대형구조시스템의 최적화

황 진 하*

I. 서 론

구조공학도들이 이루고자 하는 궁극의 목표는 가능한 한 가장 좋은, 즉 최적의 구조를 창출하는 것이라고 할 수 있다. 넓고 오랜 학문적 기반을 갖고 있는 구조공학의 여러 분야 중에서 바로 이러한 목표에 직접적으로 접근하고자 하는 것이 구조최적화(structural optimization)다. 구조최적화는 요구된 설계조건(design requirements)을 만족시키면서 최대의 경제성을 갖는 구조시스템을 도출하는 과정으로 실행 측면에서 해석모듈(analysis module)과 최적화모듈(optimization module)의 반복결합으로 수행되는 전산과정이며 설계자동화에 이어지는 핵심적 도구이다.

구조시스템을 해석하기 위한 체계화된 전산방법으로 널리 쓰이고 있는 것이 유한요소법인데 반해 그에 대응하는 설계방법은 아직 정립되어 있지 않다. 그러나 60년대 이후 공학계의 일반적인 흐름에 따라 구조물에 대한 설계자동화의 노력이 이어져왔고 구조최적화도 그와 연관된 하나의 체계적 방법론이다.

Maxwell(1869)과 Michell(1904)이 구조계의 최적배치문제를 다룬 이후 한동안의 휴지기를 거쳐 제2차 세계대전을 지나면서 다시 학문적 관심의 대상이 된 구조최적화에 관한 연구는 1950년대 후반부터 60년대 초반이후 Prager가 주도한 해석적방법론(analytical methods)과 Schmit가 선도한 수치적방법론(numerical methods)의 양대 주류가 형성되었다. 그후 이론적 기반이 다져진 60년대 후반부터 전산 환경의 급격한 발전에 맞추어, 전자에 기반을 둔 수치적 최적규준법(optimality criteria methods)과 후자의 주종을 이루는 수리계획법(mathematical programming methods)이 구조최적화를 위한 기본 접근방법으로 활용되고 있다[1-7].

구조최적화 분야는 작게 보면 구조공학의 한 분야에 불과하지만 그것이 지향하는 목표가 보다 근원적이고 원대한 것일 뿐만 아니라, 설계 자체가 복잡하고 다양한 선택과 결정의 과정인 터에, 세부 대상이나 접근방법에 따라 여러가지 부 영역을 포괄하는 방대한 연구 영역을 이루고 있다. 크게 대상으로 보아 단면(sizing), 기하(geometry) 또는 형상(shape)과 위상(topology) 최적화 등으로 나눌 수 있고, 보다 상급과제로 그들을 통합하는 배치최적화(layout optimization) 등이 있다. 다른 한편으로 방법이나 도구로써 각종 수치계산 알고리즘 및 민감도해석과 함께 CAD나 EXPERT SYSTEMS 등을 활용하는 방법 등이 활발히 연구되고 있는 바, 여기서는 구조시스템이 하나의 대규모 공학시스템(large scale engineering systems)이라는 본질적 측면에 입각, 복잡한 대형구조시스템의 최적화를 위한 기본이론과 방법을 다루어 보고자 한다.

II. 구조시스템 모델

계획, 해석, 설계 등 구조공학의 여러 문제를 형성하고 풀기 위하여 시스템을 지배하는 기본 법칙

* 충북대학교 공과대학 구조시스템공학과

을 수학적으로 표현하는 시스템방정식을 필요로 한다. 그 대표적인 것들이 평형방정식 구성관계식 적합조건 등이고 그러한 시스템방정식들로 표현되는 구조시스템의 최적화문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathrm{Min}\{F(X) \mid H(X)=0,\ G(X)\leq 0,\ X\in R^n\} \quad (2.1)$$

여기서 $F(X)$는 설계변수벡터 X의 식으로 표현되는 목표함수(objective function)이고 $H(X)$와 $G(X)$ 등의 제약조건들은 최적화문제의 허용가능영역(admissible domain or feasible domain)을 설정한다. 이러한 문제는 일반적으로 수리계획법 특히 비선형계획법으로 다루어질 수 있는데 구조시스템과 같은 대규모시스템을 모델링하고 실제 최적화하는 데는 상당한 어려움이 따른다. 이러한 것은 주로 설계변수와 제약조건의 과다, 비선형이고 암시적인 모델의 복잡성에 기인한다. 이에 대한 고전적 대응방법은 선형화 등으로 시스템 모델을 단순화하고 simplex방법이나 SLP(sequential linear programming)와 같은 기법을 활용하는 것이다.

그러나 1970년 경부터 유용한 새로운 이론과 방법이 개발되어 왔는데, 그것이 분할(decomposition)과 조율(coordination)에 의한 계층적다단계최적화방법(multilevel optimization)이다. 다단계접근방법의 기본 개념은 복잡한 대규모시스템을 분할하여 몇 개의 독립된 부시스템(subsystems)으로 모델링하는 것이다. 먼저 분할된 부시스템에 대하여 형성된 부문제(subproblem)를 독립적으로 최적화하고 상급단계에서 부문제의 해들을 조율하여 원시스템과 같은 상태로 결합한다. 분할과 조율은 계층적시스템을 위한 다단계 최적화의 기본 도구이나 그 특성이나 성분 및 형태가 다른 복잡하고 커다란 비계층적시스템의 최적화에도 효율적으로 활용될 수 있다.

다전공최적화(multidisciplinary optimization)와 같은 프로젝트나 작업(operation) 등의 무형시스템과 같이 비계층구조(nonhierarchical structure)를 갖는 경우와 구조시스템이나 기계시스템 등의 유형시스템과 같이 계층구조(hierarchical structure)를 갖는 경우로 나누어 볼 때 전자는 수평분할(horizontal decomposition) 또는 작업지향분할(operation-oriented decomposition), 후자는 수직분할(vertical decomposition) 또는 체계지향분할(system-oriented decomposition)에 의한 최적화가 보다 적합하다. 물론 이러한 분류 개념은 서로 명확히 구분되어지는 것은 아니고 서로 중복되기도 하며 실제 시스템을 최적화할 경우 작업지향과 체계지향분할을 병행하게 된다.

