構造最適設計法과 在來式設計法의 問題點

李 [illegible] [illegible]*

1. 序　論

筆者가 最適設計에 關心을 갖게 된 動機는 '最適'이라는 말에 대해 興味를 느꼈고 最適設計에 대한 文獻(1)을 읽고 대하히 感銘을 받았기 때문이다.

現在 우리가 應用하고 研究하고 있는 最適設計法이 構造設計分野로 注目을 받게 된 것은 1960년에 發表된 Schmit[1]의 論文때문이었다. 이 論文에서는 3部材 트러스 設計問題를 例로 選定하였는데 이 研究는 從來의 全應力(Fully stress design)設計와는 다르고 全應力 設計보다 重量이 적은 設計가 存在하고 이 設計값은 數學的 計劃法에 의한 最適設計法을 利用하여 效果的으로 얻을 수 있음을 指摘하였다. 이 論文은 衝擊的이고 最適設計의 有用性에 대해 強한 印象을 주었지만, 逆으로 最適設計法에 대해 過多한 期待 및 評價를 준 結果로 되었다.

最適設計法에 의한 設計는 從來의 設計法에 의한 設計보다도 重量이 가볍거나 費用이 적을 것으로 생각되었기때문에 重量이 가볍거나 費用이 적지 않으면 最適設計로는 意味가 없는 것으로 理解된 時期도 있었다. 그러나 構造設計分野 뿐만 아니라 一般 工業設計는 대단히 많은 意思決定(Decision making)이 直列, 竝列의 關係로 構成되어 있다. 그 중 어떤 意思決定은 人間의 經驗, 直感 또는 想像力에 의한 것이 有效할 수도 있을 것이다. 그러나 決定해야 할 變數의 數가 많을 경우 또는 各 意思決定間의 關係가 複雜할 때에는 電子計算器의 利用이 有力하여 最適設計는 意思決定의 有效한 手段으로써 位置를 굳히게 되었다.

意思決定의 어느 部分은 電子計算器가 分擔하므로써 良質의 最適設計가 可能하게 되고 또는 技術者는 그가 가지고 있는 能力중 가장 잘 利用해야 할 創意力이 要求되는 意思決定問題에 보다 많은 時間을 할애할 수 있다. 이와 같이 人間의 能力과 計算器의 能力을 總合하여 最上의 意思決定을 하기 위한 시스템을 構築할 수 있다. 이러한 背景 때문에 最適設計를 構造總合(Structural synthesis)이라 한다.

2. 構造設計法의 歷史[2),3)]

여기서는 1960년에 發表된 Schmit[1]의 論文 以來, 現在까지의 構造最適設計法의 歷史를 간단히 照明해 보고자 한다. 여기에서 記述하는 內容은 주로 文獻(2)를 參照하였다.

2) 1960年代

1960年 以前에도 最適設計法의 歷史는 當然히 存在한다. 어떤 意味로 構造物의 設計, 建設의 歷史 그 自體가 바로 構造最適設計法의 歷史라고 할 수 있을 것이다. 그러나 筆者가 이 部分에 대해 記述하는 것은 適合하지 않고 또 現在 우리가 研究

* 전북대학교 공과대학 토목공학과 교수

해서 適用하고 있는 構造總合, 構造最適設計法의 基本的인 方法, 最適化技法의 原流는 역시 1960년 Schmit의 論文이라고 생각되기 때문에 1960년 以前의 歷史의 記述은 여기에서 留保하기로 한다.

Schmit는 上記의 論文에서 3部材 트러스의 設計問題를 例로 들어 在來式 設計法으로는 最適의 設計가 반드시 얻어질 수 없다는 것을 보였고 또한 이 論文은 다음의 2가지 面에서 큰 意義가 있었다.

(1) 破壞모드(Modc)를 假定하고, 假定한 破壞모드가 同時에 發生하도록 部材를 設計하는 從來의 方法으로는 最適解를 반드시 얻을 수 없다는 것을 보였다.

(2) 電子計算器로 非線形計劃法을 利用하여 3部材 트러스의 最適解가 얻어지는 方法을 論하였다.

이 論文은 대단히 啓蒙的인 面도 있었지만 NASA 등에서 硏究費를 支援받는데에는 說得力이 不足하여 文獻(3)에서는 補強板의 最適設計를 다루었다. 이 당시에는 多載荷條件下에서 應力, 變形, 安定性, 振動 등의 條件을 滿足하는 最適構造 設計를 非線形計劃法을 適用하여 遂行하였다. 그리고 이때에 硏究의 大部分은 당시의 構造解析法으로 確立된 有限要素法과 非線形計劃法의 結合이었는데 이 硏究가 활발히 進行되었다는 것은 當然하였다.

그러나 1960年代의 後半까지도 最適設計法은 좀처럼 實際 設計에 利用할 수 있는 段階까지 오지 못했다. 그 理由는 實際 設計보다 最適設計는 解析이 대단히 複雜하고 最適設計問題의 形成이 어려우며 最適化에 必要한 構造解析의 回數가 많고 단지 몇 個의 設計 變數만으로 構成된 最適化問題만을 處理할 수 있었기 때문으로 생각된다.

2) 1970年代

1960年代의 後半에는 數學的 計劃法(Mathematical programming)에 의한 最適設計法의 計算面에서 效率性이 대단히 낮다는 것을 認識했기 때문에 이를 解決할 수 있는 解決法이 硏究되었다. 이 解決法은 最適性規準法(Optimality criteria method)과 近似槪念(Approximation concepts)이다.

最適性規準은 必要한 構造物의 最適性을 間接的으로 保證하는 어떤 規準(例로는 全應力設計, 비틀림에너지最小 등)을 假定하고, 그 規準을 滿足하도록 構造物을 設計하는 方法이다. 靜定構造物에서 應力制約條件만 있을 때의 全應力設計는 最小重量設計로 되는 등 最適設計에 近接한 解를 얻을 수 있는 것으로 알려졌다. 이 方法의 特徵으로는 프로그램이 쉽고 計算의 效率이 最適化問題의 크기에 좌우되지 않으며 또한 대단히 적은 回數로도 構造解析 最適設計에 近接한 解가 얻어진다는 것이었다. 반면 論理性, 一般性에 대해서는 數學的 計算法에 의한 最適設計法이 優秀한 것으로 알려지고 있다.

한편 數學的 計劃法에 의한 最適設計法의 計算效率을 改善하기 위해서 Schmit[4]는 近似槪念에 대한 應用方法을 硏究되었는데 그 內容은 다음과 같다.

最適設計의 過程에서는 數回의 構造解析이 必要하다. 그러나 이때의 構造解析은 嚴密한 構造解析(原問題의 解析)이 必要하지 않고 構造解析에 대해 精密度가 높은 近似모델이 있으면 그 모델의 解析만으로도 充分하다는 것이다. 그림 1에는 近似技法의 基本的인 方法을 나타내고 있지만 이 近似槪念의 應用으로 構造解析의 回數를 상당히 減少시킬 수 있다는 事實이 밝혀졌다.

