비균질성과 비선형성을 고려한 기본해가 있어야 하며, 기본해가 있어도 전체영역에 대한 적분수행의 연산소요시간이 증대되어 비효율적이다. 따라서 비균질성과 비선형성을 고려해야 하는 지하구조계의 경계요소해석시 실제문제에 접근하는데 어려움이 있었다.

본 논문에서는 재료의 특성이 상이한 지층을 부영역으로 이산화함으로써 비균질성을 고려한 내부영역문제의 경계요소프로그램을 개발하고, 그

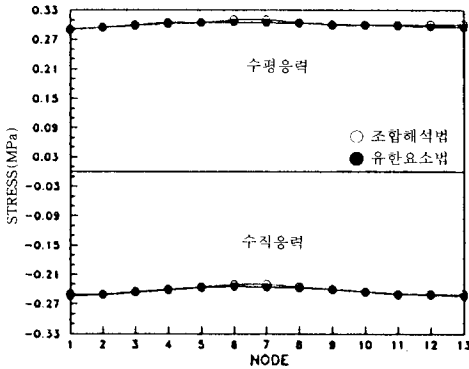


그림 10. 원공에서의 절점응력(비선형해석)

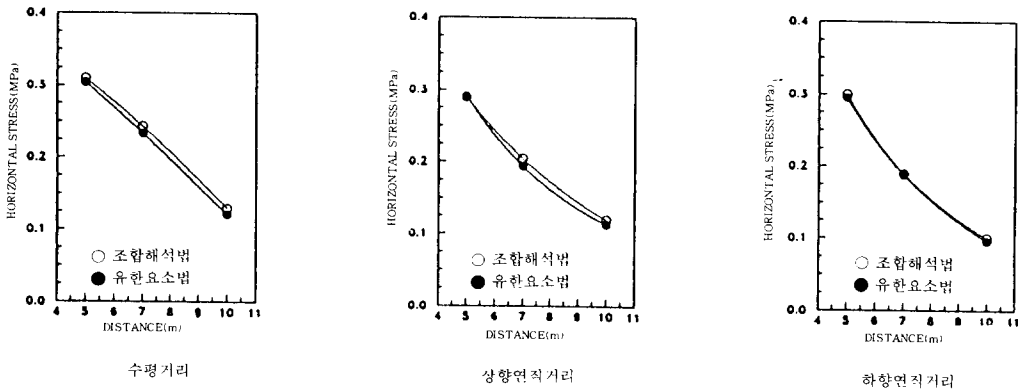


그림 11. 원공주변에서의 절점응력(비선형해석)

해석결과를 기존의 유한요소법에 의한 해석결과와 비교하여 잘 일치함을 보였다. 따라서 특수한 기본해를 사용하지 않고 기존의 무한기본해를 사용하는 알고리즘에 의하여 비균질성을 고려할 수 있음을 보였다. 재료의 비선형성을 고려하기 위하여 본 논문에서 개발된 경계요소 프로그램을 비선형 유한요소 프로그램과 조합하여 비선형해석을 실시하였으며, 그 결과와 비선형 유한요소로만 수행한 해석결과를 비교하여 3% 미만의 미소한 범위내에서 수렴함을 보였다. 따라서 응력집중부에만 비선형 유한요소를 조합하여 해석함으로써 전체영역에 대해 비선형해석을 실시하는 경우에 비해 큰 오차 없이 비선형성을 효율적으로 고려할 수 있었다. 따라서 굴착부 주변의 응력집중부에는 비선형 유한요소를 조합하여 사용하고, 비선형의 영향이 상대적으로 미소한 주변의 다층구조계에는 부영역으로 분할된 경계요소를 사용하는 본 논문의 조합해석 방법은 타당하다고 판단되며, 재료의 비선형성과 비균질성을 포함하고 있는 다층지하구조계의 해석방법으로 본 논문에서 개발된 조합해석방법을 제안할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 연세대학교 학술연구비의 지원으로 진행된 것으로 재단에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. 황학주, 김문겸, 임운목, "유한요소와 경계요소의 조합에 의한 반무한영역 문제의 비선형해석", 한국전산구조공학회지, 제2권, 제1호, 1988, pp. 55-64.
2. 황학주, 김문겸, 허택녕, 나경웅, "물체력이 작용되는 반무한영역 문제의 비선형유한요소-경계요소 조합해석", 대한토목학회논문집, 제11권, 제1호, 1991, pp.45-53.
3. Beskos, D. E., "Introduction to Boundary Element Methods", *Boundary Element Methods in Mechanics*, 1987, pp.12-14.
4. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, 1984, pp.79-81.
5. Brebbia, C. A. and Walker, S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, 1980, pp.102-111.
6. Rudolphi, T. J., "An Implementation of the Boundary Element Method for Zoned Media with Stress Discontinuities", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 19, 1983, pp.1-15.
7. Vallabhan, C. V. Girija, "Coupling of BEM /FEM Technology : An Overview", *Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer, Computational Mechanics Publications*, 1987, pp.15-30.
8. Owen, D. R. J. and Hinton, E., *The Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press, 1980.

(접수일자 1994. 1. 19)