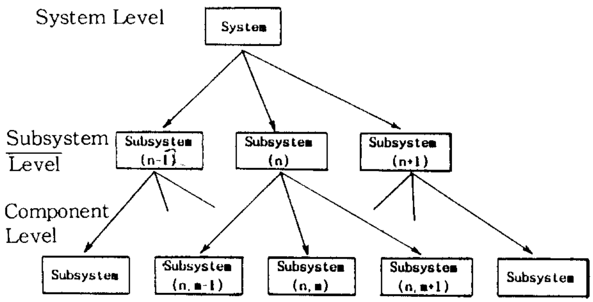


Fig. 1. Hierarchical structure of systems

나아가 시스템을 정의하는 시스템방정식의 관점에서 보면 단순히 수학적으로 분할하는 경우와 역학적 성격에 따라 분할하는 경우가 있다. 실질적인 면에서 최적화를 위한 분할을 하는데는 경험이나 직관이 많은 영향을 미치게 되는데, 변수와 방정식으로 구성되는 수학적 모델을 몇 개의 군으로 분할할 때 각 군 내에서의 변수들간에는 밀접한 관계가 있고 다른 군에 속하는 것들과는 느슨한 관계를 갖게 된다. 즉 수학적 구조 측면에서 본다면 크게 BLOCK-DIAGONAL 구조와 BLOCK-ANGULAR 구조로 나눌 수 있다.[28,39]. B−D 구조의 경우 S개의 부시스템으로 분할된 시스템 최적화문제의 목표함수와 제약조건은 각 부구조에 속하는 것들의 항으로 분리될 수 있고, 이때 최적화문제는

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min.} \quad \sum_{s=1}^{S} F_s(X_s) \\ &\text{subject to} \quad G_s(X_s)\leq 0,\ s=1,\cdots,S \end{aligned} \qquad (2.2)$$

과 같이 재구성되고 이는 독립된 작은 부문제들의 해집합이다. 실제 이러한 경우는 드므나, 부시스

템 간의 연계가 대단히 느슨한 많은 경우에는 원 문제를 B−D 형으로 풀고 연계를 고려한 조율과정을 반복하여 상당한 효과를 얻을 수 있다. 그러나 많은 경우 각 부문제들이 서로 연계되어 있고 이때 부시스템들 간의 상호작용을 연계변수벡터(coupling variables or interaction variables) π 로써 고려하면 최적화 문제를

$$\text{Min} \quad F_0(\pi)+\sum_{s=1}^{S} F_s(X_s, \pi) \tag{2.3}$$

$$\text{subject to } G_0(\pi)\le 0$$

$$G_s(X_s, \pi)\le 0, \quad s=1,\cdots,S$$

와 같이 설정할 수 있다. 여기서 G_0는 시스템 제약조건(system constraints or global constraints) X_s는 부시스템에 관계되는 설계변수벡터(subsystem or local variables), 그리고 G_s는 부시스템 제약조건(subsystem or local constraints)이라 하고, 이때 설계변수들의 목표함수와 제약조건들과의 관계는 B−A 형태를 갖게된다.

일반적으로 시스템이론에서 최적시스템을 찾는 문제는 거동을 나타내는 거동변수 또는 상태변수(state variables) Z와 제어 또는 설계변수(control or design variables) X들로

$$\text{Min} \quad J=F(X, Z) \tag{2.4}$$

$$\text{subject to } H(X, Z)=0,$$

$$(G(X, Z)\le 0)$$

와 같이 정의할 수 있다. 연계변수

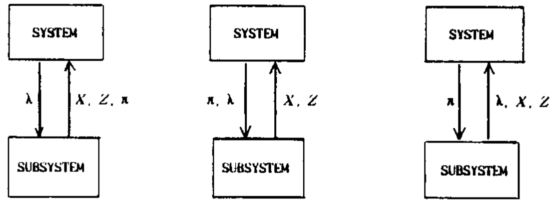
$$\pi^i=\gamma^i(X^j, Z^j) \ ; \ j \ne i \tag{2.5}$$

를 통해 독립적으로 분할된 최적화문제는

$$\text{Min. } J=\sum_{i=1}^{S}[F^i(X^i, Z^i, \pi^i) + \lambda^{iT}\{\gamma^i(X^j, Z^j)-\pi^i\}] \tag{2.6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H^i(X^i, Z^i, \pi^i)=0 \ i=1,\cdots,S \\ G^i(X^i, Z^i, \pi^i)\le 0 \end{array} \right\}$$

같이 형성된다. 조율방법은 조율변수의 선택과 조작방법에 따라 크게 interaction balance method와 interaction prediction method 및 feasible method로 나눠고 그것은 분할의 형태와 밀접한 관계가 있다. 여기서 조율변수는 조율과정을 제어하는 것이고 연계변수는 분할과정에서 도입되는 것으로서 조율방법 또는 전략에 따라 같게 취할 수도 있다.



(a) Interaction balance method (b) Interaction predicition method (c) feasible method

Fig. 2. Coordinating strategy

Fig. 2에서 보이는 몇 가지 조율 전략에서, 문제를 설정하고 그 특성에 따른 설계변수, 연계변수, 조율변수 등을 선정한 후, 먼저 고정된 조율변수를 갖고 독립된 부시스템을 최적화하고 그들의 최적해를 바탕으로 시스템최적화를 통한 조율, 즉 조율변수를 개선하는 등의 공통되는 반복과정을 갖는다.[20-23]

Ⅲ. 구조최적화의 주요방법

수리계획법과 최적규준법

수리계획법 또는 직접방법은 수학적으로 설정된 최적화문제

$$\text{Min} \quad F(X) \tag{3.1}$$

$$\text{subjest to } H_i(X)=0, \ i=1,2,\cdots,m$$

$$G_j(X)\le 0, \ j=1,2,\cdots,n$$

$$X^L \le X \le X^U$$

를 여러가지 알고리즘을 이용하여 직접 최적해를 찾는 것이고 최적규준법 또는 간접방법은 특정한 설계조건과 관련된 최적규준을 도출한 후 순환법칙에 따라 축차적으로 재설계해 나가는 것이다. 전자는 여러 설계문제에 대해 일반성과 수렴성을 갖으나 설계변수와 제약조건의 수가 증가함에 따라 효율성이 떨어지고 후자는 대체로 그와 상반된 장단점을 갖는다.

수리계획법의 대종을 이루는 비선형계획(nonlinear programming) 문제의 형태나 방법에 따라 몇 가지로 분류되고 실제 이들을 결합해 사용케 된다.

부등식제약조건이 설정한 설계공간에서 직접 해를 찾는 직접탐사법(direct search methdos)과 제약조건을 인수와 승수를 이용하여 제약된 최적화문제를 비제약문제로 변환시키는 변환법(transformation method)으로 나눌 때 전자에는 Method of feasible directions, GP(gradient projection method), GRG(generalized reduced gradient method) 등의 기본 탐사법과 원문제를 일련의 LP 또는 QP 형식의 부문제들로 바꾸어 푸는 SLP(sequential linear programming), SQP(sequential quadratic programming) 등의 근사화방법이 많이 사용되고, 후자에는 SUMT(sequence of unconstrained minimization techniques)로 알려진 여러 종류의 위반함수법(penality function method)과 Largrange multiplier method 계열이 속한다.