近似槪念을 應用한 最適設計 問題는 最適化問題의 近似化程度에 따라 效率이 좌우된다. 設計變數가 部材 斷面積 등 일때에는 設計變數를 逆變數變換하면 精密度가 대단히 높은 近似化가 可能하다고 알려져 있다. 近似化의 槪念도 設計變數가 幾何的形狀에 대한 變數일 때에는 設計變數의 逆變數變換方法이 使用될 수가 없으며 이의 應用範圍는 最適性의 規準法의 경우와 마찬가지의 限界가 있다.

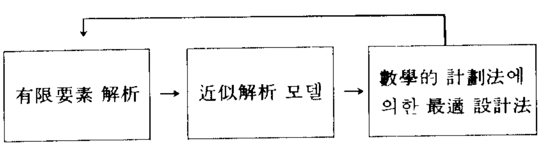

그림 1. 近似槪念의 應用

1970年代 前半에는 Fleury[6),7),8)]하여 雙對法(Dual method)이 研究되었고, 最適性規準法은 數學的計劃法에 의한 最適設計法의 別途의 方法이며, 또한 雙對法의 解를 구하기 위한 近似法이라는 事實이 證明되었다. 그 結果 同一 最適化問題에 最適性規準法을 使用하여 解를 구하는 것보다 雙對法으로 엄밀히 解를 구하는 편이 안정된 解가 얻어진다는 事實이 알려졌다. 이러한 事實때문에 大部分의 汎用프로그램은 數學的 計劃法에 의한 最適設計法을 基本으로 하게 되었다.

3) 1980年代 및 1990年代 初

1970年代의 後半부터 自動車產業 등에서 最適設計法이 應用되었다(例로는 文獻(9)). 여기에서의 基本的인 戰略은 構造解析法으로 完全히 確立된 有限要素法의 汎用프로그램과 數學的 計劃法에 의한 最適設計法의 汎用프로그램을 結合하여 상당히 一般性이 높은 最適構造設計를 위한 프로그램의 開發 및 應用이었다.

數學的 計劃法에 의한 最適設計法은 感度解析이 必要하다. 感度解析은 差分法으로도 구할 수 있지만, 이 方法은, 例를 들면, 100變數의 設計問題가 있다면 101回의 構造解析이 必要하다. 그래서 大規模 構造物에 이 方法의 應用은 實用的이라고 할 수 없으므로 NASTRAN 등의 汎用 有限要素法 프로그램에 感度解析을 解析的으로 구하는 機能이 包含되였다는 것은 當然하다.

計劃法 理論의 發展은 數學者의 德分이고, 工學者의 寄與는 거의 없다고 해도 過言은 아닐 것이다. 그러나 數學的 計劃法의 應用, 특히 汎用最適化 프로그램의 開發은 大部分 工學者에 의한 것이다. 數學的 計劃法의 汎用最適化 프로그램으로 解를 구하는 것은 解의 正確性보다는 解의 信賴性, 安定性때문이다. 그러므로 數學者와 工學者간에는 研究目的이 差異가 있다고 생각된다. 汎用最適化 프로그램으로는 Vanderplaats와 그 一行이 作成한 CONMNN, ADS[10)]외에 ACCESS−3[11)] 등이 있다. ADS은 美國에서 開發된 프로그램이지만 國內의 여러 大學에서도 使用하고 있다.

1980년대는 後半에는 각 大學마다 MSC/NASTRAN과 ADS의 內的인 結合에 의한 計劃이 確立되어 있으며, 1990年代 初에는 Vanderplaats와 그 一行이 ADS를 修正한 DOT[12)] 또는 DOC[13)]과 각종 構造解析 汎用 프로그램과의 結合에 대해 計劃을 세우고 있어 數學的 計劃法에 의한 最適設計法은 實務段階의 意思決定 手段으로도 그 重要性이 더욱 增大되고 있다고 생각된다.

3. 構造最適設計의 基礎的 事項

여기에서는 構造最適化에 關聯하는 數學的 基礎事項에 대해 文獻(14), (15), (16)를 參照하여 記述한다. 좁은 意味로 最適設計란 주어진 荷重條件 또는 環境下에서 構造物의 擧動, 例를 들면, 應力 및 變形 등이 設計條件(安定性)을 滿足하면서도 가장 合理的인 設計(經濟性)를 구하는 것이다. 여기에서는 最適設計問題를 數學的으로 表現하기 위해 필요한 概念과 用語를 說明한다.

1) 設計變數(Design variables)

構造 시스템은 性質이 다른 特性值의 集合이지만 構造 시스템을 構成하고 있는 이 特性值 중의 어떤 것은 最適化過程에 있어서 變數 또는 定數로 取扱한다. 構造 시스템을 構成하는 이 特性值 중에 最適設計 段階에서 定數로 取扱되는 것을 定數媒介變數(Preassigned parameters)라 하고, 最適設計 段階에서 決定해야 할 特性值를 設計變數라 한다.

따라서 構造 시스템은 定數媒介變數와 設計變數로 構成되어 있다. 設計者는 定數媒介變數를 大部分 自由로 選擇할 수 있으나 경우에 따라서는 任意로 選擇할 수 없는 경우도 있다. 그리고 設計者가 지금까지 겪어 온 經驗 등에 依據하여 定數媒介變數를 定하면 좋은 結果를 가져 올 수도 있다. 그러므로 最適化 過程에 있어서 어느 變數를 定數로 選擇하느냐에 따라서 最適設計問題는 매우 簡便해질 수도 있음을 알 수 있을 것이다. 構造最適設計 問題에서의 設計變數는 다음과 같은 것들이 될 수 있다.

(1) 材料의 特性 즉, 材料의 選擇에 關한 設計變數(材料의 力學的 또는 物理的 性質)

(2) 部材配置에 關한 設計變數(部材配置 즉, 構

造物의 結合狀態 혹은 部材數)

(3) 構造物의 形狀 혹은 幾何學的 配置에 關한 設計變數

(4) 構造要素의 크기에 關한 設計變數

위에서 言及된 設計變數는 數學的 견지에서 連續變數와 離散(離散)變數로 區分된다. 例를 들어 構造物의 部材數를 구하는 最適設計問題에서 設計變數는 基本的으로 離散變數나 定數變數로 使用해야 한다. 그러나 離散變數의 값이 一定한 間隔으로 均等하게 分布하고 있을 경우에는 이 設計變數를 連續變數로 假定하여 決定한 값중에서 가장 近接한 離散值를 選擇하므로써 滿足할 만한 解를 얻을 수 있는 경우도 많다. 이와 같이 離散型 設計變數를 取扱할 때에 이 設計變數를 疑似離散變數라고도 한다.

2) 制約條件(Constraint)

最適設計 問題에서 最適解가 設計上에 考慮되는 모든 條件을 滿足하면 이 設計를 許容設計(Feasible design)라 하고 最適設計에서는 設計時에 滿足해야 하는 制限을 制約條件式이라고 한다. 이 制約條件式은 物理的인 견지에서 다음 두 種類로 나눌 수 있다.

(1) 構造物의 擧動에 대한 制限 이외에 設計變數의 許容範圍를 制限하는 制約條件式을 設計制約條件式(Design Constraints), 側面制約條件式(Side Constraints) 또는 設計變數의 上下限值制約條件式이라고 한다. 이들의 制約條件式은 構造物의 機能, 製作加工 혹은 美觀 등을 考慮하기 위해서 附加된다. 그러므로 보통 設計條約條件은 設計變數의 上下限值 또는 각 設計變數間의 相對的인 크기를 規定하는 關係 등을 나타낸다. 지붕構造의 最小勾配, 板의 最小두께, 쉘構造 높이의 最大值에 대한 制限 등이 이와 같은 制約條件式의 일예이다.

