

# 현수교의 기하학적 비선형해석

## Geometrically Nonlinear Analysis of Suspension Bridges

방 명 석\*  
 Bang, Myung-Suk

.....  
 요약

현수교의 기하학적 비선형거동을 해석할 수 있는 해석방법을 개발하고 해석을 실시하였다. 해석은 사하중 하에서의 초기형상해석과 활하중하에서의 비선형해석의 2단계로 해석하는 알고리즘을 개발하였다. 선형해석 결과와 비선형해석결과를 비교할 때 기하학적인 비선형효과가 매우 크므로 해석 및 설계시에 반드시 고려해야 함을 알 수 있다. 해석치와 측정치를 비교분석한 결과 새로운 알고리즘이 매우 유용함을 보여주고 있다.

Abstract

The purpose of this study is to develop the analytical method and to analyze the geometrically nonlinear behavior of suspension bridges. Two step algorithm is developed to analyze the initial profile under the deal load and the nonlinearity under the live load. Since the geometrically nonlinear effect is great comparing with the linear analysis, it should be considered in the analysis and design. The comparison between analysis and measurement shows that the new algorithm is effective.

.....

1. 서 론

현수교의 유한요소해석을 위한 케이블요소는 Ernst의 등가탄성계수를 이용한 트러스요소<sup>(1,3)</sup>, 비선형트러스요소<sup>(4)</sup>, 3절점 트러스요소<sup>(5-10)</sup> 및 탄성현수케이블요소<sup>(11)</sup> 등이 있다. Ernst의 등가트러스요소는 현수곡선을 이루는 케이블부재를 직선부재로 가정하고 그 대신 기하학적 비선형성을 고려할 수 있도록 부재의 탄성계수를 등가탄성계

수로 대체하여 선형의 변위-변형도 관계를 가정하는 방법이다. Ernst의 등가트러스요소는 새그(sag)가 비교적 작은 사장교의 주케이블 등의 해석에는 약간의 오차를 허용하는 유용한 요소로 사용될 수 있지만 현수교와 같이 단일케이블로서 새그가 큰 경우에는 비선형트러스요소와 마찬가지로 여러개의 요소로 나누어 해석해야만 원하는 정도의 해를 얻을 수 있는 요소이다. 케이블요소를 모델링하는 가장 일반적인 방법으로는 비선형트

\* 한국건설기술연구원

이 논문에 대한 토론을 1995년 3월 31일까지 본 학회에 보내 주시면 1995년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

러스요소를 이용하는 방법이 있다. 비선형트러스 요소를 이용하여 해석한 경우에는 요소수가 적은 경우부터 점점 요소수를 증가시키며 해석한 결과, 비선형트러스요소의 요소수가 많아질수록 정해에 수렴해 가는 것을 알 수 있다. 일반적으로 현수교를 해석하는 경우에 행거가 부착된 곳은 모두 절점으로 모델링해서 해석해야 하기 때문에 비선형 트러스요소를 사용해서 수치해석을 위한 모델링을 하면 충분히 정확한 해를 얻을 수 있다. 따라서 단지 완성계의 현수교에 대한 정적해석만을 위해서는 비선형트러스요소를 사용해도 충분하다. 하지만 현수교의 시공단계별 해석시, 특히 행거가 아직 부착되지 않은 주케이블의 시공단계 해석시에는 더 효율적인 케이블요소를 사용함으로써 적은 수의 케이블요소로도 정밀한 해를 얻을 수 있다. 이 경우에 최근에 많이 사용되는 것이 탄성현수케이블요소로서 요소의 갯수에 의해 발생하는 오차를 최소화할 수 있다. 본 연구에서는 탄성현수케이블요소를 사용한 기하학적 비선형해석을 수행하기 위하여 3차원 탄성현수케이블요소에 대한 강성행렬을 구성하였다. 또한 이 프로그램의 정확성을 검증하기 위하여 실측치와 비교·분석하였다.