식(3.1)-(3.4)로 설정된 최적화문제는 J개의 활성제약조건(active constraints)을 Lagrange승수로 수반시켜 확장된 문제

$$L(X, \lambda)=F(X)+\sum_{j=1}^{J} \lambda_j G_j(X) \qquad (3.2)$$

가 최소값을 갖는 수학적 필요조건은

$$\nabla F+[\nabla G]\lambda=0 \quad \text{and } \lambda>0 \qquad (3.3)$$

와 같이 나타낼 수 있고, 이것이 바로 Kuhn-Tucker조건이다. 여기서 λ는 Lagrange승수 또는 수반변수(adjoint variable), $\nabla F=\{\partial F/\partial X_1,\cdots\partial F/\partial X_n\}^T$. $[\nabla G]=[\nabla G_1,\cdots,\nabla G_j]$을 나타낸다.

제약조건 G는 응력, 처짐, 안정성 및 진동 등 설계조건에 따른 역학적 상하한 관계를 나타내고 그 때 식(3.2)는 설계변수 X와 수반변수 λ를 축차적으로 구하도록 하는 순환관계식으로 변환된다. Venkayya, Berke, Khot 등이 지수형과 선형 형태를 갖는 다양한 재설계 알고리즘을 개발하였다.

수리계획법에서 k번째 설계값이 전단계 설계값으로부터

$$X_i^{k+1}=X_i^k+\Delta X_i^k \quad , i=1,\cdots,n \qquad (3.4)$$

과 같이 찾아지는 데 비해, 최적규준법에서는

$$X_i^{(k+1)}=\eta_i^{(k)} X_i^{(k)} \quad , i=1,\cdots,n \qquad (3.5)$$

같은 여러가지 축차공식에 의해 재설계된다. 위의 두가지 과정은 다른 절차로 풀어지지만 그들사이에

$$\eta_i^{(k)}=1+\frac{\Delta X_i^{(k)}}{X_i^{(k)}} \quad , i=1,\cdots,n \qquad (3.6)$$

의 관계가 있음을 알 수 있고 근사화 개념을 통해 등가문제에 이름을 알 수 있다. 이러한 점에 입각, Fleury와 Sander는 원문제를 일련의 근사화문제로 변환하는 방법을 크게 두가지로 구분하고 그것을 푸는 일반화 최적규준법(generalized optimality criteria method)을 제안하였다.[11-13]

근사화 개념

전기한 바와 같이 실제 구조계를 최적화하는 데는 근사화과정이 중요한 기능을 한다. 70년대 중반 Schmit가 이끄는 연구그룹이 중간변수(intermediate variable), 명시적 근사화, 기저축소/설계변수연계, 제약조건 취사 등의 중요한 기본개념을 도입한 이후 대형시스템을 효율적으로 다루기 위한 기법들이 계속 연구되었으며 최근의 전산기법에 맞춘 새로운 개념들이 계속 발표되고 있다. 근사화가 이루어지는 설계공간의 크기에 따라 전체 또는 넓은 영역에서 취해지는 전체적 근사화(global approximation)와 특정 위치 근방에서 성립되는 국부적 근사화(local approximation)로 나눌 수 있으며, 또한 성격에 따라 목표함수나 제약조건 등을 명시적으로 표현하는 함수근사화(function approximation)와 원래의 문제를 다루기 쉬운 등가문제로 변환시키는 문제근사화(problem approximation)로 구분할 수 있다.[28]

Schmit와 Miura가 설계변수연계와 기저축소를 결합해서 설계변수의 수를 줄이는 방법을 제안했다.[8-10]

$$X=LB\ X_B \tag{3.7}$$

여기서 X는 원설계변수벡터, X_B는 축소된 설계변수벡터이고 L은 모든 행이 단 하나의 0(zero)이 아닌 값을 갖는 연계매트릭스(linking matrix), B는 기저벡터들을 열로 갖는 기저변환 매트릭스이다. 차원축소법은 원최적화문제의 부분해로서 기저벡터를 설정하고 그들이 이루는 축소된 부공간에서 최적화를 수행하는 근사화방법으로서 구조해석에서 사용되던 기법을 설계문제에 원용한 것이고, 연계는 구조계를 구성하는 요소들의 대칭성이나 제작성 및 유사한 설계자료로부터 설계변수를 몇개의 그룹으로 묶는 것으로서 보통 설계자의 경험이나 직관이 작용한다.

문제에 대한 국부적 근사화는 제약조건의 갯수를 줄여 최적화문제의 차원을 줄이는 것이다. 먼저 국부제약조건 등 최적화 과정에 영향을 적게 미치는 설계변수를 상수로 하고 나머지를 가장 영향이 많이 미치는 변수와 연계시키는 방법이 있고 제약조건에 대하여도 각 반복 과정마다 몇개의 활성제약조건(active constraints)만을 가지고 민감도를 계산하는 임시소거(temporary constraint deletion), 더 나아가 부구조(substructures or superelements) 등의 영역에서 활성제약조건들만 취하거나 어느 한계에서 절단하는 regionalization/truncation방법이 있다.

최적화문제는 일반적으로 비선형이고 암시적으로 형성된다. 따라서 이를 보다 쉽게 풀기 위하여 원래의 문제를 명시적이고 가능한 한 선형인 근사화 문제로 재구성할 필요가 있다. 먼저 최적화 문제를 정의하는 설계변수와 거동해석으로 부터 직접 산출되는 상태변수를 중간변수를 통해 보다 명시적으로 바꾸므로써 계산의 효율성과 함께 정확도를 높일 수 있다.

연계나 축소가 설계공간의 차원을 줄이는 방법이라면 최적화문제를 구성하는 함수들의 근사화를 보다 효율적으로 하기 위한 것이 Schmit가 처음 제안한 중간변수(intermediate variables)이다.[7-10] 중간설계변수를 X_I, 단면력과 같은 중간거동변수를 Z_I라 하고, 각각 설계변수 X와 중간변수 X_I의 함수라 하면 설계변수 X에 대하여 응력과 같은 거동은

$$Z(X)=Z(Z_I(X_I(X)))\cong\widetilde{Z}(\widetilde{Z}_I(\widetilde{X}_I(X))) \tag{3.8}$$

와 같이 각각의 단계에서 양질의 근사화가 이루어질 수 있다. 중간변수로 취해지는 대표적인 것이 단면의 상세치수(예 ; 들보의 높이, 너비, 박벽의 두께) 등에 대하여 단면상수(예 ; 단면적, 단면2차 모멘트)나 그의 역수 등이고 때로는 대표적 단면치수의 멱의 역수 등을 취하기도 한다. 중간거동은 허용응력 등 제약조건을 직접 구성하는 양을 구조해석을 통해 산출되는 단면력등의 관계를 통해 간접적으로 근사화하는 데서 연유한다. 예를 들어 트러스 부재의 응력은 단면적을 중간변수로 할 때

$$\widetilde{\sigma}_i=\frac{F_i}{A_i}=\frac{F_{oi}+\sum_{J=1}^{N}\frac{\partial F_i}{\partial A_J}(A_j-A_{jo})}{A_i} \tag{3.9}$$