(2) 構造物의 擧動에 관한 制約條件式을 擧動制約條件式(Behavior constraint)이라 한다. 이 擧動條件式의 일예로는 最大應力, 最大變位, 座掘強度에 關한 制約 등이 있다. 制約條件式은 設計變數의 函數로 表示되지만 制約條件式이 設計變數로 直接 表現될 수 있으면 이 制約條件式을 Explicit 制約條件式이라 하고 그렇지 않은 경우에는 Implicit 制約條件式이라고 한다.

數學的인 견지에서 設計 및 擧動制約條件은 不等式으로 아래와 같이 나타낸다.

$$g_j(\vec{x}) \leq 0 \qquad j=1, \cdots\cdots, m \qquad (1)$$

여기서 m은 不等號 制約條件의 數, $\vec{x}$는 設計變數의 벡타이고, 設計變數 및 擧動變數를 包含한다. 構造物의 設計問題에서는 종종 等號 制約條件도 考慮된다.

$$h_j(\vec{x}) = 0 \qquad j=1, \cdots\cdots, k \qquad (2)$$

여기서 k는 等號制約條件式의 數이다.

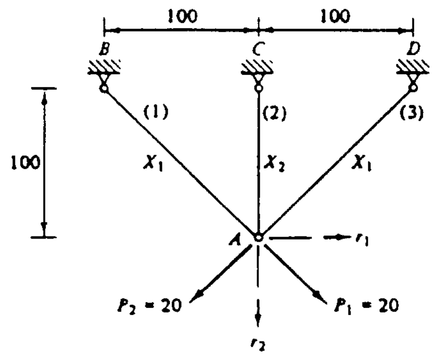

그림 2. 3部材 트러스의 例

3) 設計空間(Design space)

制約條件式을 設計變數로 表示한 空間을 設計空間이라고 한다. 따라서 2개의 設計變數가 形成하는 設計空間은 平面이 되고 設計變數가 n個인 경우에는 n次元의 超空間(Hyperspace)을 形成한다. 모든 制約條件式 $g_j(\vec{x}) \leq 0$을 滿足하는 設計空間을 實行可能設計空間(Feasible space design)이라 하고 이 實行可能 空間內에서의 設計를 許容設計(Feasible design)이라고 한다.

$g_j(\vec{x}) \leq 0$를 滿足하는 設計變數值의 集合은 設計空間에 있어서 1個의 面을 形成한다. 이 面은 設計空間을 2個의 領域, 즉 $g_j(\vec{x}) > 0$의 領域과 $g_j(\vec{x}) <$

0의 領域으로 分割한다. 4.2절에서 誘導한 그림 2의 3部材 트러스의 最適設計問題에 대한 設計空間과 制約條件式을 그림 3에 表示하였다. 모든 許容設計點의 集合은 許容領域을 形成하고, 許容領域의 境界를 이루는 個個의 制約條件式은 複合制約面을 形成한다. 또 許容領域內[즉, $g_j(\vec{x}) \leq 0$, $j=1, 2 \cdots\cdots, m$로 된 領域]의 點을 自由點 또는 非制約設計點이라 하고, 制約面上의 점[즉, 적어도 1개의 制約條件이 $g_j(\vec{x})=0$이 되는 面]을 境界點 또는 制約設計點이라 한다. 許容領域은 2個 혹은 그 以上으로 分離된 部分領域으로 形成되는 경우도 있지만, 構造物의 部材 除去가 許諾되지 않는 許諾問題에 있어서는 이같은 現象이 여간해서 일어나지 않는다. 2개 혹은 그 以上의 制約條件이 $g_j(\vec{x})=0$이 되는 部分空間을 共通部分이라 하는데 2-次元 空間에서는 2개의 制約條件은 1點에서 交叉한다. 設計點에서 $g_j(\vec{x})=0$인 制約條件式을 臨界制約條件式(Active Constraint)이라 하고, $g_j(\vec{x})<0$로 되는 制約條件을 非臨界 制約條件式(Passive constraint)이라 한다. 또 $g_j(\vec{x})>0$이면 이 設計는 制約條件式은 滿足되지 못하므로 이는 不可能한 設計이다.

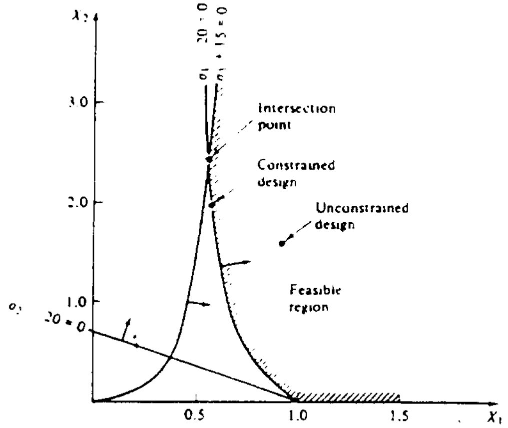

그림 3. 3部材 트러스의 設計 空間

等號制約條件式 $h_j(\vec{x})=0$, $j=1, 2\cdots\cdots, k$는 各 設計變數間의 關係를 附與하고 더구나 n-次元 設計空間의 境界面이다. 許容設計點은 이들 境界面의 共通部分에 存在해야 한다. 等號制約條件의 수 k는 $k \leq T$를 滿足해야 한다. 여기서 T는 設計變數의 總數이다. $k=T$의 경우에는 聯立方程式 $h_j(\vec{x})=0$, $j=1, 2\cdots\cdots, T$를 解析함으로써 設計變數의 값이 原則的으로 決定되므로 이와 같은 경우에는 소위 最適設計問題가 成立되지 않는다.

4) 目的函數(Objective function)

보통 許容設計點은 實行可能 設計空間에서 無限히 存在하지만 그 중에서 最善의 設計點을 決定하기 위해서는 여러 許容設計點들을 比較하기 위한 1개의 函數를 作成해야 한다. 이와 같은 必要性때문에 導入된 函數를 目的函數(費用函數, 規準函數 혹은 價値函數)라고 한다. 따라서 最適設計의 目的은 모든 設計制約 條件式을 滿足하면서 이 目的函數의 最小値가 되는 設計變數의 값을 구하는 것이다. 目的函數는 設計變數 $\vec{x}$의 函數이고, 構造物의 重量이나 制約費, 혹은 보다 좋은 設計를 하기 위한 判斷 規準 등을 나타낸 것이다. 여기에서 目的函數 $Z=F(\vec{x})$는 보통 最小化하는 것으로 假定한다. $-F(\vec{x})$가 最小가 되는 點과 $F(\vec{x})$가 最大値가 되는 點은 一致하므로 다음 式이 設立한다.

$$\max F(\vec{x}) = -\min(-F(\vec{x})) \qquad (3)$$

目的函數의 選擇은 最適設計問題를 定義할 경우에는 가장 重要한 意思決定의 하나이고 設計 問題에 따라서는 目的函數를 明確히 設定할 수 있다. 例를 들어 構造物이 制約費가 그 重量에 比例한다고 하면 目的函數로는 構造物의 重量을 使用할 수 있다.

