

Product-of-Exponentials 공식을 기초로 한 기구학적 보정 방법

박 종 우*

Kinematic Calibration and the Product of Exponentials Formula

Frank C. Park

Department of Mechanical and Aerospace Engineering
University of California, Irvine

요 약

본 논문에서는 Product-of-Exponentials(POE) 공식을 기초로 한 오픈 체인(open-chain) 메카니즘의 기구학적인 보정(kinematic calibration) 방법을 제안한다. POE 식은 open-chain 메카니즘의 정기구학식을 행렬지수(matrix exponential)의 곱으로 표시하는, 고전적인 스크류 이론(screw theory)을 현대 기하학적으로 해석한 일반 기계의 체계적 모델링 수법이다. 흔히 사용되는 Denavit-Hartenberg(D-H) 파라미터와 달리 POE식의 기계적 파라미터는 관절축의 변경과 함께 연속적으로 자연스럽게 변하며, D-H 파라미터의 특이성을 다루는 특유한 처리 방법들을 제거하는 이점을 가지고 있다. 그리고 POE식을 도입한 일반 오픈 체인 메카니즘의 최소오차자승 기구학적 보정 알고리즘을 유도하며, 제안한 알고리즘의 유효성을 증명하기 위하여 6축 오픈 체인의 시뮬레이션 결과를 제시한다.

Abstract

We present a method for kinematic calibration of open chain mechanisms based on the product of exponentials (POE) formula. The POE formula represents the forward kinematics of an open chain as a product of matrix exponentials, and is based on a modern geometric interpretation of classical screw theory. Unlike the kinematic parameters in the POE formula

* University of California, Irvine 기계항공공학과

vary smoothly with changes in the joint axes; ad hoc methods designed to address the inherent singularities in the D-H parameters are therefore unnecessary. After introducing the POE formula, we derive a least-squares kinematic calibration algorithm for general open chain mechanisms. Simulation results with a 6-axis open chain are presented.

1. 서 론

일반 산업용 로보트의 기구학적 파라미터는 제조과정에서 지정된 것과 일치하는 경우가 사실상 드물다. 예를 들면 평면 기구(planar mechanisms)의 관절축들은 모두 평행이어야 하며, 구면 기구의 관절축들은 유일한 교차점(intersection)을 가져야 하지만, 생산 공정의 비정밀성으로 인한 오차나 장기적 사용으로 인한 마멸로 로보트의 실제 기구학적 파라미터는 설계 단계에서 지정한 곳과 차이가 나는 것이 불가피하다. 로보트의 정확성과 높은 신뢰도를 실현하는 데에는 기구학적 파라미터의 자동적 보정이 필수적이다. Hollerbach⁽⁴⁾에 의하면, PUMA 560 로보트의 공구 위치 정밀도는 보정하기 전에 불과 1cm밖에 안되나, 보정 후에는 약 0.3mm로 10배 이상 향상되었다.

대부분의 기구학 보정 기법은 우선 정기구학식(forward kinematic equation)의 선형화로부터 시작된다. 로보트의 공구계(Joint Position)와 관절 변수 벡터를 각각 x 와 θ 로 표시하고, p 를 기구학적 파라미터 벡터라고 하면 정기구학 식은

$$x = f(\theta, p) \quad (1,1)$$

와 같이 표현되며, 이 식을 선형화하면 다음과 같다.

$$dx = \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial p} dp \quad (1,2)$$

기구학적 보정의 목적은 공구계 위치의 오차인 dx 를 측정하여, dx 와 식(1.2)의 우변과의 차이를 최소화하는 $d\theta$ 와 dp 의 값을 구하는 것이다. 일반 산업용 로보트의 기구학적 구조를 묘사할 때, 현재 D-H 파라미터가 가장 많이 사용되고 있는데, 그 이유는 다른 파라미터에 비해 최소한의 필요한 파라미터 요소만이 사용되기 때문이다. 한편, D-H 파라미터의 심각한 단점은 이웃하는 관절축이 서로 평행한 경우에 D-H 파라미터의