와 같이 쓰므로써 A_j와 A_i의 연계를 고려한 양질의 근사값을 얻게 되고 휨부재의 경우 정도는 더 높아지게 된다.[40]

여기서 함수에 대한 근사화는 Taylor series를 이용한 선형 근사화(linear approximation)를 들 수 있다.

$$G_L(X)=G(X_o)+\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{oi})\left(\frac{\partial G}{\partial X_i}\right)_{x_o} \tag{3.10}$$

이 방법은 가장 보편적이나 간혹 정확도가 떨어지는 단점이 있어 이 점을 개선키 위해 설계변수의 역수를 취하여 1차 전개한 상반근사화(reciprocal approximation)가 자주 사용된다.

$$G_R(X)=G(X_o)+\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{oi})\frac{X_{oi}}{X_i}\left(\frac{\partial G}{\partial X_i}\right)_{x_o} \tag{3.11}$$

이것은 부정정구조의 경우에도 응력이나 변위

등의 거동을 보다 선형에 가깝게 하는 장점을 갖고 scaling을 이용한 반복 설계에 유용하나 설계변수 중의 하나가 대단히 작게되는 경우 커다란 오차를 유발하는 문제가 있어 이를 개선하기 위한 방법이 발표되었고 그중 하나가 혼성근사화(hybrid or conservative approximation)로 선형과 상반근사화의 혼합된 형태를 갖고 있다.

$$G_C(X)=G(X_o)+\sum_{i=1}^{n} G_i(X_i-X_{oi})\left(\frac{\partial G}{\partial X_i}\right)_{X_o} \quad (3.12)$$

$$;\ G_i=\begin{cases}1 & \text{if } X_{oi}(\partial G/\partial X_i)\geq 0,\\ X_{oi}/X_i & \text{otherwise.}\end{cases}$$

여기서 $G_i=1$은 선형, $G_i=X_{oi}/X_i$인 경우 상반근사화에 해당된다. 혼성근사화는 선형이나 상반근사화보다 실제값에 안정성이 있으나 덜 정확하다. 정확도를 보다 높이기 위해 제안된 것으로써 점근선이동법(method of moving asymptotes)이 있다.[39]

지금까지가 설계변수와 상태변수 등에 대한 직접적인 조작이라면 문제에 대한 전체적 근사화는 해석과정에서 보다 강하게 이루어질 수 있다. 즉 유한요소망을 좀더 크게, 자유도를 적게 잡는 등으로 정밀도는 떨어지지만 보다 단순한 해석모델을 사용하는 것이 중간 반복과정에서 유용하다.

설계민감도 해석

설계민감도해석이란 설계변수에 대한 거동변수의 도함수를 구하고 나아가 목표함수와 제약조건들의 도함수를 산정하는 것을 의미하는 것으로 구조최적화문제에서 이들 함수가 설계변수에 대해 암시적으로 표현됨에 따라 설계변수와 거동변수의 관계를 먼저 정립해야 하며 이는 시스템방정식

$$Kr=R \quad (3.13)$$

을 설계변수에 대해 미분을 취함으로서 얻을 수 있다. 변수 r을 변위와 관계된 거동변수라 하면

$$K\frac{dr}{dX}=\frac{\partial R}{\partial X}-\frac{dK}{dX}\,r=W \quad (3.14)$$

여기서 K는 강성도 매트릭스, R은 하중벡터, r은 변위벡터를 나타내고 목표함수 또는 제약조건 등의 함수를 $\Phi(X,r)$로 표시할 때 그들의 설계변수에 대한 도함수는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{d\Phi}{dX}=\frac{\partial \Phi}{\partial X}+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^T\frac{dr}{dX} \quad (3.15)$$

식(3.14)에서 W를 유사하중(pseudo load)이라 할 때 식(3.13)과의 유사성으로부터 거동해석시 저장된 값들을 이용하여 dr/dX를 구하게 되는데 식(3.15)을 직접 계산하는 설계공간법(design space method), 수반방정식으로부터 간접적으로 구하는 상태공간법(state space method)과 가상하중에 대응하는 가상변위를 이용한 가상하중법(virtual load method)이 있다.

재해석 방법

이 장에서 마지막으로 재해석과정을 언급할 필요가 있다. 최적화 과정은 반복적이고 그 때마다 해석을 요할 뿐만 아니라 해석과 민감도해석이 대단히 많은 비용을 차지하기 때문에 중간과정의 해석에 근사화 개념과 함께 재해석 알고리즘을 이용하는 것이 효율적이기 때문이다.

재해석이라 함은 보통 정확한 전단계 해석정보값을 이용하여 개선된 설계값에 대하여 해석하고자 하는 것이다. 즉 설계변수가 X°에서 ΔX만큼 변하고 따라서 강성도 매트릭스 K°가 ΔK만큼 변할 때 새로운 변위 r 등을 구하는 과정이다.

$$(K^\circ+\Delta K)r=R \quad (3.16)$$

설계의 일부분만이 변할 때 효율적인 직접법, 많은 부분에 약간씩의 수정이 가해질 때 적합한 반복법 등이 있으나 중간과정에서는 근사화방법이 가장 효율적이다. 많은 방법이 발표되었으나 그 기본은 Taylor series를 이용한 방법과 기저축소방법이라 할 수 있다.

대형시스템의 최적화와 관련해서 부구조화방법에 따라 각각의 부구조에서 구해지는 민감도정보를 이용하면 더욱 효과를 얻을 수 있다. Taylor series를 이용한 부구조의 내부 및 경계변위는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} r_b \\ r_i \end{Bmatrix}\simeq\begin{Bmatrix} r_b^o \\ r_i^o \end{Bmatrix}+\sum_{j=1}^{n}(X_j-X_j^o)\begin{Bmatrix} \partial r_b^o/\partial X_j \\ \partial r_i^o/\partial X_j \end{Bmatrix}$$

$$\text{on substructure} \quad s=1,\cdots,S \qquad (3.17)$$

여기서 상부의 『o』는 전단계의 계산값이고 X_j는 부구조 설계변수 r_i와 r_b는 각각 부구조의 내부와 경계변위를 표시한다.[15-19]

