

불확정 구조계 고유치에 관한 이차 민감도 해석

Design Sensitivity Analysis of the Second Order Perturbed Eigenproblems for Random Structural System

임 오 강*
Lim, O-Kaung

이 병 우**
Lee, Byung-Woo

.....

요 약

불확정 구조계의 선형 고유치 문제는 재료정수나 경계조건 및 외부하중 등에 결정론적으로 사용할 수 없는 확률량을 포함하고 있다. 변동량을 내포한 고유치 문제의 해석은 기대치에 대한 지배 방정식과 변동량 결정방정식을 고려해야 한다. 비선형성이 심한 구조계를 선형화할 때 일차 및 이차 변동값을 반영함으로써 고유치의 정도를 향상시킬 수 있다.

매개변수에 불확정성을 포함한 고유치 문제는 최적설계 정식화에서 변동된 값을 고려해 줌으로 신뢰성 있는 설계가 된다. 최적설계 알고리즘 중에는 목적함수와 제한 조건식의 설계 민감도를 요한다. 이차 기울기에 근거를 둔 최적설계 수행시에 변동량에 고려하여 제한식으로 설정하고, 설계 민감도를 구할 수 있는 방법을 제시하였다.

Abstract

Design sensitivity analysis of the second order perturbed eigenproblems for random structural system is presented. Dynamic response of random system including uncertainties for the design variable is calculated with the first order and second order perturbation method to original governing equation. In optimal design methods, there is fundamental requirement for design gradients. A method for calculating the sensitivity coefficients is developed using the direct differentiation method for the governing equation and first order and second order perturbed equation.

1. 서 론

불확정 구조계의 선형 고유치 문제는 재료정수나 경계조건 및 외부하중 등에 결정론적으로 사용

할 수 없는 확률량을 포함하고 있다. 그러므로 제작시나 수학적으로 모델링할 때 이 요인들을 설계에 반영해 주어야 한다. 비선형성이 심한 구조계를 선형화할 때 일차 및 이차 변동값을 반영함으

* 정희원, 부산대학교 기계공학과, 기계기술연구소 부교수
** 정희원, 부산대학교 기계공학과 박사과정, 기계기술연구소 연구원

이 논문에 대한 토론을 1995년 3월 31일까지 본 학회에 보내 주시면 1995년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

로 고유치의 정도를 향상시킬 수 있다.

불확정 매개변수를 가지는 시스템에 대한 고유이와 고유벡터의 해석에 많은 연구가 수행되어 왔다. Collins와 Thomson[1], Meirovitch[2], 中桐滋 및 久田俊明[3]들은 섭동법(Perturbation method)을 사용하여 해석한 바 있다.

최적설계 알고리즘 중에는 이동방향을 결정하는 문제에서 고유이와 고유벡터의 이차 설계민감도를 필요로 한다. 고유치와 고유벡터의 설계 민감도는 동적 응답을 유지하거나 구조 개선을 위한 정보를 제공한다. 기계·구조물 시스템에서 고유진동수와 좌굴하중은 설계변수와 동적 응답 변수에 연관되어 있다. 또한 개선된 설계점에서 빠른 재해석을 위해서도 체계화된 민감도 절차가 필요하다.

고유치와 고유벡터 민감도 해석에 관한 연구는 Fox와 Kapoor[4]에 의해 최초로 제안되었다. Rudisill과 Chu[5]는 전체 자유도에 대한 고유치와 고유벡터중 최고차에 해당하는 고유치의 민감도를 계산하는 방법을 제안하였다. 국내에서는 양영순과 김지호[6]가 섭동법 대신 확률 유한요소법을 사용하여 고유치의 민감도를 연구한 바 있다. 불확정 요인을 갖는 시스템에 대한 일차 고유치 및 고유벡터의 민감도 해석[7]은 수행된 바 있다.

본 연구에서는 일차 및 이차 섭동법을 사용하여 고유치와 고유벡터의 변동값을 구하고, 최적설계 수행시에 일차 및 이차 섭동량에 대해 적용할 수 있는 민감도 해석법을 개발하였다. 확률변수를 갖는 구조계의 이차 고유치의 설계 민감도를 요구한다. 이차 고유치 및 고유벡터의 설계민감도는 지배방정식과 변동을 결정방정식에 대해서 직접 미분법으로 구하였다. 수치예제는 트러스와 보요소를 사용하여 언급하였으며 결과를 검증하기 위해서 확률 유한차분법으로 해를 비교·검토하였다.