그러나 構造物의 美的價値가 重要한 目的일 때에는 이 美的價値가 設計變數에 따라 影響을 받는 目的函數의 數式的 表現이 매우 困難한 경우도 있다. 一般的으로 目的函數는 設計의 가장 중요한 性質을 나타내지만 때로는 設計의 여러가지 屬性을 目的函數로 考慮하기도 한다. 어떻든 設計問題의 참 目標를 가장 正確히 反影하는 目的函數를 써서 最適化해야 한다. 대개의 最適化 方法은 單一 目的函數로 重量의 最小化에 한하지만, 多目的函數에 대해서도 適用이 可能하다. 構造物의 重量이 數量化가 可能하여 이들이 一般的인 目的函數

로 가장 많이 쓰여지고 있는 實情이다. 構造物의 重量은 設計上 重要한 要素이지만 最小重量構造物이 가장 經濟的이라고는 할 수 없다. 費用은 重量보다도 廣範圍하고 또한 實際的으로 重要性을 나타내지만 現實에 맞는 費用函數를 作成하는데에 충분한 資料를 얻기가 困難한 경우가 많다. 一般的으로 費用函數로는 材料費, 製作費, 運搬費 등을 考慮하나 設計 및 建設工事에 必要한 費用 즉 管理費, 維持費, 修理費, 保險費用 등도 費用函數로 考慮할 수도 있다. 그러나 可能恨한 모든 要素를 考慮한 一般的 費用函數를 使用해야 한다는 것은 꼭 必要한 希望 事項은 아니다.

왜나하면 어떤 費用函數는 設計變數의 變化에 대하여 敏感하고 어떤 費用函數는 最適化 過程에 있어서 實質的인 設計를 改良할 수 없는 "평평한(Flat)"函數가 되기도 하기 때문이다. 따라서 實際的으로는 設計變數의 變化에 대하여 敏感하고 가장 重要한 費用項目을 表示하는 目的函數를 導入하는 것이 바람직하다.

別途의 設計方法으로는 構造物의 初期 建設費와 破壞確率에 依存하는 破壞損失費用의 兩者를 考慮한 設計法이다. 이 設計法에서는 破壞損失은 構造物의 特定 破壞모드에 關聯하여 發生하는 損害와 그 生起確率과의 곱으로 計算可能하다고 假定하고 있다. 그러나 適切한 破壞損失算定, 許容破壞確率 決定, 實際 構造物의 破壞確率 推定은 대단히 어려운 問題가 包含되어 있다. 그리고 一般的으로 目的函數는 設計變數의 非線形函數이다.

4. 最適設計問題의 數學的 表現(Mathematical formulation)

1) 定義

構造 最適設計 問題는 目的函數 및 制約條件式이 設計變數 $\vec{x}=(x_1, \cdots\cdots, x_n)$의 函數일 때에 다음과 같이 表示된다.

目的 函數 : $Z=F(\vec{x})\rightarrow \min$ (4a)

制約條件式 : $g_j(\vec{x})\leqq 0$ $(j=1, \cdots\cdots, m)$ (4b)

$h_j(\vec{x})=0,$ $(j=1, \cdots\cdots, k)$ (4c)

여기서 $F(\vec{x})$는 目的函數이고 min은 目的函數의 最小値를 意味하여 $g_j(\vec{x})$, $h(\vec{x})$는 制約條件式을 나타낸다.

目的函數, 制約條件式 모두가 設計變數 $\vec{x}$에 대해 線形으로 表示되는 最適化 問題를 線形計劃問題(Linear programming problem, LP로 表示)라 하고 目的函數, 制約條件式중 어느 하나라도 設計變數 $\vec{x}$에 대해 非線形으로 表示되는 最適化 問題를 非線形 計劃問題(Non-Linear Programming problem, NLP로 表示)라고 한다.

構造物의 最適設計問題形式은 塑性理論에 依據하여 最適設計問題를 形成하면 線形計劃問題, 彈性理論에 依據하여 最適設計問題를 形成하면 非線形 計劃問題로 된다. LP는 普通 심프랙스(Simplex)法에 의해 容易하게 풀 수 있으며 이 심프랙스法이 現在 大型 電子計算器內에 부프로그램(Subroutine)으로 內裝되어 있으므로 容易하게 利用할 수 있는 長點도 있다.

2) 最適設計 問題形成

最適設計 問題形成은 應力法 및 變位法에 依據하여 體系的으로 遂行할 수 있다. 變位法(剛性度法)에 依據하여 最適化 問題를 形成하는 方法은 다음과 같다.

一般的으로 變位法에 의한 彈性解析의 基本式은 다음과 같다.

$$kr=R \tag{5}$$

단, k : 部材 自體의 剛性 行列

r : 節點 變位 行列

R : 節點 荷重 行列

式 (5)를 節點 變位 r에 대해 풀어 應力을 구하면 다음 式이 얻어진다.

$$r=k^{-1}R \tag{6}$$

단, T를 節點 變位를 應力으로 變換하는 行列이라면 式 (6)으로 부터

$$\sigma=Tr=Tk^{-1}R=SR \tag{7}$$

여기서 σ : 應力 行列, $S=Tk^{-1}$이다.

따라서 一般的인 最適設計 問題形式은 다음과 같다.

目的 函數 : $F(\vec{x}) \rightarrow \min$ (8a)

制約條件式 :

$\vec{\sigma}_a^L \leq \vec{\sigma}(\vec{x}) \leq \vec{\sigma}_a^u$ (8b)

$\vec{r}_a^L \leq \vec{r} \leq \vec{r}_a^u$ (8c)

$\vec{x}^L \leq \vec{x} \leq \vec{x}^u$ (8d)

여기에서 $\vec{x}$는 設計變數, $\vec{\sigma}(\vec{x})$ 및 $\vec{r}(\vec{x})$는 應力 및 節點變位를 表示하고 $\vec{\sigma}^L$, $\vec{\sigma}_a^u$는 許容應力의 上下限値, $\vec{r}_a^L$, $\vec{r}_a^u$는 許容 節點變位의 上下限値를 表示한다.