Ⅳ. 계층적 접근 방법

구조시스템을 예로 볼 때 차상급단계의 하중을 분담하는 병렬된 성분을 갖는 각 단계들이 수직적으로 계층을 이루는 직·병렬의 계층구조를 갖고 있다. 2장에서 논한 바와같이 일반적으로 시스템의 특성이 유형이든 무형이든, 또한 그 구조가 계층적이든 비계층적이든지 간에 대형시스템을 최적화하기 위해서는 총체적으로 하나의 시스템을 동질 또는 이질적 부분이 수평적 수직적으로 결합된 복잡한 계층구조로 파악하고 단계적으로 접근하는 것이 효과적이다. 이런 점에서 계층 및 비계층구조로 구성된 대형시스템의 다단계최적화 연구에 중요한 역할을 한 Sobieski가 최근 자신이 10여년 간 heuristic하게 도출한 다단계최적화방법이 직렬시스템(serial system) 또는 multi-stage system에 대한 강력하고 일반적인 최적화도구로서 평가받는 동적계획법의 확장이라고 주장한 점도 유의할 만하다.[35] 우선 직렬구조를 대상으로 한다는 점에서 구조최적화의 경우 특수한 방법으로 알려졌던 동적계획법이 보편적 구조최적화 도구로 연구되고 있는 다단계방법과 맥락을 같이 하는 것으로 늦게나마 인식되었다는 것은 개념상 지극히 당연한 것이다. 이장에서는 편리상 전산실행의 방법에 따라 직렬구조 관점의 순차최적화와 병렬구조 관점의 동시최적화로 나누어 다루고자 한다. 그러나 여기서 지적할 것은 앞서 지적한 바와 같이 하나의 대형시스템은 직·병렬로 결합된 복잡한 계층구조를 이루고 있고 따라서 실제 최적화작업시 두 가지 최적화방법의 적절한 결합이 필요할 뿐만 아니라 효율적이라는 점이다.

직렬구조의 순차최적화

구조시스템은 작용하는 하중 전달 메카니즘의 관점에서 볼 때 대표적인 수직 직렬시스템의 하나이고 바로 그것으로 모델링된다. 그러한 직렬시스템은 Bellman의 동적계획법에 의해 단계적으로 접근될 수 있다.[32,33] 그러나 여기서는 보다 일반적인 직·병렬계층구조를 포괄하는 다단계방법을 논하기로 한다.

대형시스템에 대한 이론이 개발되어 감에 따라 구조최적화문제에서 해석과정에서와 같이 대형구조를 최적화하기 위해서 구조시스템을 몇 개의 보다 작은 부구조로 분할(decomposition)하여 각각을 독립적으로 최적화하는 부시스템최적화(subsystem or subsystem level optimization)단계와 최적화된 부시스템들을 조율(coordination)하여 원래의 전체구조로 원상 결합하는 시스템최적화(system or system level optimization)단계를 거치는 계층적 다단계 방법(hierarchical multievel method)이 자연스럽게 시도되었다.[29-31, 34-39] 즉 다단계최적화는 둘 이상의 단계로 구성되어 커다란 설계최적화문제를 각각 몇 개의 부문제를 포함하는 계층구조로 분할하고 먼저 하급단계에서부터 부문제들이 독립적으로 풀어진 다음 차상급단계의 최적화문제가 하급단계의 제약조건이 만족하는 최적해를 갖도록 각 부문제의 해들이 조율된다. 전술한 바와 같이 분할과 조율이 본격적으로 구조최적화 문제에 도입 적용되기 시작한 것은 시스템이론에서 연유한다.

Dantig와 Wolf가 1960년에 발표된 선형문제에 대한 분할원리를 1970년에 Mesarovic, Macko와 Takahara 등과 Lasdon이 각각 System 이론과 OR(operations research)이론에 확장, 적용하여 다단계최적화이론의 기본개념 및 방법을 체계화하고 1971년 Wismer 등이 정적 및 동적시스템의 다단계최적화문제를 집성하였다.[20-23]

구조문제에서 Kirsch등이 구조계를 몇 개의 부구조로 나누어 축차적으로 각 부구조를 최적화할 때 나머지 구조의 설계변수는 고정시켜 하나씩 순차적으로 접근해나가는 비교적 heuristic한 방법을 발표했다. 그뒤 Kirsch와 Moses는 feasible method에서 조율변수로 시스템의 거동을 택하여 철근콘크리트 구조에 적용시켰으며, 유연도 해석방법과 결합하여 21개의 부재를 갖는 트러스 등에

적용한 바 있다.[24-28]

70년대 후반에 이르러 다양한 다단계최적화방법이 발표되었다. Sobieski, Schmit, Haftka, Vanderplaats 등이 주도하였으며 그들 중 Sobieski등은 대규모최적화문제에 대한 선형분할방법(linear decomposition method)을 일반화시켜 공학시스템설계를 다루기 위한 다단계최적화문제를 형성하였다.[29-31, 34-39] 이것은 특히 여러 전공자들의 참여를 요하는 다분야최적화문제(multidisciplinary optimization problem)와 관련된 여러 부시스템간 trade-off 문제를 다루었으며 최적설계민감도를 이용하여 부시스템간의 연계를 조율하였다. 그들은 하급단계의 목표함수로서 누적제약조건을 사용하였으며 이것은 또한 차상급단계에서 제약조건으로 사용되었다. 이 누적제약조건은 여러 제약조건들의 위반도 또는 만족도를 나타내는 측도 역할을 하며 KS함수(Kreisselmeier Steinhauser function)에 의해 계산된다.

$$KS=C=\frac{1}{\rho}\ln(\sum_j \exp^{\rho G_j}) \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial KS}{\partial X_i^k}=\frac{\partial C}{\partial X_i}=(\sum_j \exp^{\rho G_j})^{-1}\,(\sum_j(\exp^{\rho G_j}\frac{\partial G_j}{\partial X_i^k}))$$

여기서 ρ는 설계자에 의해 결정되는 제어인자이고, $C \geq 0$이고 $G_j > 0$, $j=1,2\cdots m(e)$이면 적어도 한 개의 제약조건이 위반된다. 또 $C<0$이고 $G_j<0$, $j=1,2\cdots m(e)$이면 모든 제약조건을 만족한다.