2. 고유치 및 고유벡터의 이차 변동을 평가

2.1 변동을 결정방정식

선형 고유치 문제의 일반형은 고유치를 λ , 고유벡터를 ϕ 라 할 때 다음과 같다.

$$(B - \lambda A)\phi = 0 \quad (1)$$

식(1)에서 보통 B는 강성행렬이며, A는 진동해석일 경우에는 질량행렬이며, 좌굴해석시에는 기하강성행렬(geometric stiffness matrix)이다. B와 A행렬은 실수의 대칭행렬이고, 양정행렬(positive definite matrices)이라 가정한다. 또한 고유치 λ 는 반복되지 않는다고 가정한다. 구조문제에서 mode shape인 고유벡터는 정규화하여 사용하므로

$$\phi^T A \phi = 1 \quad (2)$$

확률 구조계에서 B 또는 A행렬이 확률변수 α 를 포함한 경우 다음 이차식으로 전개될 수 있다고 가정[3]한다. α 는 미소의 값으로서 기대치가 영인 확률변수이다.

$$B = B^0 + \sum_k B_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l B_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (3)$$

$$A = A^0 + \sum_k A_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l A_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (4)$$

식(3)과 식(4)에서 하첨자 k 및 l은 확률변수의 수이다. 또한 상첨자 영은 구조계의 기대치에 대한 값이며, 상첨자 I는 일차 변동된 값이다. 상첨자 II는 이차 변동된 값이다. 식(3)과 식(4)에서 이차 변동율의 첨자는 가환성을 가정한다. 즉, $A_{kl}^{II} = A_{lk}^{II}$ 이다. A_{kl}^{II}, B_{kl}^{II} 은 각각 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 에 대한 $\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_k \alpha_l}, \frac{\partial^2 B}{\partial \alpha_k \alpha_l}$ 의 값을 의미한다. 식(3)과 식(4)중 미지의 λ 와 ϕ 에 대해서 다음 이차 형태로 가정을 한다.

$$\lambda = \lambda^0 + \sum_k \lambda_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \lambda_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (5)$$

$$\phi = \phi^0 + \sum_k \phi_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \phi_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (6)$$

식(3)에서 식(6)까지를 지배방정식(1)에 대입하고 섭동법을 적용하며 0차항, α_k 항, $\alpha_k \alpha_l$ 항 등에 대해서 각 계수로부터 다음의 변동을 결정 방정식을 얻는다.

$$(B^0 - \lambda^0 A^0)\phi^0 = 0 \quad (7.1)$$

$$(B^0 - \lambda^0 A^0) \phi_k^I = -(B_k^I - \lambda_k^I A^0 - \lambda^0 A_k^I) \phi^0 : \forall k \quad (7.2)$$

$$(B^0 - \lambda^0 A^0) \phi_k^{II} = -(B_k^I - \lambda_k^I A^0 - \lambda^0 A_k^I) \phi^I - (B_k^I - \lambda_k^I A^0 - \lambda^0 A_k^I) \phi_k^I - (B_{ki}^{II} - \lambda_k^I A_i^I - \lambda_i^I A_k^I - \lambda_{ki}^{II} A^0 - \lambda^0 A_{ki}^{II}) \phi^0 : \forall k, i \quad (7.3)$$

식(7.1)은 기대치에 대한 지배방정식이다. 식(7.2)는 일차 변동을 결정방정식이다. 식(7.3)은 이차 변동을 결정방정식이다. 식(7.2)와 식(7.3)은 임의의 변수에 대해서 성립한다.

2.2 고유치 및 고유벡터의 이차 변동을 평가

이차 변동된 시스템의 고유치와 고유벡터의 이차 변동을 구하기 위해서는 일차 변동을 계산해야 한다. 일차 변동은 다음에 의하여 계산된다.

제i차 고유치에 관한 식(7.2)에 ϕ^{0T} 를 전승한 후 B^0, A^0 가 대칭행렬이므로 전치하고 정리하면 제i차 고유치에 대한 변동을 얻는다.

$$\lambda_k^{II} = \frac{\phi^{0T} (B_k^I - \lambda_k^I A^0) \phi^{\alpha}}{\phi^{0T} A^0 \phi^{\alpha}} \quad (8)$$

고유벡터에 대한 일차 변동을 $(B^0 - \lambda^0 A^0)$ 가 특이치가 되기에 식(7.2)에서 역행렬을 구하여 ϕ_k^I 를 구하는 것이 불가능하다. 그래서 변동성분을 포함한 제i차 고유벡터와 A행렬을 사용하여 정규화하면 ϕ_k^I 를 구할 수 있다.