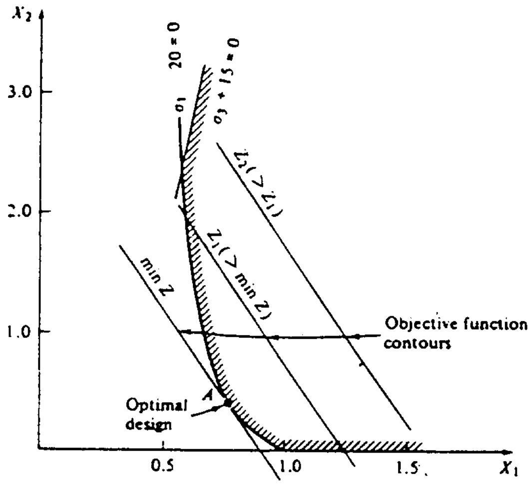

그림 4. 3部材 트러스의 設計函數와 目的函數의 等高線

그림 2에 表示한 3部材 트러스를 例로 들어 設計變數로는 各 部材의 斷面積, 目的函數로는 重量을 택하고 制約條件式으로는 各 部材의 應力制約과 設計變數의 側面制約을 考慮할 때 剛性度法을 利用하여 彈性設計法에 의한 構造 最適設計 問題를 形成하면 $P_1=P_2=20$, $\sigma^u=20$, $\sigma^L=15$, $L=100$일 때의 最適化 問題는 式 (8)로 부터 다음과 같이 된다.

$$g_1 \equiv \sigma_1 - 20 \equiv \frac{20(x_2+\sqrt{2}x_1)}{2x_1x_2+\sqrt{2}x_1^2} - 20 \leq 0$$

$$g_2 \equiv \sigma_2 - 20 \equiv \frac{20\sqrt{2}x_1}{2x_1x_2+\sqrt{2}x_1^2} - 20 \leq 0$$

$$g_3 \equiv -\sigma_3 - 15 \equiv \frac{20\sqrt{2}x_2}{2x_1x_2+\sqrt{2}x_1^2} - 15 \leq 0 \qquad (9b)$$

$$g_4 \equiv -x_1 \leq 0$$

$$g_5 \equiv -x_2 \leq 0$$

이 最適設計問題를 x_1과 x_2의 2次元 設計空間에서 圖示하면 그림 4과 같이 되고 許容領域內에서 目的函數를 最小로 하는 最適解는 다음점 A에서 주어진다.

즉, $x_1=0.788$, $x_2=0.410$, $\min Z=263.9$

設計變數가 2개인 경우에는 이와같이 圖解的으로도 效率的으로 解를 구할 수 있다. 그너라 式 (10)에 表示한 最適化問題 形式은 數學的 計劃法에 의해서 效率的으로 最適解를 얻을 수 있다.

또 그림 4에서 最適點으로는 $\sigma_1 - 20 \leq 0$의 制約條件만이 臨界制約 條件式, 즉 $\sigma_1=20$이 된다. 最適 設計問題에 따라서는 幾何學的 非線形性에 基礎를 두고 있는 非線形擧動을 考慮할 必要가 있을 때에는 變形後의 幾何形狀에 대한 解析式을 세워야 한다. 最適 設計問題形式이 式 (8)가 같은 경우에는 構造物의 擧動을 計算하기 위해서는 非線形 構造解析을 反復 試行하여야 한다. 그러나 다음에 記述하는 總合的인 最適化 問題形成의 方法을 使用할 경우에는 非線形 解析을 反復할 必要가 없다.

3) 總合的인 最適化 問題形成(The integrated probelm formulation)

지금까지 記述한 最適 設計問題의 形成 過程과는 달리 總合的인 最適化 形成의 方法이 提案[17]되어 있다. 많은 最適設計問題는 構造解析式의 解와 設計變數의 最適値를 동시에 決定할 수 있도록 最適化 問題를 形成할 수 있는데 이와같은 最適設計問題를 總合的인 最適設計 問題形式이라 한다. 이러한 最適設計 問題에서의 變數벡타 $\vec{x}$는 設計變

數 및 擧動變數를 包含하며, 解析式도 最適設計問題에 包含된다. 綜合的인 最適化 問題를 數學的計劃問題로 表現하면 다음과 같다.

$$Z=F(\vec{x})\rightarrow \min \tag{10a}$$

$$g_j(\vec{x})\leq 0,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ m \tag{10b}$$

$$h_j(\vec{x})=0,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ k \tag{10c}$$

이와같은 數學的 計劃問題의 形式은 等號制約條件式(9c)를 除去하기가 不可能한 最適設計問題에 適用되고 있다. 이 方法을 非線形擧動 最適化問題에 適用하면 反復되는 非線形 解析은 除去되지만 最適化 問題에 擧動變數가 附加되어, 보다 많은 設計變數를 包含하는 最適設計問題로 된다.

이와같은 總合的인 最適設計 問題形成 過程을 具體的으로 說明하기 위해 그림 2의 3部材 트러스의 設計問題를 생각해 보자. 이 最適設計問題는 設計變數로는 斷面績 $\vec{x}=\{x_2,\ x_2\}$, 節點變位 $\vec{r}=(r_1,\ r_2)$ 및 部材應力 $\vec{\sigma}=(\sigma_1,\ \sigma_2)$를 決定하는 最適設計問題로 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$Z=282.8x_1+100x_2\rightarrow \min \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} &g_1\equiv -x_1\leq 0\\ &g_2\equiv -x_2\leq 0\\ &g_3\equiv \sigma_1-20\leq 0\\ &g_4\equiv \sigma_2-20\leq 0\\ &g_5\equiv -\sigma_3-15\leq 0 \end{aligned} \tag{11b}$$

$$\begin{aligned} &h_1\equiv \sigma_1-\frac{E}{100}(0.5r_1+0.5r_2)=0\\ &h_2\equiv \sigma_2-\frac{E}{100}r_2=0\\ &h_3\equiv \sigma_3-\frac{E}{100}(-0.5r_1+0.5r_2)=0\\ &h_4\equiv \frac{E}{100}x_1r_1-20=0\\ &h_5\equiv \frac{E}{100}(x_1+\sqrt{2}x_2)r_2-20=0 \end{aligned} \tag{11c}$$

이 設計法의 커다란 缺點은 設計變數의 數가 대단히 增加되어 높은 次元의 最適設計空間에서 最適解를 探索해야 한다는 것이다.

4) 擧動變數空間에서의 最適化 問題形成(Formulation in the behavior variables space)

이상의 說明한 바와는 다른 最適化 問題形成 方法[18]으로서 獨立變數를 必要한 設計變數만으로 制限하지 않고 擧動變數 등의 일부를 包含하는 設計空間에서 最適解를 探索하는 方法이다. 이 方法을 理解하기 위해 먼저 等號解析式을 滿足하도록 獨立的으로 選擇할 수 있는 變數를 이 最適化 問題의 設計變數로 定義한다. 一般的으로 構造의 擧動과 設計를 나타낼 수 있는 獨立變數의 選擇에는 여러가지의 可能性이 存在하고 또한 獨立變數로 假定한 값은 許容領域(모든 制約條件을 滿足하고 있다) 혹은 非許容領域內에 存在한다.

任意의 構造系에서 그의 擧動은 주어진 設計變數值에 대해 解析式을 解析함으로써 唯一하게 決定할 수 있다. 따라서 解析式의 數는 最適設計問題에서 獨立的으로 選擇할 수 있는 設計變數의 最大數를 나타내게 된다. 獨立變數의 數 I가 設計變數의 數 n보다 작은 경우에는 주어진 獨立變數의 값에 대해 나머지의 從屬變數를 最適化할 수 있다. 또 I=n이면 從屬變數는 주어진 獨立變數의 값에 대해 解析式을 解析함으로써 決定된다. 가장 適當한 獨立變數는 最適設計問題를 주의 깊게 檢討하므로써 決定할 수 있다.