2. 3차원 탄성 현수케이블요소

그림 1의 케이블요소는 직각좌표계(0, 0, 0)의 i 단과 (l<sub>x</sub>, l<sub>y</sub>, l<sub>z</sub>)의 j단으로 되어 있다. 이 요소의 변형전 Lagrangian 좌표 s는 자중에 의해서 변형후 좌표 p로 이동한다. 이 케이블의 기하학적인 조건과 평형방정식은 식 (1), 식 (2)와 같다.

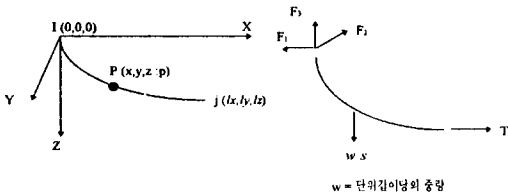


그림 1. 케이블 요소의 좌표계와 장력성분

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

$$T \frac{dx}{dp} = F_1$$

$$T \frac{dy}{dp} = F_2 \tag{2}$$

$$T \frac{dz}{dp} = F_3 - w \cdot s$$

Lagrangian 좌표계 s를 직각좌표계로 나타내면 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dp}{ds} = \frac{F_1}{T} \cdot \left(\frac{T}{EA_0} + 1\right) \\ &= \frac{F_1}{EA_0} + \frac{F_1}{\{F_1^2 + F_2^2 + (F_3 - ws)^2\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dp}{ds} = \frac{F_2}{T} \cdot \left(\frac{T}{EA_0} + 1\right) \\ &= \frac{F_2}{EA_0} + \frac{F_2}{\{F_1^2 + F_2^2 + (F_3 - ws)^2\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dp}{ds} = \frac{F_3 - ws}{T} \cdot \left(\frac{T}{EA_0} + 1\right) \\ &= \frac{F_3}{EA_0} - \frac{ws}{EA_0} + \frac{F_3 - ws}{\{F_1^2 + F_2^2 + (F_3 - ws)^2\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

식 (3)을 s=0일 때의 경계조건식을 이용하여 적분하고, s=l<sub>0</sub>에서의 경계조건을 대입하면 식 (4)와 같은 적합방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} l_x &= \frac{F_1 l_0}{EA_0} + \frac{F_1}{w} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{F_3 - w l_0}{H} \right) \right] \\ l_y &= \frac{F_2 l_0}{EA_0} + \frac{F_2}{w} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{F_3 - w l_0}{H} \right) \right] \\ l_z &= \frac{F_3 l_0}{EA_0} - \frac{w l_0^2}{2EA_0} + \frac{H}{w} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{F_3}{H} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \left[ 1 + \left( \frac{F_3 - w l_0}{H} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

식 (4)의 적합방정식을 이용하여 케이블요소의 유연도행렬(flexibility matrix)을 구하면 식 (5)와 같다.

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial F_1} & \frac{\partial f}{\partial F_2} & \frac{\partial f}{\partial F_3} \\ \frac{\partial g}{\partial F_1} & \frac{\partial g}{\partial F_2} & \frac{\partial g}{\partial F_3} \\ \frac{\partial h}{\partial F_1} & \frac{\partial h}{\partial F_2} & \frac{\partial h}{\partial F_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$f_{11} = \frac{l_0}{EA_0} + \frac{F_1}{w} \cdot \left[ \frac{-F_1 \cdot F_3}{H^3 \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{F_1 \cdot (F_3 - wl_0)}{H^3 \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{1}{w} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{F_3 - wl_0}{H} \right) \right]$$

$$f_{12} = \frac{F_1}{w} \cdot \left[ \frac{-F_2 \cdot F_3}{H^3 \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{F_2 \cdot (F_3 - wl_0)}{H^3 \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$f_{13} = \frac{F_1}{w} \cdot \left[ \frac{1}{H \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{H \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$f_{21} = \frac{F_2}{w} \cdot \left[ \frac{-F_1 \cdot F_3}{H^3 \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{F_1 \cdot (F_3 - wl_0)}{H^3 \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$f_{22} = \frac{l_0}{EA_0} + \frac{F_2}{w} \cdot \left[ \frac{-F_2 \cdot F_3}{H^3 \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{F_2 \cdot (F_3 - wl_0)}{H^3 \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{1}{w} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{F_3 - wl_0}{H} \right) \right]$$