$$\phi^{iT} A \phi^j = 1 \quad (9)$$

식(9)에 식(4)와 식(6)을 대입해서 섭동법을 적용하면 변동을 결정방정식을 얻을 수 있다.

$$\phi^{0T} A^0 \phi^{0i} = 1 \quad (10)$$

$$2\phi^{0T} A^0 \phi_k^{Ii} + \phi^{0T} A_k^I \phi^{\alpha} = 0 \quad (11)$$

$$2\phi^{0T} A^0 \phi_{ki}^{II} + 2\phi_k^{iT} A_i^I \phi^{\alpha} + 2\phi_k^{iT} A_k^I \phi^{\alpha} + \phi_k^{iT} A^0 \phi_i^{\alpha} + \phi_k^{iT} A^0 \phi_k^{Ii} + \phi_k^{iT} A_k^I \phi^{\alpha} = 0 \quad (12)$$

일차 변동된 시스템의 고유벡터는 식(11)과 제i차 고유치에 관한 식(7.2)를 조합하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} B^0 - \lambda^{0i} A^0 \\ 2\phi^{0T} A^0 \end{bmatrix} \phi_k^{Ii} = - \begin{bmatrix} B_k^I - \lambda_k^I A^0 - \lambda^{0i} A_k^I \\ \phi_k^{0iT} A_k^I \end{bmatrix} \phi^{\alpha} \quad (n+1) \times n \quad n \times 1 \quad (n+1) \times n \quad n \times 1 \quad (13)$$

식(13)에서 n은 구조물의 자유도를 나타낸다.

이차 변동된 시스템의 고유치는 식(7.3)에 ϕ^{0T} 를 곱하고, 일차변동을 구할 때와 마찬가지로 방법으로 조작을 행하면 고유치의 이차변동이 얻어진다.

$$\lambda_{ki}^{II} = \phi^{0T} \{ (B_k^I - \lambda_k^I A^0 - \lambda^{0i} A_k^I) \phi^I + (B_k^I - \lambda_k^I A^0 - \lambda^{0i} A_k^I) \phi_k^I + (B_{ki}^{II} - \lambda_k^I A_i^I - \lambda_i^I A_k^I - \lambda^{0i} A_{ki}^{II}) \phi^{\alpha} \} / \phi^{0T} A^0 \phi^{\alpha} \quad (14)$$

고유벡터에 대한 이차변동을 평가는 식(7.3)과 식(12)를 조합하면 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} B^0 - \lambda^{0i} A^0 \\ 2\phi^{0T} A^0 \end{bmatrix} \phi_{ki}^{II} = - \begin{bmatrix} B_k^I - \lambda_k^I A^0 - \lambda^{0i} A_k^I \\ \phi_k^{0iT} A^0 \end{bmatrix} \phi^I - \begin{bmatrix} B_k^I - \lambda_k^I A^0 - \lambda^{0i} A_k^I \\ \phi_k^{0iT} A^0 \end{bmatrix} \phi_k^I - \begin{bmatrix} B_{ki}^{II} - \lambda_k^I A_i^I - \lambda_i^I A_k^I - \lambda^{0i} A_{ki}^{II} \\ 2\phi_k^{iT} A_i^I + 2\phi_k^{iT} A_k^I + \phi^{0iT} A_{ki}^{II} \end{bmatrix} \phi^{\alpha} \quad (n+1) \times n \quad n \times 1 \quad (n+1) \times n \quad n \times 1 \quad (n+1) \times n \quad n \times 1 \quad (15)$$

식(15)에서 좌변의 행렬을 C라하고, 우변의 행렬을 순서대로 각각 E, F, G라 할 때 고유벡터의 이차변동은 다음 식에 의해 평가된다.

$$\phi_{ki}^{II} = (C^T C)^{-1} \{ -C^T (E \phi_k^{Ii} + F \phi_k^{Ii} + G \phi^{\alpha}) \} \quad (16)$$

3. 민감도 해석

3.1 원래 시스템 및 일차변동 시스템의 고유치와 고유벡터에 대한 민감도

확률변수를 갖는 구조계의 이차 고유치의 설계 민감도는 구조계의 기대치 및 일차 변동에 대한 고유치와 고유벡터의 민감도를 요구한다. 식(1)의 고유치 문제에서 행렬 A, B가 대칭이고, 양정이므로 설계변수에 대해서 미분가능하다.