그림 2에 表示한 3部材 트러스의 最適設計問題는 x_1, x_2 2개의 設計變數와 r_1, r_2, σ_1, σ_2, σ_3의 5개의 擧動變數가 存在한다. 지금 r_1 및 r_2를 獨立變數로 택하면 (I=n=2), 나머지 變數는 r_1, r_2의 값이 주어지면 決定할 수 있다. 즉 變數法으로부터

$$\begin{aligned} &x_1\equiv 20\frac{E}{100}\frac{1}{r_1}\\ &x_2\equiv \frac{20}{\sqrt{2}}\frac{E}{100}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

式 (9)의 最適設計問題는 變位變數 r_1, r_2의 設計空間에서 다음 條件을 滿足하는 $\vec{r}=(r_1,\ r_2)$를 決定하는 最適設計問題로 形成할 수 있다.

$$\begin{aligned} Z=&282.8\times 20\times \frac{100}{E}\frac{1}{r_1}\\ &+100\frac{20}{\sqrt{2}}\frac{100}{E}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\rightarrow \min \end{aligned} \tag{13}$$

$$g_1 \equiv -20\frac{100}{E}\frac{1}{r_1} \leq 0$$
$$g_2 \equiv -\frac{20}{\sqrt{2}}\frac{100}{E}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \leq 0$$
$$g_3 \equiv \frac{E}{100}(0.5r_1+0.5r_2)-20 \leq 0 \qquad (14)$$
$$g_4 \equiv \frac{E}{100}r_2-20 \leq 0$$
$$g_5 \equiv \frac{E}{100}(0.5r_1-0.5r_2)-15 \leq 0$$

이 設計問題에서 變位變數에 대한 設計空間은 그림 5에 表示한 바와 같다. 目的函數는 非線形函數이지만 制約條件은 모두 線形函數로 되어 있다. 이러한 最適化 問題形成 方法은 非線形擧動을 가지는 最適設計 問題에 대해서도 有效한 方法이 될 것이다. 그러나 目的函數나 制約條件을 獨立變數의 Explicit函數로 表現하기는 不可能하고 또 必要한 것도 아니다.

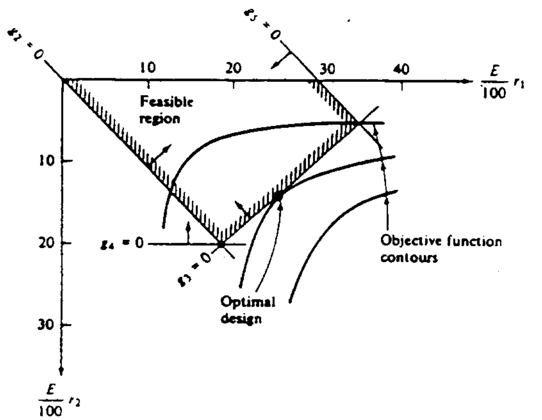

그림 5. 3部材 트러스의 變位變數와 設計空間

5. 在來式 方法에 의한 構造設計

1) 在來式 設計法의 疑問

在來式 設計法으로 어느 構造物을 設計할 때에는 設計해야 할 設計變數(Design variable)를 가政하고 주어진 荷重條件하에서 構造解析을 하여 그 結果가 모든 制約條件式 모두를 滿足하는지의 與否를 檢算한 結果 假定한 設計變數가 制約條件式을 滿足하지 않으면 다시 設計變數를 修正하여 모든 制約條件式을 滿足할 때까지 위의 假定을 되풀이하므로서 設計가 決定된다. 在來式 設計法은 構造物 規模의 大小를 莫論하고 이와같은 過程을 되풀이 한다. 그래서 在來式 設計方法을 構造解析法에 의한 設計法이라고도 한다. 그러나 이 方法은 設計者의 經驗과 過去의 資料에 基礎로 하고 있기 때문에 良質의 設計를 얻을 수 있다고 생각되지만 다음과 같은 疑問이 생긴다.

(1) 假定한 設計가 制約條件式 중 어느 制約條件式만을 滿足할 수도 있고 또는 모든 制約條件式을 滿足하고 있으나 너무 지나치게 滿足할 수도 있다. 이러한 경우에 在來式 設計法은 設計變數를 理論的으로 修正할 수 있는 方法이 없다.

(2) 數回의 反復試行 후 얻은 設計는 相對的인 最適이지 絶對的인 最適이라는 保章이 없다. 이는 工學的 價値判斷을 위한 基準(目的函數)이 없기 때문이다.

(3) 數回의 反復試行으로 얻어진 設計는 目的函數 및 制約條件式에 대한 感度(Sensitivity)를 一切 考慮하지 않기 때문에 設計와 製作을 總合的으로 考慮할 때에 이는 不合理한 設計라는 생각이 든다. 以上을 좀 더 자세히 說明하겠다.

2變數 2個의 制約條件式의 最適化問題는 다음과 같다.

$$\text{目的函數}: F(x_1, x_2) \rightarrow \min \qquad (15a)$$
$$\text{制約條件式}: g_1(x_1, x_2) \leqq 0 \qquad (15b)$$
$$g_2(x_1, x_2) \leqq 0$$

設計變數 : x_1, x_2

윗 式에 대한 設計空間은 그림 6과 같으며 實線이 制約條件式($g_1=0$, $g_2=0$)이고 點線은 目的函數의 等高線이다. 그림으로 在來式 設計法을 說明해 보자.

① 例를 들어 在來式 方法에서는 그림 6에서 B→C→D와 같은 過程을 거쳐서 設計가 끝날 것이다. 設計點 B는 制約條件式 g_2를 滿足하지 않기 때문에 現設計를 다시 改善하여 設計點 C를 얻을 수 있다. 이는 解析結果 制約條件式 g_1, g_2를 充分

히 滿足하고 있다. 그러나 이는 머누 安全側에 속하므로 이 設計點을 改善하여 設計點 D를 얻을 수 있다. 設計點 D는 制約條件式도 모두 滿足하고 目的函數값도 設計點 C에 比하여 減少되었기 때문에 設計者는 이를 選擇한다. 이 때에 設計變數가 斷面의 치수이고 設計 對象 構造系가 單純하면 設計變數와 制約條件式間의 關係는 어느 정도 明確하기 때문에 制約條件式이 滿足되지 않을 경우(設計點 B) 또는 制約條件式을 지나치게 滿足하는 경우(設計點 C)라도 設計를 改善할 알고리즘을 作成하는 데에는 큰 어려움이 없을 것이다.

그러나 設計變數갈 構造物의 形狀에 대한 幾何學的 變數이면 設計變數와 制約條件式과의 關係가 複雜해진다. 이러한 때에는 現設計點을 改善하기 위한 알고리즘을 作成하기가 대단히 困難해서 設計者의 經驗과 直觀力에 依存하게 될 것이다.

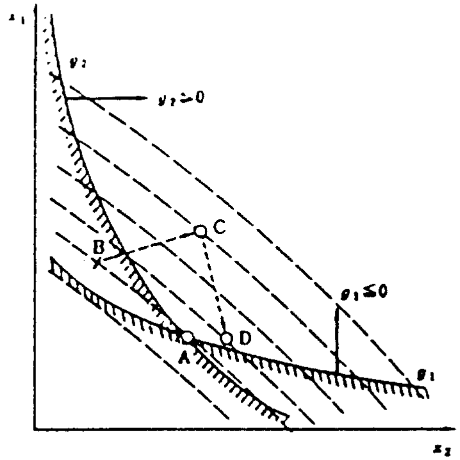

그림 6. 設計空間과 在來式法에 의한 設計

② 그림 6으로부터 最適解는 明確히 設計點 A이고 設計點 D는 設計點 C에 比하여 相對的으로 最適이라 해도 過言이 아니다. 一般的으로 在來設計法은 設計의 優劣을 判斷하는 工學的 價値基準(目的函數)이 明確히 되지 않고 좌우간 모든 制約條件式을 滿足하는 設計點을 구하는 데에 重點을 두고 있다. 물론 在來式 設計法에 의해서도 設計點 A 또는 이에 近接한 設計點을 얻을 수 있을 것이다. 그러나 問題는 最適解가 구해질 可能性은 높지 않으며 또한 구한 設計點이 最適이라는 保證이 없는데에 問題가 있다.