$$f_{23} = \frac{F_2}{w} \cdot \left[ \frac{1}{H \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{H \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$f_{31} = \frac{H}{w} \cdot \left[ \frac{-F_1 \cdot F_3^2}{H^4 \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{F_1 \cdot (F_3 - wl_0)^2}{H^4 \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{1}{wH} \left[ \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}} - \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$f_{32} = \frac{H}{w} \cdot \left[ \frac{-F_2 \cdot F_3^2}{H^4 \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{F_2 \cdot (F_3 - wl_0)^2}{H^4 \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$f_{33} = \frac{l_0}{EA_0} + \frac{H}{w} \cdot \left[ \frac{F_3}{H^2 \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{F_3 - wl_0}{H^2 \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{1}{wH} \left[ \{1 + (\frac{F_3}{H})^2\}^{\frac{1}{2}} - \{1 + (\frac{F_3 - wl_0}{H})^2\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

최종적으로 식 (5)의 유연도행렬의 역행렬을 구하므로써 케이블요소의 강성행렬을 구할 수 있다.

$$K = F^{-1} \quad (6)$$

### 3. 기하학적 비선형해석방법

#### 3.1 해석시의 가정

현수교는 케이블과 같은 유연성부재로 구성된 구조물이므로 해석시에 그 거동이 매우 복잡하며 또한 그 구성요소의 수도 매우 많다. 본 연구에서는 이러한 모든 구성요소에 대하여 해석요소를 개

발하지 않고 케이블요소의 강성행렬 구성만으로 본 연구범위를 한정한다. 따라서 개발되지 않은 요소에 대해서는 기존의 해석방법을 따르고자 한다. 본 연구에서는 현수교의 기하학적 비선형해석을 위하여 다음과 같은 가정하에서 컴퓨터 프로그램을 개발하였다. 첫째로 보강형은 주케이블에 결합되기전의 모든 사하중을 주케이블이 부담하는 것으로 가정하며 보강형에는 사하중에 의한 응력이 발생되지 않는다. 둘째로 케이블요소에 작용하는 모든 사하중은 케이블길이를 따라서 등분포하는 것으로 가정한다. 실제로는 케이블요소마다 다른 경사각을 갖고 있으므로 다소의 차이는 있다. 셋째로 주탑은 직립하며 축방향 변위는 구속되어 있는 것으로 하며 넷째로 케이블은 변형이 일어난 후에도 단면적의 변화는 없는 것으로 가정한다. 마지막으로 케이블은 주탑부에서 마찰이 없는 새들(saddle)에 연결되어 있으므로 주탑에 수평력을 발생시키지 않는 것으로 가정하였다.

3.2 해석방법

현수교와 같이 장대지간을 갖는 교량은 활하중보다 사하중의 영향이 크므로 설계시에는 사하중에 의해서 보강형에 응력이 발생되지 않는다. 이러한 모든 사하중은 케이블이 지지하게 되며 전체 사하중상태에서 보강형의 무응력 상태에서 평형을 이루어야 한다. 또한 활하중 재하에 의한 구조 해석시에 구성부재의 강성은 사하중의 크기에 따라 결정된다. 따라서 현수교의 구조해석시에는 사하중 상태에서 평형상태에 있는 구성부재의 기하학적 형상과 강성을 결정하기 위한 초기형상해석 단계와 이러한 형상과 강성을 이용하여 활하중 하에서의 현수교의 거동을 해석하는 이차적인 해석 단계로 구분한다.

본 연구에서의 초기형상 결정을 위한 해석 알고리즘은 그림 2와 같다. 초기에 입력되는 기하학적 형상으로는 포물선식을 가정하고 절점, 부재 데이터 등은 자동으로 계산된다. 이 데이터를 기본으로 식 (4)의 비선형방정식에서 케이블의 부재력  $F_1, F_2, F_3$ 를 구한다. 사하중 상태하에서의 모든 절점의  $F_1, F_2, F_3$ 에 의한 불평형력이 0이 되도록  $\ell_0$ 를 가정하면서 평형상태에 도달할 때까지 시산법

(Trial & Error Method)으로 계산한다. 이 결과로 구해지는 현수교의 기하학적 형상이 시공이 완료된 시점에서 보강형이 무응력 상태를 갖는 최종 형상이며 현수교의 구조적인 특성을 나타내게 된다.