특이성(singularity)이 발생한다는 점이다. 이 특이성의 원인은 이웃하는 관절축이 평행에서 약간 벗어나면 상호 수직선의 방향이 급격히 변하므로 D-H 파라미터의 링크 옵셋(link offset)이 불량한 상태(ill-conditioned)이기 때문이다. 이 문제를 극복하기 위하여 여러 방법이 제시되어 왔으나 그 중에 가장 많이 주목받은 방법은 Hayati⁽⁵⁾의 수법이다. 이 방법의 핵심은 4개의 기본적인 D-H 파라미터에 여분의 파라미터 하나를 추가하여 미끄럼 관절(prismatic joint)도 다룰 수 있는 5 파라미터 표시법을 만드는 데에 있다. Stone⁽¹¹⁾에서는 링크계를 임의의 위치에 부착할 수 있도록 기본 D-H 모델에 2개의 파라미터를 추가하였으며, Zhuang et. al.⁽¹²⁾에서도 유사한 6-파라미터 표시법을 제시하였다. 후자를 제시한 필자들은 그 표시법이 완벽하고 파라미터상 연속적이라는(parametrically continuous) 점을 강조했다. 본 논문에서 다루게 될 방법은 Mooring et. al.⁽³⁾의 영점 기준(zero reference) 모델과 여러 부분이 유사하고, 특히 로보트의 영점(zero) 위치가 설정되었을 때 각 관절축의 위치와 방향을 관성계 기준으로 표시한다는 공통점을 가지고 있어서, 본 논문의 방법도 일종의 영점 기준 모델로 취급할 수 있다. Mooring의 모델은 완벽하고 파라미터 면에서 연속적이긴 하나, 오차 모델의 유도와 실제 적용이 복잡하기 때문에 많이 사용되지 않고 있다. 상술한 기구학 보정 기법들은 D-H 표시법의 특이점 문제를 해소할 수 있는 반면, 전반적으로 임의의 수학적 정의와 비표준적 표시 규약에 기초하고 있고, 더욱이 산출 알고리즘도 관절 종류에 따라 변경되므로 보정 과정이 불필요하게 복잡하다. 대부분의 기구학적 표시법도 단지 보정에만 효율적으로 적용할 수 있으며 실제로 폭넓게 응용될 수 있는지는 아직 불투명하다.

본 논문에서는 기구학적 방정식을 행렬 지수의 곱으로 표시하는 Product-of-Exponential(POE)식을 기초로 한 기구학적 보정 기법을 제안한다. POE식의 형식

은 다음과 같다.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{A_1 x_1} e^{A_2 x_2} \cdots e^{A_n x_n} M \quad (1.3)$$

여기서 x_1, x_2, \dots, x_n 은 관절 변수이고 M 은 전 관절들이 O 에 고정되었을 때 공구체의 위치와 방향을 표시하는 4×4 동차 변형 행렬(homogeneous transform)이며, A_i 는 특수한 형의 4×4 정수 행렬이다. 각각의 A_i 행렬은 회전 관절과 미끄럼 관절 등 모든 1자유도 관절 종류를 균일하게 모델링할 수 있는 일반 기구학적 파라미터이고, D-H 파라미터와는 달리 이웃하는 관절축이 평행할 경우에도 A_i 의 특이성은 발생하지 않는다. POE식은 Lie 그룹 이론(group theory)의 1-파라미터 부그룹(1-parameter subgroup) 개념에 기초하고 있어, 고전적인 스크류 이론을 현대 기하학적 시각에서 해석할 수 있는 유용한 식이기도 하다. 이 식도 일종의 영점 기준 모델이므로 각 링크의 계를 부착할 필요가 없으며, 기준의 보정기법의 특수한 부분들을 제거할 뿐만 아니라, 여러 응용 범위에서 다양하게 적용될 수 있는 보편적인 기구학 표시법이다(Park⁽⁷⁾).

앞으로 설명될 2장에서는 강체 운동에 필요한 기하학적 배경을 서술하며, 3장에서는 선형화한 POE식을 이용해 최소오차자승 기구학적 보정 알고리즘을 유도하여, 이 알고리즘의 성능을 시뮬레이션을 통해 평가하고자 한다. 마지막 장에서는 결론 및 앞으로의 연구방향에 대하여 서술한다.