Haftka는 다단계최적화방법이 안고 있는 하급단계로부터 차상급단계로 전달되는 도함수들의 불연속거동에 대한 문제점 해결을 위해, Newton 방법과 연계된 위반함수법을 도입하였다.[38] 그는 이단계방법(two-level approach)으로 시도되는 최적화문제에서 조율변수의 최적치가 가능해가 아님을 직시하고 이를 해결하기 위한 방법으로 확장된 위반함수를 도입하여 다단계문제에 적용시켰다.

$$\text{Min. } J=F(Z)+P_\upsilon[G(Z,\gamma]+\sum_{i=1}^{S}\Psi_i(Z,\gamma)$$

$$\Psi_i(Z,r)=\underset{(x_i,\sigma_i)}{\text{Min}}\{F_i(X_i,Z)+P_\upsilon[G_j(X_i,Z),r_i]\} \tag{4.2}$$

이 식에서 $\Psi_i(Z,\gamma)$는 하급단계의 목표함수로 설정된다. P_υ는 제약조건들의 위반정도를 나타내는 함수이며 γ은 양의 값을 갖는 승수로서 위반항의 값들을 제어한다. 이것은 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$P_\upsilon(G_j,r)=\begin{cases}\dfrac{1}{G_j} & \text{for } G_j \geq G_0\\ \dfrac{1}{G_0}[3-3(\dfrac{G_j}{G_0})+(\dfrac{G_j}{G_0})^2] & \text{for } G_j > G_0\end{cases} \tag{4.3}$$

Barthelemy와 Riley는 convex approximation을 사용하여 암시적이고 비선형인 NLP를 명시적이고 선형인 설계문제들로 바꾸고 부문제에서 벗어나거나 임계값을 갖는 제약조건만을 취하였다.[37]

Vanderplaats등은 최적설계민감도와 비선형등식제약조건을 요하지 않는 시스템과 부시스템사이의 선형정보의 개념을 토대로 한 다단계최적화방법을 제안하였으나 부시스템들 간의 연계를 확립할 수 있는 수학적인 엄밀성이 결여된 결점을 가지고 있다.[41]

Schmit 그룹은 3장의 식(3.11)과 같이 설계변수연계와 기저축소법을 도입하여 시스템단계의 설계변수벡터를 한 개 또는 그 이상의 기저벡터들을 사용하여 형성하고 부시스템의 제약조건들은 부시스템을 구성하는 요소들(거동제약, 강성도 변화, 부시스템 중량의 증가)의 재분배를 통하여 만족되도록 하는 방법을 제안하였다. 이 연구에서 부시스템을 조율하기 위해 시스템단계에서 dual methods와 선형근사화를 이용하여 시스템제약조건을 근사화시켰으며 부시스템 단계가 수행되는 동안 경계변위를 고정시킨 채 근사화된 부시스템의 제약조건중 양의 값을 갖는 것들을 선정하여 부시스템의 목표함수로 설정하였다.[14]

Azarm과 Li는 NLP문제를 부등식제약조건만을 갖는 최적화문제로 재구성하고 하급단계에서 global monotonicity analysis를 통하여 활성제약조건을 찾아 차상급단계에서 다루는 다단계 최적화 방법을 제안하였다.[42] 이제까지 논한 대형시스템의 최적화를 위한 계층적 접근방법을 일반적인 개념적 유통도로 나타내면 Fig. 3과 같다.

구조최적화는 내부적으로 해석과 총합의 반복으로 수행되고 또 유한요소법이 해석의 도구로 쓰여진다는 점을 고려할 때 대형구조계를 해석하는 부구조화(substructuring)방법을 최적화에 연장하면 상당한 계산상의 잇점을 얻을 수 있다. 즉 대형시스템을 해석하기 위한 부구조화방법과 최적화를 위한 분할과정을 결합시켜 동일한 수학적 바탕위에서 재해석과 재설계의 반복과정을 수행하므로써 주어진 컴퓨터의 메모리용량을 효율적으로 운영하고 나아가 병렬/분산처리 등의 최근 전산환경에 맞출 수 있다.

$$K(X)r=R(X) \tag{4.4}$$

와 같은 시스템방정식을 갖는 구조시스템을 몇 개의 보다 작은 부구조로 나눈 다음, 경계자유도와 내부자유도에 따라

$$\underset{(N+M)\times(N+M)}{\begin{bmatrix} K_{BB} & K_{BI} \\ K_{IB} & K_{II} \end{bmatrix}} \underset{(N+M)\times 1}{\begin{Bmatrix} r_B \\ r_I \end{Bmatrix}} = \underset{(N+M)\times 1}{\begin{Bmatrix} R_B \\ R_I \end{Bmatrix}} \tag{4.5}$$

와 같이 분할하고, 이를 경계자유도에 관하여 응축(condensation)하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &K_B r_B = F_B \\ &K_B = K_{BB} + K_{BI} Q \ ; \ Q = -K_{II}^{-1} K_{IB} \\ &F_B = R_B + Q^T R_I \end{aligned} \tag{4.6}$$

여기서 K_B는 전체구조계에 대한 경계강성도매트릭스이고 F_B는 유효경계하중벡터이다. 같은 방법로 각 부구조에 대하여도

$$\underset{(n+m)\times(n+m)}{\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix}_{(s)}} \underset{(n+m)\times 1}{\begin{Bmatrix} r_b \\ r_i \end{Bmatrix}_{(s)}} = \underset{(n+m)\times 1}{\begin{Bmatrix} R_b \\ R_i \end{Bmatrix}_{(s)}}$$

$$\begin{aligned} &K_b r_b = F_b \text{ on substructures } 1,\cdots,S \\ &K_b = K_{bb} + K_{bi} V \ ; \ V = -K_{ii}^{-1} K_{ib} \\ &F_b = R_b + V^T R_i \end{aligned} \tag{4.7}$$

이 성립하고 전체구조와 부구조의 양들은

$$K_B = \sum_{s=1}^{S} \beta^T K_b \beta, \ F_B = R_B + \sum_{s=1}^{S} \beta^T V^T R_i \tag{4.8}$$

와 같은 관계를 갖는다. 여기서 β는 $(n\times N)$차원을 갖는 Boolean 변환매트릭스이다. 식(4.6)로부터 구조계의 모든 경계변위 r_B가 구해지면 각 부구조의 r_b가 추출되고, 다시 내부변위 r_i가 식(4.7)로부터

$$r_i = K_{ii}^{-1}[R_i - K_{ib} r_b] \tag{4.9}$$

에 의해 계산된다.

대부분의 최적화방법은 제약조건 등의 설계변수에 대한 도함수를 필요로 하는데 이것은 식(4.8)을 설계변수 X_j에 관하여 미분을 하므로써

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial r_b/\partial X_j \\ \partial r_i/\partial X_j \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [\partial K_{bb}/\partial X_i] r_b + [\partial K_{bi}/\partial X_j] r_i \\ [\partial K_{ib}/\partial X_j] r_b + [\partial K_{ii}/\partial X_j] r_i \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \tag{4.10}$$

의 관계를 얻을 수 있고 이 식은 식(4.7)과 유사한 과정으로 풀어진다. 그 결과는 아래와 같다.

$$K_b \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial r_b}{\partial X_j} \end{Bmatrix} = \{C_b\} \ ; \ C_b = C_1 - K_{bi} K_{ii}^{-1} C_2 \tag{4.11}$$

다음에 각 부구조를 결합하면 모든 경계절점에서 민감도가 계산되는데 위에서 $\partial r_i/\partial X_j$는 식(4.10)에서 r_i를 계산하는 것과 유사하게 이루어진다. 한번의 해석과정에서 단 한번의 분할만이 필요하고 분할된 부행렬을 사용하여 $\{\partial r_b/\partial X_j\}$와 $\{\partial r_i/\partial X_j\}$를 계산한다.