활하중 재하시의 해석법은 일반적인 기하학적 비선형해석법과 유사하며 수렴속도가 빠르다고 알려져 있는 Modified Newton-Rapson 방법에 의한 하중증분법을 사용한다. 해석모델은 보강형이 포함된 전체 현수교의 형상이며 보강형에도 변위나 응력이 발생하게 된다.

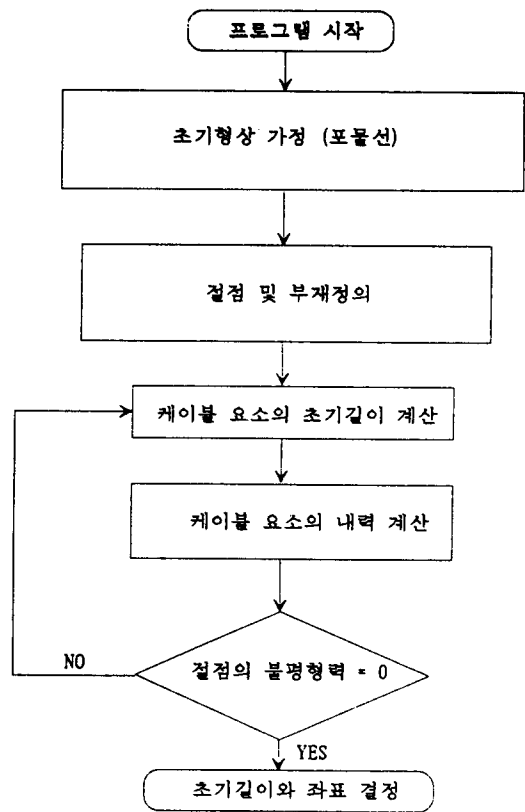


그림 2. 초기형상해석 프로그램 순서도

4. 수치해석

본 연구에서는 그 결과를 검증하기 위하여 남해 대교에 대하여 수치해석을 실시하였다. 또한 이

결과는 동 교량에 대하여 차량재하시험을 통한 변위의 측정값과 게이지 부착에 의한 응력측정치<sup>(12)</sup>와 비교하였다. 수치해석은 차량재하시험시에 차량의 재하위치에 따른 하중조합에 대하여 실시하였으며 그림 3과 같다. 이 경우에 수치해석과 실험을 통한 변위는 표 1, 그림 4와 같다. 이 때 그림 4에서 좌·우측은 각각 케이블 및 보강형의 변위를 나타낸다.

표 1에서 보이는 바와 같이 남해대교에 대한 선형해석과 비선형해석결과의 차이는 최대 48%에 달하고 있으므로 현수교의 기하학적 비선형거동

이 무시할 수 없을 정도로 큼을 알 수 있다. 따라서 현수교의 해석 및 설계시에 반드시 기하학적 비선형거동을 고려해야 함을 알 수 있다. 일반적으로 비선형 해석치와 측정치는 매우 유사한 결과

▽ 케이블 측정점(절점번호)    ↓ 하중재하경우(46t)  
 ▲ 보강형 측정점(절점번호)