2. 기하학적 배경

A. SE(3)의 Lie 그룹 구조

강성 물체 운동 집합은 아래와 같은 형을 갖는 4×4 행렬로 간주한다.

$$\begin{bmatrix} \Theta & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

여기서 $\Theta \in SO(3)$, $b \in \mathbb{R}^3$ 이며, 식(2.1)의 형식을 갖는 행렬은 SE(3) 행렬이라 부른다. SE(3)는 미분 매니플드(differential manifold)와 대수 그룹(algebraic group)의 구조를 지니고 있어 Lie 그룹의 하나로 볼 수 있다(Cartis⁽²⁾).

다음으로 일반 Lie 그룹 행렬인 G 를 고려하여, $X(t)$ 를 G 에 있는 미분 가능한 곡선으로 정의하고, $X(0) \equiv p$ 로 정한다. 그러면 $X(0)$ 에서의 G 의 접

선 벡터라 부르며, p 에 있는 모든 접선 벡터들은 $T_p G$ 로 표시되는 벡터 공간을 구성하여, 이 벡터 공간을 p 에 있는 G 의 접선 공간(tangent space)이라 부른다. p 가 항등(identity) 요소일 경우에는 $T_p G$ 는 G 의 Lie 대수라 부르며, 소문자 g 로 표시한다. 3×3 방향 행렬 집합인 $SO(3)$ 에서는 Lie 대수인 $SO(3)$ 가 3×3 꼬임 대칭(skew-symmetric) 행렬 집합이라는 것을 쉽게 증명할 수 있다. 가령 $\Theta(t)$ 를 $t=0$ 일 때 I 를 교차하는 $SO(3)$ 에 있는 궤도라 하면, 식 $\Theta^T(t) \Theta(t)$ 의 양쪽을 미분하여 $t=0$ 을 대입하면 $\Theta^T(0) + \Theta(0) = 0$ 식이 나타난다. 따라서 Lie 대수 $so(3)$ 는 아래와 같은 형의 3×3 행렬로 구성되어 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \triangleq [\omega] \quad (2.2)$$

여기서 $\omega \in \mathbb{R}^3$ 이고, 집합인 $so(3)$ 는 \mathbb{R}^3 와 동일하다는 것이 명백히 나타난다. 유사한 유도로 $SE(3)$ 의 Lie algebra인 $se(3)$ 도 아래와 같은 행렬로 구성된 집합이라는 것을 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

여기서 $[\omega] \in SO(3)$, $v \in \mathbb{R}^3$ 이므로, $se(3)$ 는 6차원 벡터 공간으로도 간주할 수 있다.

움직이는 강성물체는 속도와 가속도 벡터가 복합된 하나의 $se(3)$ 의 요소로 표시되는 습성이 있다. 가령 움직이는 물체의 위치와 방향을 $X(t) = \begin{bmatrix} \Theta(t) & b(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 로 정하면, 두 갈래의 방법으로 접선 벡터인 X 를 $se(3)$ 행렬로 표시할 수 있다. 즉,

$$\dot{X} X^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \Theta^{-1} & \dot{b} - \dot{\Theta} \Theta^{-1} b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

와

$$X^{-1} \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \Theta^{-1} & \dot{b} - \dot{\Theta} \Theta^{-1} b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

는 모두 $se(3)$ 행렬이며, 이 두 식은 간단한 계산으로 써 확인된다. 식(2.4)에서 $\dot{\Theta} \Theta^{-1}$ 는 관성좌표계를 기준으로 한 각속도ベクト리므로 XX' 를 접선 벡터 X 의 관성

기준속도표시 (inertial velocity representation)라 부른다. 마찬가지로 식(2.5)에서 $\Theta^{-1}\Theta$ 는 관성좌표계를 기준으로 한 각속도벡터이므로 X^tX 를 물체 기준속도표시 (body-fixed velocity representation)라고 부른다.