Haug, Arora, Govil 등이 함수해석과 최적제어 이론에 뿌리를 둔 상태공간방법에 근거하여 반복해석과정에 부구조화 해석방법을 이용, 분할된 부구조를 해석하므로써 트러스와 프레임 및 날개구조를 효과적으로 최적화하고 그 효율성을 주장한 바 있다.[17-19]. 최근에는 Adeli 등이 다수의 CPU를 갖는 병렬컴퓨터에서 해석뿐만 아니라 각 부구

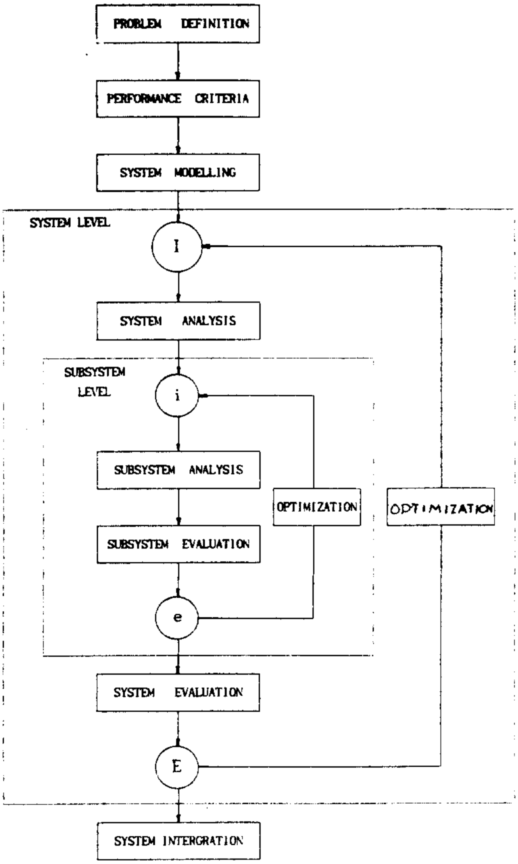


Fig. 3. Hierarchical approach of structural synthesis

조의 최적화까지 할당하여 실행하였다.[45] 여기서 각 부구조의 최적화는 3장의 최적규준법을 이용하였으나 수리계획법이나 혼성방법의 이용도 충분한 효율성을 갖을 수 있을 것이다.

V. 결 론

지금까지 대형구조시스템의 최적화에 관하여 계층적 접근방법을 중심으로 기본 개념 및 문제형성과 실제 수행에 필요한 관련기법을 논하였다. 구체적으로 구조최적화의 가장 기본적인 두 방법 즉, 수리계획법과 최적규준법을 대형시스템의 측면에서 근사화개념과 연결하고 최적화과정에서 필수적이거나 효율성을 재고시키는 설계민감도해석과 재해석을 논하였다. 구조최적화는 전산실행시 해석과 총합의 반복결합으로 이루어지고 나아가 대형시스템은 문자 그대로 대단히 많은 설계변수와 제약조건을 포함하고, 반복실행과정에서 무수한 거동해석과 민감도해석을 요할 뿐만 아니라 이러한 해석에 드는 비용이 전체 최적화과정의 상당한 부분을 차지한다. 따라서 근사해석 모델을 개발하고 중간과정에서 효율적인 재해석 알고리즘을 개발하는 것이 어느 무엇보다도 중요한 과정이다.

그런점에서 대형구조를 해석하는 부구조화방법과 다단계최적화에 필요한 분할을 연결시켜 동일한 수학적 토대 속에서 단계적으로 시스템통합을 이루는 것이 효율적이다. 아울러 구조시스템은 수평적 수직적으로 결합된 계층구조가 있다는 점에서 직렬구조 관점의 순차최적화와 병렬구조 관점의 동시최적화를 적절하게 결합한 계층적 다단계 최적화방법이 바람직하다. 상기한 바 최근 급격히 발전하고 있는 전산환경에 맞춰 구조해석 과정에서 분산 또는 병렬처리기법을 도입한 유한요소해석 프로그램이 개발되고 있으며[43,44] 더 나아가 다단계최적화에서 각 부문제의 해석과 총합을 각기 다수의 clients 또는 CPU에 분산 병렬처리하는 연구가 활발히 이루어질 것이다. 또한 구조시스템이나 각 부시스템사이의 연계에 대한 연구가 더욱 필요하며 이들을 보다 체계적이고 효율적으로 처리하기 위한 근사화방법이나 알고리즘개발이 활발해질 것이다.

이런 연구들은 결국 두 가지의 목표로 지향케 될 것인바, 그 첫째는 설계자동화이고 둘째는 현장 활용성이다. 구조최적화연구는 설계자동화에 핵심적 기반이론 및 알고리즘을 제공하게 될 것이며 이를 위해서 CAD/CAE와 DATABASE 및 EXPERT SYSTEMS 등과의 유기적 결합이 더욱 연구되어야 할 것이다.

또한 다른 분야와 마찬가지로 구조최적화분야가 이론적대상으로부터 보다 실제 문제에 활용키 위한 광범위한 연구가 필요하며 이를 위해서 각기 다른 전공을 갖는 연구팀과 산업일선 현장팀들이 모인 협동연구가 이루어져야 할 것이며 이를 위한 다전공 다단계최적화분야의 통합된 연구가 요청된다고 하겠다.