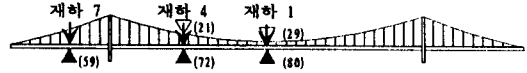


그림 3. 차량의 재하위치와 하중조합<sup>(12)</sup>

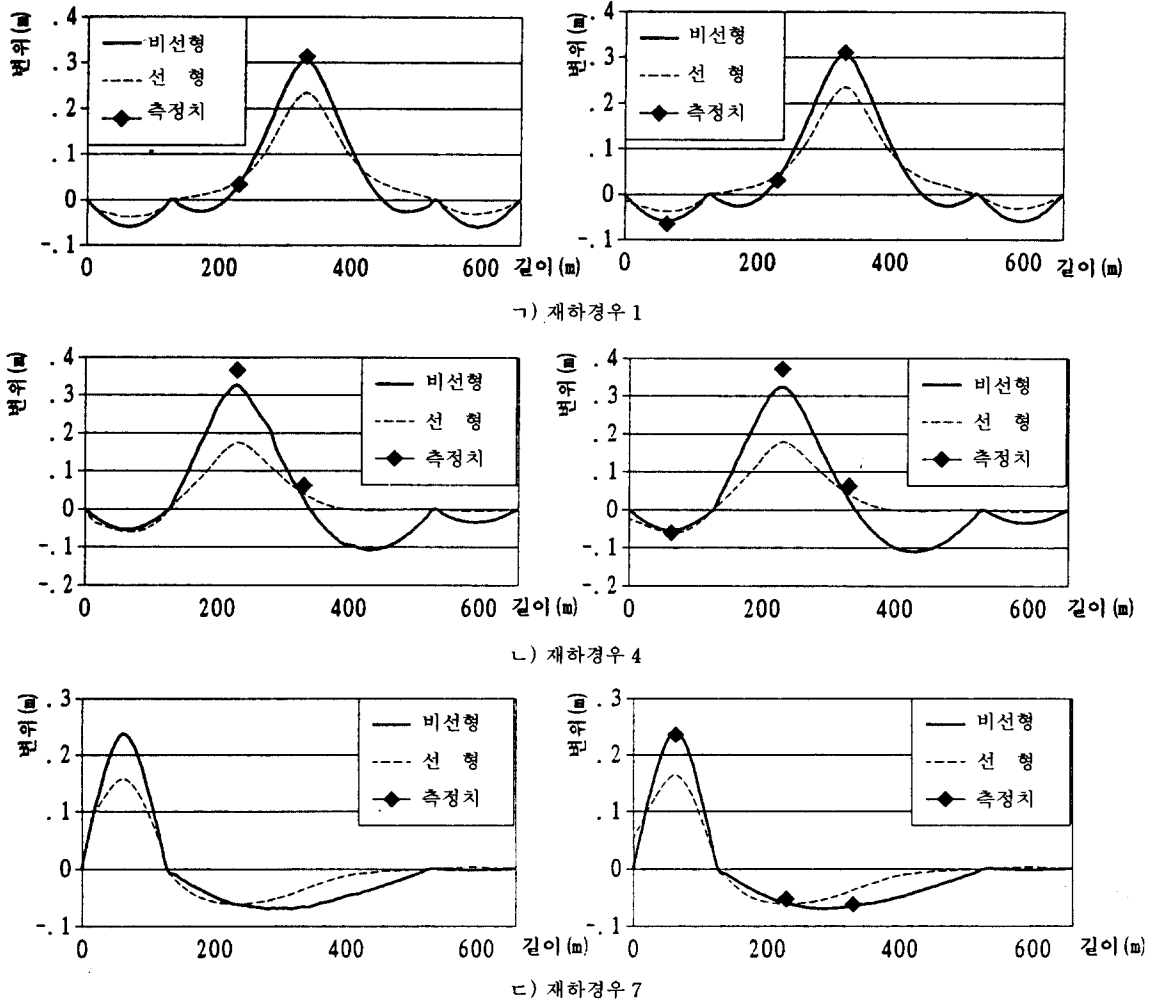


그림 4. 케이블과 보강형의 변위

표 1. 해석과 측정에 의한 변위

(단위, m)