Lie 그룹과 Lie 대수를 연결하는 중요한 개념 중 하나로 지수 사상(exponential mapping)을 들 수 있다. 행렬로 표시한 Lie 그룹에서 지수 사상은 Lie 대수를 정의구역으로 갖춘 무한급수로 정의된다. 즉, A가 Lie 대수의 요소이면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\exp A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (2.6)$$

여기서 $\exp A$ 는 Lie 그룹의 요소이다. Lie 그룹이 $SO(3)$ 나 $SE(3)$ 일 경우에는 그 집합에 속해 있는 임의의 요소인 Y가 주어졌을 때 Lie 그룹에 해당하는 Lie 대수($so(3)$ 나 $se(3)$)에 식 $\exp X = Y$ 를 만족시키는 요소인 X가 적어도 하나 존재한다. 다음 정리의 증명은 Park^[5]에서 찾을 수 있다.

정리 1:

$$[\omega] \in so(3), \|\omega\| = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \text{ 이고 } v \in R^3 \text{ 일 때}$$

$$\exp \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp[\omega] & Av \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

이고, 여기서

$$\exp[\omega] = I + \frac{\sin\|\omega\|}{\|\omega\|} \cdot [\omega] + \frac{1 - \cos\|\omega\|}{\|\omega\|^2} \cdot [\omega]^2 \quad (2.8)$$

$$A = I + \frac{1 - \cos\|\omega\|}{\|\omega\|^2} \cdot [\omega] + \frac{\|\omega\| - \sin\|\omega\|}{\|\omega\|} \cdot \|\omega\|^2 \quad (2.9)$$

이다.

A 가 일반 Lie algebra의 임의의 양의 요소이면 e^{At} , $t \in R$ 는 그룹을 구성하고, 이러한 그룹은 Lie 그룹의 일파라미터 부그룹(one-parameter subgroup)이라 불리우는데, 로보트의 기구학적 묘사에서 중요한 역할을 맡는다. Exp 의 역 사상인 $\log: SE(3) \rightarrow se$ 의 상세한 공식은 아래와 같다.

정리 2:

Θ 를 $so(3)$ 의 일반 요소라 하고, Ψ 는 $1 + 2\cos\Psi = Tr(\Theta)$, $|\Psi|$ 를 만족시키는 스칼라라 한다(Ψ 에 대

한 조건으로 인하여 $Tr(\Theta) \neq -1$). $b \in R^3$ 가 주어진 임의의 벡터이면

$$\log \begin{bmatrix} \Theta & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega] & A^{-1}b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

이다. 여기서

$$[\omega] = \frac{\phi}{2\sin\phi} (\Theta - \Theta') \quad (2.11)$$

$$A^{-1} = I - \frac{1}{2} \cdot [\omega] + \frac{2\sin\|\omega\| - \|\omega\|(1 + \cos\|\omega\|)}{2\|\omega\|^2 \sin\|\omega\|} \cdot [\omega]^2 \quad (2.12)$$

이며, $\|\log \Theta\|^2 = \Psi^2$ 이다.

$se(3)$ 과 고전적인 스크류 이론의 긴밀한 관계는 전술한 \exp 와 \log 식으로 나타낼 수 있다. $(\omega, v) \in R^6$ 를 스크류로 해석하면, 그 스크류로 인한 강체 운동은 정리 1의 행렬 지수식으로 구현된다. 한편, 일반 Lie 그룹의 요소는 관련된 Lie 대수간의 선형적 사상으로 표시할 수 있는데, 이 매핑을 어드조인트 사상(Adjoint mapping)이라고 부른다. G 가 행렬 Lie 그룹이고, 그와 관련된 Lie 대수를 g 로 표시하고, G 에 속해 있는 임의의 요소 X 를 고려한다. 그러면 X 에 대한 어드조인트 사상 $Ad_x: g \rightarrow g$ 는 $Ad_x(x) = XxX^{-1}$ 로 정의되고, 이 매핑이 선형 사상이라는 것은 쉽게 확인될 수 있다.

$$X = \begin{bmatrix} \Theta & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{가 } se(3) \text{의 요소이며, } Ad_x \text{를 일반 } se(3)$$

요소 $X = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 에 적용했을 때, 아래와 같은 식이 주어진다.

$$\begin{aligned} Ad_x(x) &= \begin{bmatrix} \Theta & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta' & -\Theta'b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Theta[\omega]\Theta' & [b]\Theta\omega + \Theta v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

여기서 $\Theta[\omega]\Theta' = [\Theta\omega]$ 는 쉽게 증명될 수 있다. x 를 4×4 행렬 대신 6차원 벡터로 표시하면, Ad 는 아래와 같이 6×6 행렬로 구해진다.

$$Ad_x(x) = \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ [b]\Theta & \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta\omega \\ [b]\Theta\omega + \Theta v \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

마지막으로 $Ad^{i_x} = Ad_{x^{-1}}$, $Ad_x Ad_y = Ad_{xy}$ 등의 관계를 역시 비슷한 방법으로 증명할 수 있고, 앞으로 POE식을 선형화하는 과정에서 이 관계들을 적용한다.