③ 式 (15)와 같은 最適化問題의 設計空間이 그림 7로 되었을 때를 생각해 보자. 여기에서 設計點 A와 設計點 B를 比較한다. 設計點 A는 設計點 B에 比하여 目的函數의 값도 적고 또한 實行可能한 設計이지만 最適解가 대단히 좁은 領域內에 存在한다. 그러나 設計點 B는 目的函數의 값이 設計點 A보다는 크지만 넓은 領域內에 存在한다. 在來式 設計法으로는 주저없이 設計點 A를 택할 것이다. 그러나 設計者가 그림 8과 같이 情報를 얻을 수 있다면 設計者는 設計點 A와 設計點 B중 어느 것을 選擇할 것인가?

設計點 A를 選擇했을 때에는 構造物을 製作하는 데에 높은 精密度가 要求될 것이다. 構造物 製作時의 높은 精密度를 期待할 수 없다면 多少 目

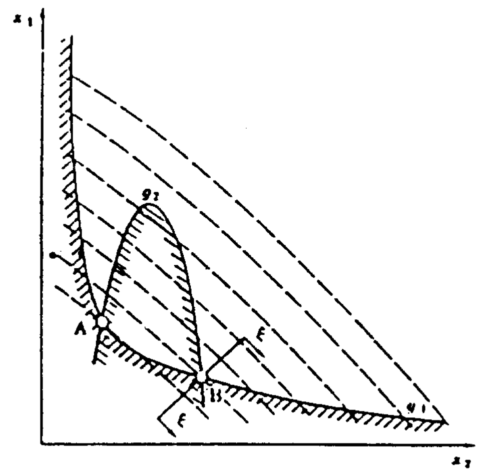

그림 7. 在來式法에 의한 設計의 一例

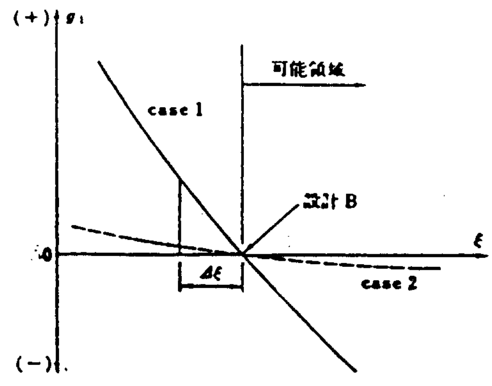

그림 8. ζ−ζ 斷面에서 制約條件式의 勾配

的函數의 값이 크더라도 設計點 B를 選擇할 지도 모른다. 왜냐하면 그림으로부터 設計點 A는 약간의 製作誤差가 있어도 制約條件式을 滿足시키지 못하는 設計가 될 可能性이 높기 때문이다.

그림 8은 $\zeta-\zeta$ 斷面으로 設計空間을 切斷했을 때의 制約條件式 g_1과 ζ의 關係를 表示한 것이다. case 1은 設計點 B에 대해 g_1의 勾配가 急한 때이고 case 2는 緩慢한 경우이다. 在來式法으로 設計하면 이와 같은 情報는 전혀 參照되지 않는다. 그러나 g_1이 case 1과 같이 ζ에 대해 敏感하면 設計者는 構造物 製作時에 어떤 注意를 促求할 必要가 있으나 case 2라면 그러한 注意는 必要치 않을 것이다. 왜냐하면 case 1에서는 약간의 構造物 製作誤差가 생겨도 制約條件式을 滿足시키지 못할 可能性이 높기 때문이다.

이러한 內容을 觀察하려면 感度解析(Sensitivity analysis)으로부터 얻어지는 情報가 有效하다. 그러한 在來式 設計法 즉 構造解析으로만 하는 設計는 感度解析을 전혀 考慮치 않고 있다.

지금까지 言及한 3가지 項目은 在來式 設計法으로 解決할 수 없는 事項이다. 그래서 良質의 安全한 構造物을 設計하여 建設하려면 위에서 言及한 3가지의 項目에 대한 解答을 주는 一般的인 設計法의 確立이 必要하다고 생각된다.

6. 構造最適設計法

構造最適設計法은 위에서 說明한 ①, ②, ③에 대해 滿足할 만한 解決策을 提供하나 全的으로 滿足할 만한 解決策을 提供하는 것은 아니며 또한 缺點이 아주 없는 것은 아니다. 그러나 設計의 改良法에 대해서는 여러가지의 合理的인 理論이 提案되었으며 工學的 價値 規準이 單一目的問題이든 多目的問題이든간에 이를 明確히 定義하는 設計法이다. 위에서 言及한 ③項은 構造設計 뿐만 아니라 다른 工法 分野의 設計에서도 어려운 問題이다. 그러나 最適設計法은 最適化 過程중에 반드시 感度分析을 하여 얻은 情報를 使用하고 있어 ③項을 解決할 수 있으므로 다른 設計法에 비하여 優秀한 設計法이라해도 過言이 아닐 것이다.

例를 들면 最適設計法은 1個의 目的函數, 2個의 設計 變數, 2個의 制約條件式이 있으면 最適化問題는 式 (15)와 같이 形成되므로 이러한 最適化問題는 數學的 技法으로 解를 얻는다.

複雜한 構造物에 대한 最適化問題의 形成은 困難하다는 指摘도 있고 또한 構造最適設計法에서는 在來設計法에 比해 많은 構造解析이 必要하므로 計算時間이 많이 걸린다는 問題도 있다. 그러나 複雜한 意思決定問題도 詳細히 檢討하면 어떠한 最適化 問題로의 形成이 可能한 것과 그렇지 않은 것으로 分類할 수 있다고 생각된다. 어떠한 最適化 問題로의 形成이 可能한 問題에 대해서는 最適設計法이 有效하고 그렇지 않은 問題에 대해서는 시스템工學의 技法이 有效할 것이다. 最適設計法은 意思決定을 위한 技法의 하나이므로 最適設計法은 시스템工學의 範疇에 속한다는 意味도 갖게 된다.

그리고 最適設計法은 在來式 設計法에 比해 構造解析 時間이 많이 걸리는데, 完全하지는 않지만 이를 解決하기 위해서 앞에서 說明한 近似技法이 開發되어 있어 最適設計法은 在來式 設計法보다 數學的으로 어렵다는 點만 設計者가 克服한다면 最適設計는 合理的인 理論에 의한 優秀한 設計法으로 생각된다.