우선 구조계의 기대치에 대한 고유치와 고유벡터의 설계민감도[8]는 다음에 의해서 계산된다. 식(7.1)과 식(10)을 각각 설계변수 벡터 b에 대해서 미분을 한 후, 두 식을 조합하면 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} (B^0 - \lambda^{0i} A^0) - A^0 \phi^0 \\ -\phi^{0T} A^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\phi^0}{db} \\ \frac{d\lambda^0}{db} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\frac{dB^0}{db} - \lambda^0 \frac{dA^0}{db}) \phi^0 \\ \frac{1}{2} \phi^{0T} \frac{dA^0}{db} \phi^0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

(n+1) × (n+1) (n+1) × 1 (n+1) × (n+1)

식(17)에서 좌변의 두번째 항인 미지수 벡터에서 (n×1)개의 벡터는 고유벡터에 대한 민감도 값이며, 마지막 하나의 값이 고유치에 대한 값이다. 식(17)에서 우변은 벡터로서 하중의 미분계수(Force Derivative)이다.

일차 변동된 고유치와 고유벡터의 설계민감도 [7]는 다음에 의하여 구해진다. 일차 변동을 결정방정식(7.2)와 일차 변동된 고유벡터에 대한 식(11)을 각각 설계변수에 대해 미분하고, 두 식을 조합하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} (B^0 - \lambda^{0i} A^0) - A^0 \phi^0 \\ -\phi^{0T} A^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\phi_k^{li}}{db} \\ \frac{d\lambda_k^{li}}{db} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix} \quad (18)$$

(n+1) × (n+1) (n+1) × 1 (n+1) × 1

식(18)에서 H와 I는 하중의 미분계수 벡터로서 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{H\} = & -\left(\frac{dB^0}{db} - \lambda^0 \frac{dA^0}{db} - \frac{d\lambda^0}{db} A^0\right) \phi_k^{li} \\ & - \left(\frac{dB_k^i}{db} - \lambda_k^i \frac{dA^0}{db} - \frac{d\lambda^0}{db} A_k^i - \lambda^0 \frac{dA_k^i}{db}\right) \phi^{0i} \\ & - (B_k^{li} - \lambda_k^{li} A^0 - \lambda^0 A_k^i) \frac{d\phi^0}{db} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \{I\} = & \phi_k^{iT} A^0 \frac{d\phi^{0i}}{db} + \phi^{0T} \frac{dA^0}{db} \phi_k^{li} + \phi^{0T} A_k^i \frac{d\phi^{0i}}{db} \\ & + \frac{1}{2} \phi^{0T} \frac{dA_k^i}{db} \phi^{0i} \end{aligned} \quad (20)$$

식(18)에서 일차 변동된 고유치나 고유벡터의 설계 민감도는 좌변행렬의 역행렬을 구해서 평가하거나 가우스소거법으로서 해를 구할 수 있다.

3.3 이차 변동된 고유치와 고유벡터의 설계민감도

이차 변동된 고유치와 고유벡터의 설계민감도는 일차 변동된 민감도와 마찬가지로 구할 수 있다. 우선 이차 변동을 결정방정식(7.3)을 설계변수 b에 대해서 미분을 행한다. 이차 변동된 고유벡터에 대한 식(12)를 설계변수에 대해 미분을 한 후, 두 식을 조합하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} (B^0 - \lambda^{0i} A^0) - A^0 \phi^0 \\ -\phi^{0T} A^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\phi_k^{lii}}{db} \\ \frac{d\lambda_{ki}^{lii}}{db} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix} \quad (21)$$