B. POE 공식

POE 공식은 기구학과 Lie 이론의 긴밀한 관계를 나타내는 일반 연쇄 chain의 정기구학식 표시법이다. 기구학 이론 차원에서 뿐만 아니라, POE식은 정기구학의 산출에서도 기존의 표시법과 같은 효율성을 지니고 있다(Park⁽⁷⁾). 각 링크의 끝에 계를 부착하면, i 번째계의 위치와 방향을 $i-1$ 번째계를 기준으로 하여 묘사하는 동차변형행렬은 $f_{i-1,i} = e^{P_{i-1}} M_i$ 로 표시하며, 여기서 $M_i \in SE(3)$, $P_i \in se(3)$, 그리고 $x_i \in \mathbb{R}$ 는 i 번째 관절 변수를 나타낸다.

Paul⁽¹⁰⁾에서 지정된 denavit-hartenberg 파라미터의 규약을 따르면, 회전 관절인 경우에는

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

이다. 미끄럼 관절일 경우에는

$$M_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & 0 & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i & -s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

말단에 부착된 계와 기저계의 관계는 아래의 식으로 주어진다.

$$f(x_1, \dots, x_n) = e^{P_{1x_1}} M_1 \cdots e^{P_{nx_n}} M_n \quad (2.17)$$

이 식을 Lie 대수의 기초 관계인 $M^T e^P M = e^{M \cdot P M}$ 을 사용하여 다음과 같이 단순화한다.

$$f(x_1, \dots, x_n) = e^{A_1 x_1} e^{A_2 x_2} \cdots e^{A_n x_n} M \quad (2.18)$$

여기서 $A_1 = P_1$, $A_2 = M_1 P_2 M_1^T$, $A_3 = (M_1 M_2)^T P_3 (M_1 M_2)^{-1}$, ... 이다. 이 관계를 다시 적용하여 M 을 좌변으로 이항하면 식(2.18)은 다음과 같이 표시된다.

$$f(x_1, \dots, x_n) = M e^{B_1 x_1} \cdots e^{B_n x_n} \quad (2.19)$$

여기서 $B_i = M^T A_i M$, $i=1, \dots, n$ 식(2.18)과 (2.19)의 행렬 지수들은 정리 1에 폐형식(closed-formula)을 적용하여 간편하게 계산할 수 있다.

POE식의 A_i 와 B_i 행렬을 관절 i 의 운동의 나선 파라미터로 해석하면, 일반 기계의 정기구학식을 D-H 파라미터 없이도 유도할 수 있다. 즉, A_i 나 B_i 의 각도와 위치 성분을 ω_i 와 v_i 로 표시하면, ω_i 는 관성계 또는 말단계 좌표로 표시한 i 제 관절축의 방향 단위벡터이며, v_i 는 관절 i 에 의한 나선 운동의 피치를 $\omega_i^T v_i$ 로 만드는 벡터이다. 회전 관절일 경우에는 피치가 0이어야 하며, $\omega_i \times v_i$ 는 관절축에 있는 점이어야 한다. 반면에, 미끄럼 관절일 경우에는 ω_i 는 0이어야 되며, v_i 의 방향은 운동 방향과 동일해야 한다.