7. 構造最適設計法 將來의 課題

數學的 計劃法에 의한 最適設計法은 現在 構造設計뿐만 아니고 다른 工業設計의 分野에서도 實用的인 設計方法으로 意識하고 있다. 그러나 數學的 計劃法에 의한 最適設計法의 有用性은 限定된 部分에서만 理解되고 있어 그의 廣範圍한 應用을 위해서는 먼저 解決되어야 할 여러가지 問題가 있다. 그 가운데 數學的 計劃法에 의한 最適設計法 自身의 問題, 大學敎育의 問題 및 設計 技術者의 必要性에 대해 說明하고자 한다.

1) 數學的 計劃法에 의한 最適設計法 自身의 問題

數學的 計劃法에 의한 最適設計法으로 構造物을 設計할 때에는 될 수 있는한 效率的으로 해야 한다. 效率的이라고 하는 것은 앞에서 說明한 바

와 같이 構造解析의 回數가 적다는 것을 意味한다. 앞으로 數學的 計劃法은 若干의 發展이 있겠지만 큰 發展이 있으리라고는 생각되지 않기 때문에 計算에 대한 效率의 向上은 感度 解析과 良質의 近似모델의 作成에 기대할 수밖에 없다.

感度解析은 差分法보다는 解析的인 方法이 最適化過程의 安定性 및 效率性을 一般的으로 向上시킨다. 應力, 變形 뿐만 아니라 이외의 構造應答에 대한 效率的인 感度解析 計算法의 確立이 要望되며 또한 汎用 有限要素法 프로그램에는 感度解析도 包含한 프로그램의 開發이 이루어져야 한다. 그리고 差分法으로 感度解析을 할 때에는 각 最適化 問題에 對應한 Step幅을 잡는 方法, 竝列處理 시스템에 感度解析의 應用은 많은 問題가 남아 있다.

또 設計變數가 部材 斷面 치수일 때에는 有效한 近似모델이 提示되고 있지만 幾何學的 形狀일 때에는 有效한 近似모델이 提示되지 않고 있다. 특히 連續體의 形狀最適化는 現在에도 활발히 研究되고 있는 主題이기 때문에 良質의 近似모델의 考察, 作成은 반드시 必要하다.

이외에 設計變數의 初期值 設定問題는 重要한 問題임에도 불구하고 意外로 研究되지 않았다. 設計變數의 初期值에 따라 最適解의 收斂速度가 좌우되므로 良質의 初期值는 直接的으로 效率, 安定性을 保證한다. 따라서 有效한 初期值設定法은 앞으로 研究해야 할 重要한 問題라고 생각된다.

2) 大學敎育의 問題

요사이 大學의 工學敎育은 內外的으로 急激히 變하고 있다. 大學敎育의 問題로는 敎科過程이 解析(分析)에 偏重되어 있다는 점이다.

現在 大學의 敎科過程에서는 學生들이 "構造解析=構造設計"라고 잘못 생각하고 있으며 敎育 및 研究에서도 解析에 지나치게 重點을 두고 있는 實情이다. 그러나 앞에서 在來設計法인 造解析에 의한 設計法에 대해 疑問點을 指摘했지만,

"構造解析은 構造設計가 아니고 構造設計의 一部이다."

라는 것을 올바로 理解시켰다. 좀 더 이 內容을 認識하기 위해서 構造最適設計法 또는 構造總合에 관한 敎科目의 設講이 必要하다고 생각된다. 시스템工學이 시스템에 대한 研究方法을 그의 基本으로 하고 있는 것과 같이 構造總合의 基本은 設計의 技術에 있는 것이 아니고 構造物의 設計는 敎育過程의 編成이 必要하다고 본다.

3) 設計 技術者의 必要性

專門家-시스템은 近來에도 활발히 研究되고 있는 分野의 하나이다. 이 分野에서는 專門家의 經驗, 知識을 導出하여 AI시스템을 위한 言語로 飜譯하는 KE(Knowledge Engineer)가 중요한 役割을 擔當한다. 構造最適設計에서도 이와 同一한 役割을 擔當하는 設計技術者 DE(Design Engineer)의 存在가 必要하다.

構造設計에는 많은 要因이 複雜하게 얽혀 있어 언뜻 最適設計問題로 形成하는 데에 困難하다고 생각되는 점도 있다. 그러나 人間과 컴퓨터와의 役割을 分擔시키면 最適設計問題로 形成할 수 있는 것은 그리 적지 않을 것이다. 그래서 最適設計法과 構造解析法을 理解하여 複雜한 設計問題를 最適設計問題로 飜譯하는 設計技術者의 養成도 解決해야 할 課題라고 생각된다.

參 考 文 獻

1. Schmit, L. A. : Structural Design by Systematic Synthesis, of the 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, New York, pp.105~122, 1960.
2. Vanderplaats, G. N. : Structural Optimization-Past, Present and Future, AIAA J., Vol. 20, pp.992~1000, 1982.
3. Schmit, L. A. : Structural Synthesis-Its Genesis and Development, AIAA J., Vol. 19, pp. 1249~1263, 1981.
4. Schmit, L. A. and B. Farshi : Some Approximation Concepts for Structural Synthesis, AIAA J., Vol. 12, pp.692~699, 1974.
5. 三浦宏一：適構造設計の方法とその應力について, 第5回 MSC/NASTRAN ユーサー會議 論文集, 1987.
6. Fleury, C. and B. Sander : Relations between Optimality Criteria and Mathematical Pro-

gramming in Structural Optimazation. Proc. of the Symposium on Application of Computer Methods in Engineering Univ. of Southern California, pp.507~520, 1977.

7. Fleury. C. : A Unitied Approach to Structural Weight Minimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 20. No.1. pp.17~38, 1979.
8. Fleury, C. : An Efficient Optimality Criteria Approach to the Minimum Weight Design of Elastic Structures, J. of Computers and Structures, Vol. 11. pp.163~173, 1980.
9. Bennett, J. A. and M. E. Botkin : Shape Optimization of Two-Dimensional Structures with Gemetric Problem Description and Mesh Refinement, AIAA/ASME/ASCE/AHS 24th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, pp.422~431, 1983.
10. Vanderplaats, G. N. and H. Sugimoto : A General-Purpose Optimization Program for Engineering Design, Computers and Structures, Vol. 24, pp.13~21, 1986.
11. Fleury, C. and L. A. Schmit : ACCESS-3 Approximation Concepts Code for Efficient Structural Synthesis-User's Guide, NASA CR-152960, 1980.
12. Vanderplaats : Dot users manual, VMA Engineering, 1990.
13. Vanderplaats : Dot users manual, VMA Engineering, 1991.
14. Uri kirsch : Optimum Structure Design : Mcgraw-Hill Book Company, 1981.
15. Majid, K. I. : Optimum Design of Structure : Butter worth & Co. Ltd., 1974.
16. Yoshikazu Yamada : Optimization of structural System~ Theory and Committe of Structure Engineering Japan Society of Civil Engineers Sept, 1988.
17. R. L. For and L. A. Schmit : "Advances in the Integrated Approach to Structural Synthesis," J. Spacecraft and Rockets, Vol. 3. No.6. 1966.
18. U. Kirsch and F. Moses : "Formulation of Optimal Design in the Behavior Variables Space," J. Struct. Mech., Vol. 4. No. 4. 1976. pp.437~452.