(n+1) × (n+1) (n+1) × 1 (n+1) × 1

식(21)에서 J와 K는 하중의 미분계수 벡터로서 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{J\} = & -\left(\frac{dB^0}{db} - \lambda^0 \frac{dA^0}{db} - \frac{d\lambda^0}{db} A^0\right) \phi_{ki}^{lii} \\ & - (B_k^{li} - \lambda_k^{li} A^0 - \lambda^0 A_k^i) \frac{d\phi^{li}}{db} \\ & - (B^{li} - \lambda^{li} A^0 - \lambda^0 A^i) \frac{d\phi_k^{li}}{db} \\ & - (B_{ki}^{li} - \lambda_k^{li} A^i - \lambda^i A_k^i - \lambda_{ki}^{li} A^0 - \lambda^0 A_{ki}^{li}) \frac{d\phi^{0i}}{db} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{dB_k^I}{db} - \frac{d\lambda_k^I}{db} A^0 - \lambda_k^I \frac{dA^0}{db}\right) \\
 & -\left(\frac{d\lambda^0}{db} A_k^I - \lambda^0 \frac{dA_k^I}{db}\right) \phi^{li} \\
 & -\left(\frac{dB_k^I}{db} - \frac{d\lambda_k^I}{db} A^0 - \lambda_k^I \frac{dA^0}{db}\right) \\
 & -\left(\frac{d\lambda^0}{db} A_k^I - \lambda^0 \frac{dA_k^I}{db}\right) \phi^{li} \\
 & -\left(\frac{dB_{kl}^{II}}{db} - \frac{d\lambda_{kl}^I}{db} A_k^I - \lambda_k^I \frac{dA_k^I}{db}\right) \\
 & -\left(\frac{d\lambda_{kl}^I}{db} A_k^I - \lambda_{kl}^I \frac{dA_k^I}{db}\right) \\
 & -\left(\lambda_{kl}^{II} \frac{dA^0}{db} - \frac{d\lambda^0}{db} A_{kl}^{II} - \lambda^0 \frac{dA_{kl}^{II}}{db}\right) \phi^{oi} \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{K\} = & \phi^{oiT} \frac{dA^0}{db} \phi^{li} + (\phi_{kl}^{II} A^0 + \phi_k^{liT} A_k^I + \phi^{liT} A_k^I + \\
 & \phi^{oiT} A_{kl}^{II}) \frac{d\phi^{oi}}{db} + (\phi^{oiT} A_k^I + \phi^{liT} A^0) \frac{d\phi_k^{li}}{db} + \\
 & (\phi^{oiT} A_k^I + \phi_k^{liT} A^0) \frac{d\phi^{li}}{db} + \\
 & \frac{1}{2} \phi^{liT} \frac{dA^0}{db} \phi_k^{li} + \frac{1}{2} \phi_k^{liT} \frac{dA^0}{db} \phi^{li} + \\
 & (\phi_k^{liT} \frac{dA_k^I}{db} + \phi^{liT} \frac{dA_k^I}{db} + \frac{1}{2} \phi^{oiT} \frac{dA_{kl}^{II}}{db}) \phi^{oi} \quad (23)
 \end{aligned}$$

식(21)의 이차 변동된 고유치와 고유벡터의 설계 민감도는 기대치 및 일차 변동된 고유치 및 고유벡터의 값과 민감도 값을 필요로 한다.

일차 및 이차 변동된 고유치와 고유벡터의 설계 민감도가 계산되었으므로 확률변수를 갖는 시스템의 전체 민감도는 기대치에 대한 민감도에 일차 및 이차 변동된 민감도 값을 산술적으로 더해주면 구해진다.

고유치에 대한 전체 설계 민감도는 식(5)를 설계변수에 대해서 미분하면 :

$$\frac{d\lambda}{db} = \frac{d\lambda^0}{db} + \sum_k \frac{d\lambda_k^I}{db} \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \frac{d\lambda_{kl}^{II}}{db} \alpha_k \alpha_l \quad (24)$$

고유벡터에 대한 전체 설계 민감도는 식(6)을 설계변수에 대해서 미분하면 구해진다.

$$\frac{d\phi}{db} = \frac{d\phi^0}{db} + \sum_k \frac{d\phi_k^I}{db} \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \frac{d\phi_{kl}^{II}}{db} \alpha_k \alpha_l \quad (25)$$

4. 수치 예제

본 연구에서 개발된 방법의 타당성을 보이기 위하여 트러스 및 보요소를 사용하여 수치해석하였다. 고유치와 고유벡터의 기대치를 구하고, 일차 및 이차 변동된 구조계의 고유치 값은 섭동법으로 구하였다. 설계 민감도 값의 검증을 위하여 확률유한차분법과 해를 비교하였다.

4.1 부재 10개로 구성된 트러스

부재 10개로 구성된 외팔보 트러스가 Fig. 1에 나타나 있다. 문제에 사용한 재료는 알루미늄이며, 설계 데이터는 Table 1에 제시되어 있다. 확률변수는 단면적 및 탄성계수로 선정하였다. 설계변수 x^0 는 단면적의 기대치이며, 초기값은 6.45E-04 m²으로 주었다. 확률변수에 대한 변동량은 각각의 부재에 대해서 변동계수를 0.1을 주고서 수치해석하였다.