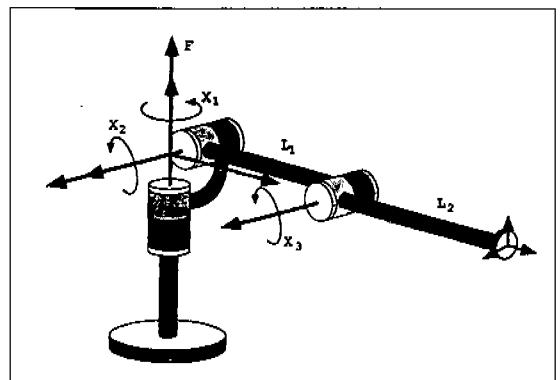


Fig. 1 A 3R elbow manipulator

(예) Fig. 1에서 3축 회전 관절 로보트의 정기구학 식은

$$f(x_1, x_2, x_3) = M e^{A_1 x_1} e^{A_2 x_2} e^{A_3 x_3}$$

으로 구성된다. 각 관절 변수를 0으로 고정하면 기저계를 기준으로 한 말단계의 방향과 위치는 각각 $\emptyset = L_1$, $b = (L_1, L_2, 0, 0)$ 과 같이 표시된다. 첫번째 관절의 나선축 방향은 $\omega_1 = (0, 0, 1)$ 이고, v_1 은 ω_1 와 수직해야 하며, $\omega_1 \times v_1$ 는 링크 1 관절축에 속해 있는 점이어야 하므로 v_1 은 $(0, 0, 0)$ 이다. 앞에 설명된 원칙에 의해서 $\omega_2 = (0, -1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 0)$, 그리고 $\omega_3 = (0, -1, 0)$, $v_3 = (0, 0, -$

L_1)이다.

연쇄 기구학적 chain의 POE기구학식은 앞의 예와 같이 D-H 파라미터 없이 유도할 수 있으며, 모델링의 관점에서 볼 때, D-H 파라미터를 기초로 한 기구적 표시법에 비해 많은 이점을 가지고 있다. 우선 POE식은 일종의 영점 기준 모델이며, 이 명칭은 말단계와 관성계가 선정되고, 각 관절의 0위치가 정의되었을 때, POE식의 유일한 $A_1, A_2, \dots, A_n \in se(3)$ 행렬과 $M \in SE(3)$ 행렬이 존재하므로 영점 기준 모델이라 불리운다. D-H 표시법과는 달리 POE식에 의하면 관절 변수가 회전 관절과 미끄럼 관절이 θ_i 와 d_i 와 같이 각각으로 나타나지만, POE식에서는 관절 종류와 관계없이 변수는 항상 x_i 로 주어진다. 셋째로, 이웃하는 관절축들이 거의 평행인 경우에는 D-H 파라미터는 약간의 기구학적 변경에도 극히 민감하므로 D-H 파라미터를 기초로 한 기구적 보정 알고리즘들은 단순하지 않다. 한편 POE식의 A_i 행렬들은 관절축의 변경에 따라 연속적으로 변하기 때문에 이러한 특이성 문제점을 제거할 수 있으며 POE식은 일종의 연속 매개 모델로 간주할 수 있다.

POE식의 또 하나의 유용한 특징은 자코비안의 단순하고 간결한 표시 방법이다. 말단계의 위치와 방향을 f 로 표시하면, 앞장에서 언급한 바와 같이 ff^T 는 말단계의 일반화된 속도를 표시하는 $se(3)$ 의 요소이다. e^{Ax} 의 역행렬은 e^{-Ax} 이며, 이 관계를 이용하면 ff^T 에 대해 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} ff^{-1} &= A_1\dot{x}_1 + e^{A_1x_1}A_2e^{-A_1x_1}\dot{x}_2 + \dots \\ &\quad + e^{A_{n-1}x_{n-1}}A_ne^{-A_nx_n}\dot{x}_n \end{aligned} \quad (2.20)$$

여기서 ff^T 를 6차원 벡터로 정리하면, 식 (2.20)의 우측은 $6 \times n$ 자코비안 행렬과 n 차원 관절 속도 벡터의 곱으로 표시할 수 있으며, 오른쪽 힙의 각 요소는 자코비안의 열과 동일하게 추급할 수 있다.

3. POE식을 이용한 기구적 보정 알고리즘

3.1 POE식의 선형화

본 논문에서 제시하는 POE 기구학적 보정 알고리즘 구현의 주 결과는 다음의 정리에서 주어진다.

정리 3:

$X(t) = e^{A(t)}$ 를 $SE(3)$ 에 있는 궤도로 정의하면,

$$\dot{X}X^{-1} = \int_0^1 e^{A(t)s} \dot{A}(t) e^{-A(t)s} ds \quad (3.1)$$

이다.