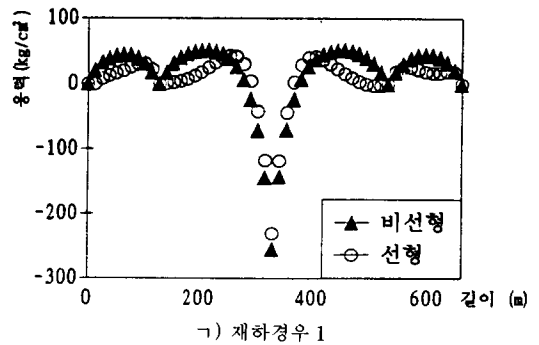
재하 경우	절점 번호	선형	비선형	측정치 <sup>(12)</sup>	선형 / 비선형 (%)
1	21	0.040838	0.031201	0.033	30.89
	29	0.23437	0.303947	0.314	-22.89
	59	-0.3759	-0.0597	-0.064	-37.04
	72	0.040885	0.031225	0.032	30.94
	80	0.235933	0.30559	0.312	22.79
4	21	0.174038	0.324701	0.367	-46.40
	29	0.40807	0.028946	0.062	40.97
	59	-0.0604	-0.05435	-0.06	11.13
	72	0.179011	0.323519	0.373	-44.67
	80	0.040821	0.027526	0.063	48.30
7	21	-0.06031	-0.06084		-0.87
	29	-0.03758	-0.06738		-44.23
	59	0.164415	0.241575	0.236	-31.94
	72	-0.0604	-0.05958	-0.052	1.38
	80	-0.03757	-0.06588	-0.061	-42.97

를 보여주고 있다. 측정결과는 남해대교와 같은 장대교량에서 차량통행제한을 실시하고 수행한다 하더라도 바람 등에 의한 오차가 다소 포함되었을 것으로 판단된다. 또한 본 연구결과와 같이 수치해석 결과와 측정값이 유사한 크기를 갖는다 하더라도 수치해석 결과가 반드시 정확한 값이라고 단정할 수는 없다. 왜냐하면 수치해석결과는 본 연구에서 가정한 사항들을 고려한 해석을 수행할 경우에 다소 큰 값이 구해질 수 있다. 응력에 대한 해석결과는 표 2, 그림 5와 같다. 변위에 대한 해석결과와 유사하게 비선형효과가 49%에 달하고 있으므로 비선형해석이 반드시 필요함을 알 수 있다. 해석치와 측정치는 매우 유사한 결과를 보여주고 있으며 본 프로그램의 사용성을 입증하고 있다.

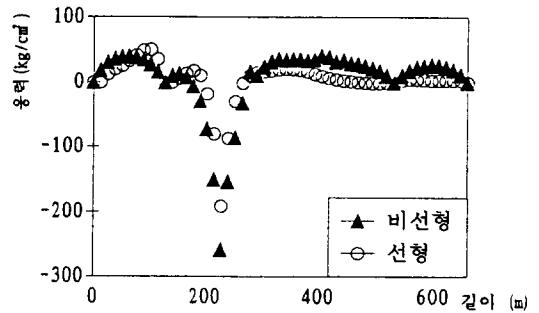
표 2. 해석과 측정에 의한 보강형의 응력

(단위, kg/cm<sup>2</sup>)

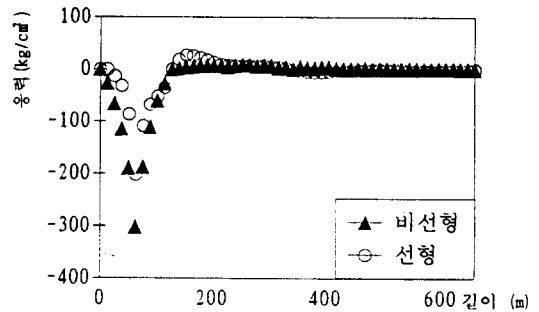
하중 재하 위치	선형	비선형	측정치 <sup>(12)</sup>	선형 / 비선형
외측 L <sub>1</sub> /2 상부	-202.41	-302.16	-284.55	49.28%
외측 L <sub>1</sub> /2 하부	313.45	467.93	392.7	49.28%
중앙 L <sub>2</sub> /4 상부	-191.82	-258.28	-244.65	34.64%
중앙 L <sub>2</sub> /4 하부	297.05	399.96	386.75	34.64%
중앙 L <sub>2</sub> /2 상부	-230.94	-255.13	-215.25	10.47%
중앙 L <sub>2</sub> /2 하부	357.63	395.09	305.55	10.47%