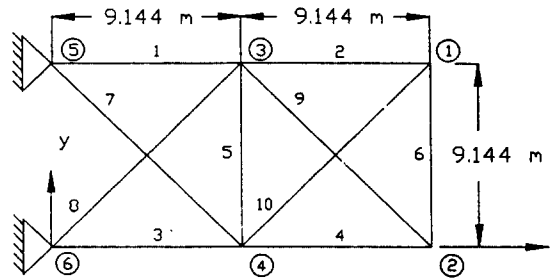


Fig. 1 Ten-member cantilever truss

Table 1 Design Data for Ten-Member Cantilever Truss

Modulus of elasticity	=6894.76 MPa
Material density	=2867.99 kg / m ³
Initial expected value of area (x^0)	=6.45E-04 m ²
Lower limit of the frequency constraint (λ^a)	=16 Hz

고유치 문제에 대한 제한 조건식은 다음과 같다.

$$\psi_1 = \frac{\lambda^a}{(\lambda^0 + \lambda^I + \lambda^{II})} - 1.0 \leq 0 \quad (26)$$

식(26)에서 λ^0 는 고유치 문제에서 얻어지는 해로서 고유진동수의 제곱값 중 최소값이며, λ^I 와 λ^{II} 는 각각 일차 및 이차 섭동법을 적용하여 산출된 값이다. 상기 제한식을 바탕으로 확정 구조계 및 불확정 구조계에 대한 설계 민감도 해석 결과를 제시하였다. Table 3은 구조계의 기대값에 대한 민감도 해석 결과이며, Table 5 및 Table 7은 각각 변동계수가 0.1인 경우 일차 및 이차 섭동법을 적용한 해석 결과이다.

Table 2에서 $\frac{d\psi_1}{dx_0}$ 는 고유진동수 제한식을 정규화한 값을 각각 설계변수로 편미분한 값이다. Table 3에서 ψ_1^1 과 ψ_1^2 는 각각 초기 설계값 x^0 와 개선된 설계값 $x^0 + \delta x^0$ 에서 제한식 값이다. $\Delta\psi_1$ 는 $\psi_1^2 - \psi_1^1$ 로 계산되는 ψ_1^1 과 ψ_1^2 의 차이 값이다. ψ_1^1 은 직접 미분법에 의하여 구해지며, $\frac{d\psi_1}{dx^0}$ 로 계산된다. ψ_1^1 과 $\Delta\psi_1$ 의 비교는 100배로 하여 민감도 정확성을 측정하였다. 수치 결과는 1% 설계 변화($\delta x^0 = 0.01x^0$)를 주어서 구하였다.

Table 2 Design Derivatives of constraints for Deterministic Truss

No.	Design	$d\psi_1^T/dx^0$
1	6.45E-04	-456.106
2	6.45E-04	200.184
3	6.45E-04	-456.106
4	6.45E-04	200.184
5	6.45E-04	80.495
6	6.45E-04	407.946
7	6.45E-04	-228.129
8	6.45E-04	-228.129
9	6.45E-04	239.829
10	6.45E-04	239.829

Table 3 Comparison of the Deterministic Eigenvalue Sensitivity Calculation

Const.	ψ_1^1	ψ_1^2	$\Delta\psi_1$	ψ_1^1	$\psi_1^1 / \Delta\psi_1 \times 100\%$
ψ_1	0.1199	0.1199	0.0	-0.2418E-11	-

Table 4 Design Derivatives for the First-Order perturbed Truss

No.	Design	$d\psi_1^T/dx^0$
1	6.45E-04	-319.619
2	6.45E-04	370.275
3	6.45E-04	-318.251
4	6.45E-04	370.419
5	6.45E-04	256.709
6	6.45E-04	577.846
7	6.45E-04	-72.181
8	6.45E-04	-71.646
9	6.45E-04	404.374
10	6.45E-04	404.502

Table 5 Comparison of the First-Order Perturbed Sensitivity Calculation

Const.	ψ_1^1	ψ_1^2	$\Delta\psi_1$	ψ_1^1	$\psi_1^1 / \Delta\psi_1 \times 100\%$
ψ_1	0.2249	0.2249	0.0	0.1033E-03	-

Table 6 Design Derivatives for the Second-Order Perturbed Truss

No.	Design	$d\psi_1^T/dx^0$
1	6.45E-04	-382.159
2	6.45E-04	304.746
3	6.45E-04	-381.468
4	6.45E-04	304.910
5	6.45E-04	186.821
6	6.45E-04	515.804
7	6.45E-04	-139.046
8	6.45E-04	-138.591
9	6.45E-04	341.733
10	6.45E-04	341.893

Table 7 Comparison of the Second-Order Perturbed Sensitivity Calculation

Const.	ψ_1^1	ψ_1^2	$\Delta\psi_1$	ψ_1^1	$\psi_1^1 / \Delta\psi_1 \times 100\%$
ψ_1	0.2033	0.2033	0.0	0.6157E-04	-