REFERENCE

1. Wasiutynski, Z. and Brandt, A., "The Present State of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures", Applied Mechanics Reviews, Vol.16, No.5, 1963, pp.341~350.
2. Sheu, C. Y. and Prager, W., "Recent Developments in Optimal Structural Design", Applied Mechanics Reviews, Vol.21, No.10, 1968, pp. 985~992.
3. Berke, L. and Venkayya, V. B., "Review of Optimality Criteria Approaches to Structural Optimization", Proc. ASME. Structural Optimization Symposium, ASME, AMDT, 1974.
4. Rozvany, G. I. N. and Mroz, Z., "Analytical Methods in Structural Optimization", Applied Mechanics Reviews, Vol.30, No.11, 1977, pp. 1461~1470.
5. Venkayya, V. B., Khot, N. S. and Berke, L., "Application of Optimality Criteria Approach to Automated Design of Large Practical Structures", 2nd Symposium on Structural Optimization AGRAD cp-123, Milon, Itary, 1973, pp.3.1~3.19.
6. Schmit, L. A., "Structural Design by Systematic Synthesis", Proc. 2nd Conference on Electronic Computation, pp.105~122, 1960.
7. Schmit, L. A., "Structural Synthesis-Its Genesis and Development", AIAA, Vol.19, No.10, 1981, pp.1249~1263.
8. Picket, R. M., Rubinstein, M. F. and Nelson, R. B., "Automated Structural Synthesis Using a Reduced Number of Design Coordinates", AIAA, Vol.11, No.4, 1973, pp. 489~499.
9. Schmit, L. A. and Farshi, B., "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis", AIAA, Vol.12, No.5, 1974, pp.692~699.
10. Schmit, L. A. and Miura, H., "An Advanced Structural Analysis/Synthesis Capability-Access 2", Int. J. of Numerical Methods in Engineering, Vol.12, 1978, pp.353~377.
11. Fleury, C. and Sander, G., "Relations Between Optimality Criteria and Mathematical Programming in Structural Optimization", Proc. Symposium on Application of Computer Method in Engineering. UCLA. 1977, pp. 507~520.
12. Fleury, C., "A Unified Approach to Structural Weight Minimization : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering", Vol.20, 1979, pp.17~38.
13. Schmit, L. A. and Fleury, C., "Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Method", AIAA, Vol.18, No. 12, 1980, pp.1252~1260.
14. Schmit, L. A. Jr., and Chang, K. J., "A Multilevel Method for Structural Synthesis", AIAA Paper 84-05853-CP, Processing of AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th Structures, Structures Dynamics and Material Conference, Palm Springs, California, May 14-16, 1984.
15. Przemieniecki, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw Hill, 1968.
16. Noor, A. K. and Lowder, H. E., "Approximate Reanalysis Techniques with Substructuring", ASCE Journal of the Engineering Mechanics, Vol.101, No.St8, August 1975.
17. Arora, J. S. and Govil, A. K., "An Efficient Method For Optimal Structural Design by Sub structuring", Computer & Structures, Vol.7, July, 1976, pp.507~515.
18. Govil, A. K., Arora, J. S. and Haug, E. J., "Optimal Design of Wing Structures with Substructuring", Computer & Structures, Vol.10, pp.899~910, January, 1979.
19. Govil, A. K., Arora, J. S. and Haug, E. J., "Optimal Design of Frames Wing Structures with Substructuring", Computer & Structures, Vol.12, pp.1-10, September, 1979.
20. Dantzig, G. B. and Wolfe, P., "Decomposition Principle for Linear Programs", Operation Research 8, 1960, pp.101~111.
21. Mesarovic, M. D., Macko, D. and Takahara, Y., "Theory of Hierarchical Multi-level System", New York 1970, Academic Press.
22. Lasdon, L. S., "Optimization Theory for Large Scale Systems", The MacMillan Company, London, 1970.
23. Wismer, D. A., "Optimization Methods for Large-Scale Systems with Applications", McGraw-Hill, 1971.
24. Kirsch, U., Reiss, M. and Shamir, U., "Optimum Design by Partitioning into Substructur-

es", ASCE Journal of The Structural Design, Vol.98, No.ST1, January, 1972.
25. Kirsch, U., "Multilevel Approach to Optimum Structural Design", ASCE, Vol.101, No.ST4, 1975, pp.957～975.
26. Kirsch, U. and Moses, F., "Decomposition in Optimum Structural Design", ASCE, Journal of the Structural Division, Vol.105, No.ST1, January, 1979.
27. Kirsch, U., "An Improved Multilevel Structural Synthesis Method", ASCE Journal of the Structural Mechanices, Vol.13, No.2, 1985, pp.123～144.
28. Kirsch, U., "Structural Optimization-Fundamentals and Applications", Springer-Verlag, 1993, Berlin Heidelberg.
29. Sobieszczanski-Sobieski, J., Barthelemy, J-F. M. and Riley, K. M., "Sensitivity of Optimum Solutions to Problem Parameters", AIAA, Vol.20, September, 1982, pp.1291～1299.
30. Sobieszczanski-Sobieski, J., "A Linear Decomposition Method for Large Optimization Problems-Blueprint for Development", NASA TM-83248, February, 1982.
31. Sobieszczanski-Sobieski, J., James, B. and Davi, A., "Structural Optimization by Multilevel Decomposition", AIAA Vol.23, November, 1985, pp.1775～1782.
32. Bellman, "Dynamic Programming", Princeton University Press, 1957.
33. Aguilar, R. J., "Systems Analysis and Design", Prentice-Hall, 1973.
34. Sobieszczanski-Sobieski, J., "Optimization by Decomposition : A Step from Hierarchic to Non-Hierarchic Systems", Second NASA/Air Force Symposium on Recent Advances to Multidisciplinary Analysis and Optimization, September, 28-30, 1988, Hampton Verginia.
35. Sobieski, J., "Optimization by Decomposition in Structural and Multidisciplinary Applications", Proceedings of the NATO/DFG ASI on Optimization of Large Structural Systems, Berchtesgaden, Germany, 1991.
36. Sobieski, J. S., and Haftka, R. T., "Interdisciplinary and Multilevel Optimum Design", Processing of the NATO Advanced Study Institute in Computer-Aided Optimal Deisgn, Portugal, 1986, pp.29-60.
37. Barthlemy, J-F. M. and Riley, M. F., "An Improved Multilevel Decomposition Approach for the Design of Complex Engineering Systems", AIAA, Vol.26, No.3, 1988, pp. 353-360.
38. Haftka, R. T., "An Improved Computational Approach for Multilevel Optimum Design", Journal of the Structural Mechanices, Vol.12, No.2, 1984, pp.245-261.
39. Haftka, R. T., "Gurdal, Z. and Kamat, M. P., "Elements of Structural Optimization", Kluwer Academic Publishers, 1990.
40. Vanderplaats, G. N. and Salajeghen, E., "A New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis", AIAA, Vol.27, No.3, pp.352-358.
41. Vanderplaats, G. N., Yang, Y. J. and Kim, D. S., "Sequential Linearization Method for Multilevel Optimization", AIAA Vol.28, No.2, 1989.
42. Azarm, S. and Li, W. C., "Multilevel Design Optimization using Global Monotonicity Analysis", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol.111, pp. 259-263, June 1989.
43. El-Sayed, M. E. M. and Hsiung, C. K., "Optimum Structural Design with Parallel Finite Element Analysis", Computer & Structures, Vol.40, No.6, 1991, pp.1469-1474.
44. Luo, J－C. and Friedman, M. B., "A Parallel Computational Model for The Finite Element Method on A Memory-Sharing Multiprocessor Computer", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.84, 1990, pp.190-209.
45. Adeli, H. and Kamal, O., "Parallel Processing in Structural Engineering", Elsevier, 1993.