가) 재하경우 1



나) 재하경우 4



다) 재하경우 7

그림 5. 교량길이에 따른 보강형의 응력분포

그러나 남해대교의 경우에는 가설된지 20년이 경과되었으므로 부재의 단면결손이나 강성저하가 있을 수 있으므로 본 연구에서 해석시에 사용한 초기 시공시의 단면이나 강성은 실제보다 다소 작은 값일 것으로 추정된다. 따라서 본 연구에 의한 수치해석치는 실제의 정확한 값보다 다소 작을 것으로 예상된다. 반면에 측정치의 경우에는 아스팔트 덧씌우기 3cm와 장대교량에서 사하중의 영향

력이 다소 큰 점을 고려할 때 실제구조물의 거동보다 큰 값을 알 수 있다. 즉, 수치해석에 사용된 하중보다 다소 큰 하중이 작용하고 있는 상태이므로 실제 정확한 값은 측정치보다 다소 작아져야 할 것이다. 그러나 위와같은 점을 고려해도 해석치와 측정치의 변동 및 오차는 크지 않을 것으로 판단되며 본 해석방법의 유용성에는 크게 영향을 미치지 않을 것으로 판단된다.

## 5. 결 론

현수교의 기하학적 비선형거동을 규명하기 위한 유한요소해석 알고리즘을 유도하고 남해대교에 대한 해석을 수행한 결과 다음과 같은 사실을 알 수 있었다. 변위와 응력 각각에 대하여 선형 및 비선형해석결과의 차이가 약 50%에 달하고 있으므로 기하학적 비선형해석이 현수교의 설계시 반드시 필요함을 알 수 있다. 현수교와 같이 강성이 낮은 케이블 구조물에서 기하학적 비선형효과는 매우 크므로 해석 및 설계시에 반드시 고려해야 한다. 해석과정에서는 사하중과 활하중 재하시에 해석모델과 해석방법이 다르므로 해석단계를 구분해서 수행해야 한다. 즉, 사하중하에서의 케이블 모델에 대한 비선형적합방정식의 해석과 활하중하에서의 현수교 모델에 대한 기하학적 비선형 해석을 2단계로 나누어 실시해야 한다. 해석결과는 측정치와 비교할 때 매우 근사한 값을 보임에 따라 본 해석방법이 현수교의 해석 및 설계시에 충분히 유용함을 보여주고 있다.

## 참 고 문 헌

1. N. J. Gimsing, "Cable Supported Bridges, Concept and Design," John Wiley & Sons, Chichester, 1983
2. J. H. Argyris, P. C. Dunne, T. Angelopoulos,

- "Nonlinear Oscillations using the Finite Element Technique," Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2, 203-250, 1973
3. H. Pastorel, G. Beaulieu, "Nonlinear Vibrations of Guy Cable Systems," Computer & Structure Vol. 21, 35-50, 1985
4. J. H. Argyris, D. W. Scharpf, "Large Deflection Analysis of Prestressed Networks," J. of Struct.. Div, ASCE,. Vol. 98, 633-654, 1972
5. Y. M. Desai, N. Popplewell, A. H. Shah, D. N. Buragohain, "Geometrically Nonlinear Static Analysis of Cable Supported Structures," Computer & Structures Vol. 29, No. 6, 1988
6. C. A. Felippa, "Finite Element Analysis of Three-Dimensional Cable Structures," Proc. Int. Conf. Computational Methods Nonlinear Mech. Austin, TX, 311-314, 1974
7. A. H. Peyrot, A. M. Goulois, "Analysis of Cable Structures," Computer & Structures Vol. 10, 805-813, 1979
8. H. B. Jayaraman, W. C. Knudson, "A Curved Element for the Analysis of Cable Structures," Computer & Structures Vol. 14, 325-333, 1981
9. B. A. Schrefler, S. Odorezzi, R. D. Wood, "A Total Lagrangian Geometrically Nonlinear Analysis of Combined Beam and Cable Structures," Computer & Structures Vol. 17, 115-127, 1983
10. W. M. Henghold, J. J. Russell, "Equilibrium and Natural Frequencies of Cable Structures (A Nonlinear Finite Element Approach)," Computer & Structures Vol. 6, 267-271, 1976
11. H. Max Irvine, "Cable Structures," MIT Press, 1981
12. "남해대교 안전진단보고서", 건설부, 1993

(接受 : 1994. 9. 2)