부재 10개로 구성된 트러스에서 단면적과 탄성계수를 불확정 변수로 선정하고, 수치해석한 결과 변동된 고유치는 줄어들었다. 그래서 일차 및 이차 제한 조건식의 값이 증가하였다. 세 가지 경우에 있어서 확률 유한 차분법에 의한 민감도 값이 영이 되었기에 상대 비교는 하지 못하였으나, 대체로 유사하였다. 일차 및 이차 변동된 고유치 값은 일차 변동값이 높게 나타났다. 이는 랜덤변수를 근사화하는 방법에 따라서 차이가 나타났다.

이차 섭동값이 일차 변동된 값 보다 정확한 상태를 예측하리라 여겨진다.

4.2 계단 보(steped beam)

초기에 단면적이 동일한 $A_1=A_2$ 인 보가 Fig. 2에 나타나 있다. 이 예제는 A_1 이나 A_2 를 변경하여 보를 보강함으로써 고유 진동수를 증가시키고자 하는 문제이다. 확률변수는 탄성계수, 단면적 및 질량 밀도로 선정하였다. 확률변수의 변동계수는 동일하게 0.1로 설정하였다. 설계 변수는 단면적의 기대값인 A_1^0 및 A_2^0 이다. 설계 데이터는 Table 8에 나타나 있다. 보의 길이는 l_1 과 l_2 를 각각 100mm로 하였다. 관성 모멘트는 $I=\beta A^2$ 로 계산되며, β 는 08336으로 주고 수치해석 하였다.

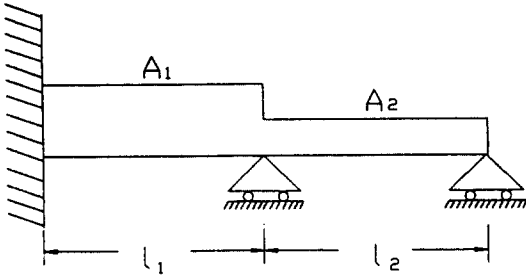


Fig. 2 Stepped beam

Table 8 Design Data for the Stepped Beam

The expected value of modulus of elasticity=21000 kgf /mm ²
The expected value of material density=0.796 × 10 ⁻⁹ kg · s ² /mm ⁴
Initial expected value of area (A ⁰)=25 mm ²
Lower limit of the frequency constraint (λ^a)=1559 Hz

$$\frac{\lambda^a}{(\lambda^0 + \lambda^I + \lambda^{II})} - 1.0 \leq 0 \quad (27)$$

식(27)에서 λ^0 는 고유치 문제에서 얻어지는 해로서 고유진동수의 제곱값이다. λ^I 와 λ^{II} 는 각각 계산에 의하여 산출되는 일차 및 이차 변동된 고유치 값이다. λ^a 는 고유치에 대한 하한값이다. 확정적인 경우에 대한 설계 민감도 해석 결과가 Table 10에

나타나 있다. 불확정적인 경우는 탄성계수, 단면적 및 질량 밀도의 변동계수가 0.1일 때 수행되었는데, 일차 및 이차 섭동법을 적용한 결과가 각각 Table 12 및 Table 14에 나타내었다. Table 9에서 $\frac{d\psi_1}{dA^0}$ 는 정규화된 고유치 제한식을 편미분한 값이다. Table 10에서 ψ_1^1 과 ψ_1^2 는 각각 초기 설계값 A^0 와 개선된 설계값 $A^0 + \delta A^0$ 에서 제한식 값이다. $\Delta\psi_1$ 는 $\psi_1^2 - \psi_1^1$ 로 계산되는 ψ_1^1 과 ψ_1^2 의 차이 값이다. ψ_1' 는 직접 미분법에 의하여 구해지며, $\frac{d\psi_1}{dA} \delta A^0$ 로 계산된다. 수치 결과는 1% 설계 변화($\delta A^0 = 0.01A^0$)를 주어서 구하였다.

Table 9 Design Derivatives for Deterministic Beam

No.	Design	$d\psi_1^I / dA^0$
1	25.0	-0.0240
2	25.0	-0.0153

Table 10 Comparison of the Deterministic Sensitivity Calculation

Const.	ψ_1^1	ψ_1^2	$\Delta\psi_1$	ψ_1'	$\psi_1' / \Delta\psi_1 \times 100\%$
ψ_1	-1.583E-02	-2.557E-02	-9.75E-03	-9.825E-03	100.8

Table 11 Design Derivatives for the First-Order perturbed Beam

No.	Design	$d\psi_1^I / dA^0$
1	25.0	-2.110E-02
2	25.0	-1.260E-02

Table 12 Comparison of the First-Order Perturbed Sensitivity

Const.	ψ_1^1	ψ_1^2	$\Delta\psi_1$	ψ_1'	$\psi_1' / \Delta\psi_1 \times 100\%$
ψ_1	-0.6891E-02	-0.1672E-01	-9.892E-03	-8.425E-03	85.72

Table 13 Design Derivatives for the Second-Order Perturbed Beam

No.	Design	$d\psi_1^I / dA^0$
1	25.0	-2.120E-02
2	25.0	-1.270E-02

Table 14 Comparison of the Second-Order perturbed Sensitivity

Const.	ψ_1^1	ψ_1^2	$\Delta\psi_1$	ψ_1'	$\psi_1' / \Delta\psi_1 \times 100\%$
ψ_1	-0.7072E-02	-0.1690E-01	-9.828E-03	-8.475E-03	86.23

확정적인 경우 보에 대한 민감도 해석에서는 두 방법에 의한 계산이 잘 일치하였다. 그러나 일차 및 이차 섭동법을 적용한 민감도 해석에서는 약간의 오차가 있었지만, 원래 제한식 값에 대한 비율이 적기에 문제가 되지 않는다. 그러나 경향은 유사하였다. 확률 유한 차분법에서 이동거리를 줄여 주면 오차량을 감소시킬 수 있다.

5. 결 론

불확정 구조계의 선형 고유치 문제는 재료정수나 경계조건 및 외부하중 등에 결정론적으로 사용할 수 없는 확률량을 포함하고 있다. 비선형성이 심한 구조계를 선형화할 때 일차 및 이차 변동값을 반영함으로 고유치의 정도를 향상시킬 수 있다.

불확정계의 선형 고유치 문제는 최적설계 정식화에서 변동된 값을 고려하여야 신뢰성 있는 설계가 된다. 최적설계 알고리즘 중에는 제한 조건식의 설계 민감도를 요한다.

본 연구에서는 일차 및 이차 섭동법을 사용하여 고유치와 고유벡터의 변동값을 구하고, 최적설계 수행시에 일차 및 이차 섭동량에 대해 적용할 수 있는 민감도 해석법을 개발하였다.

트러스 및 보요소를 사용하여 고유치 제한 조건식에 대한 민감도 해석을 수행한 결과에 대해서 다음과 같은 결론을 지을 수 있다.

1) 일차 및 이차 변동된 고유치 값은 변동계수가 동일하더라도 차이가 있었다. 이는 확률변수를 근사화함에 의하여 발생하였다. 이차 섭동법에 의한 결과가 일차 섭동법 보다 정확한 상태를 예측할 수 있다.

2) 트러스 부재의 민감도 값의 상대 비교는 대체로 유사한 경향을 보였다. 보에 대한 결과는 약관의 차이는 있었으나 제한식 값에 비해 상대 비율이 적었기에 문제가 되지 않았다. 두 방법에 의한 차이는 확률 유한 차분법에서 이동거리를 감소시켜 주면 잘 일치하리라 예상된다.

參 考 文 獻

1. J. D. Collins and W. T. Thomson, "The Eigenvalue Problem for Structural Systems with Statistical Properties", AIAA JOURNAL, VOL. 7, NO. 4, pp.642-648, 1969.
2. L. Meirovitch, Computational Methods in Structural Dynamics, SIJTHOFF & NOORDHOFF, 1980.
3. 中桐滋, 久田俊明, 確率有限要素法入門, 培風館, 1990.
4. R. L. Fox and M. P. Kapoor, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA JOURNAL, VOL.6, NO. 12, pp.2426-2429, 1968.
5. C. A. Rudisill and Y. Y. Chu, "Numerical Methods for Evaluating the Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA JOURNAL, VOL.13, NO.6, 1975.
6. 양영순, 김지호, "고유치 문제의 확률 유한요소 해석", 전산구조공학, 제4권, 제2호, pp.111-117, 1991.
7. 임오강, 이병우, "불확정 구조계 고유치에 관한 민감도 해석", 전산구조공학, 제7권, 제1호, 1994.
8. E. J. Haug, K. K. Choi, V. Komkov, Design Sensitivity Analysis fo Structural Systems, ACADEMIC PRESS, 1986.

(接受 : 1994. 3. 15)