(증명)

$\frac{d}{dt} e^{A(t)}$ 를 테일러 급수로 쓰면,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{A(t)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{A(t+h)} - e^{A(t)}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{A(t)+h\dot{A}(t)} - e^{A(t)}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ e^{A(t)} + h \left(\frac{d}{dt} e^{A(t)+h\dot{A}(t)+o(h^2)} \right) \right|_{h=0} \\ &\quad - e^{A(t)} \} \end{aligned}$$

여기서 $O(h^2)$ 요소들은 극한에서 0으로 접근하므로 더이상 고려하지 않으며, 위의 식은 다음과 같이 단순화시킬 수 있다.

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{dh} e^{A(t)} - e^{h\dot{A}(t)}$$

한편, M, N 이 행렬이고, e, t 가 스칼라이면, 선형 대수학의 기본 개념들을 적용하여 다음과 같은 결과를 증명할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} e^{(M+\varepsilon N)t} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^t e^{Ms} Ne^{M(t-s)} ds$$

이 결과를 위의 식에 적용하면

$$\frac{d}{dt} e^{(M+\varepsilon N)t} \Big|_{\varepsilon=0} = \left(\int_0^t e^{A(s)} \dot{A}(s) e^{-A(t-s)} ds \right) e^{A(t)}$$

를 얻고, 여기서 정리 3은 증명된다. 이 결과를 POE식의 선형화에 적용하면, 우선 정기구학 식을

$$f(x_1, \dots, x_n) = e^{A_1x_1} \cdots e^{A_nx_n} M, \quad A_i = \begin{bmatrix} [w_i] & v_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

로 표시하고, 여기서 $M \in SE(3)$ 은 log식을 이용하여 $se(3)$ 로 표현한다. 그러면

$$\begin{aligned} df &= d(e^{A_1x_1}) e^{A_2x_2} \cdots e^{A_nx_n} M + e^{A_1x_1} d(e^{A_2x_2}) e^{A_3x_3} \cdots \\ &\quad e^{A_nx_n} M + \cdots + e^{A_{n-1}x_{n-1}} d(e^{A_nx_n}) M + e^{A_1x_1} \cdots \end{aligned}$$

$$e^{A_n x_n} (dM)$$

이며,

$$\begin{aligned} df \cdot f^{-1} &= d(e^{A_1 x_1}) e^{-A_1 x_1} + e^{A_1 x_1} d(e^{A_2 x_2}) e^{-A_2 x_2} e^{-A_1 x_1} \\ &\quad + \dots + e^{A_1 x_1} \dots e^{A_{n-1} x_{n-1}} d(e^{A_n x_n}) e^{-A_1 x_1} \\ &\quad \dots e^{-A_1 x_1} + e^{A_1 x_1} \dots e^{A_n x_n} (dM) M^{-1} e^{-A_n x_n} \\ &\quad \dots e^{-A_1 x_1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

이다. 정리 (3)을 적용하여 식 (3.4)의 각 $d(e^{A_i x_i}) e^{-A_i x_i}$ 를 다음과 같이 전개하여 표현한다.

$$\begin{aligned} d(e^{A_i x_i}) e^{-A_i x_i} &= \int_0^1 e^{A_i x_i s} d(A_i x_i) e^{A_i x_i s} ds \\ &= \int_0^1 e^{A_i x_i s} (dA_i x_i + A_i dx_i) e^{-A_i x_i s} ds \\ &= \int_0^1 e^{A_i x_i s} dA_i x_i e^{-A_i x_i s} ds \\ &\quad + \int_0^1 e^{A_i x_i s} A_i dx_i e^{-A_i x_i s} ds \\ &= x_i \int_0^1 e^{A_i x_i s} dA_i x_i e^{-A_i x_i s} ds + A_i dx_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

$(dM) M^{-1}$ 도 같은 방법으로

$$(dM) M^{-1} = d(e^\Gamma) e^{-\Gamma} = \int_0^1 e^{\Gamma s} d\Gamma e^{-\Gamma s} d\Gamma e^{-\Gamma s} ds$$

로 나타낸다. 식 (2.13)에서 정의한 근접 사상을 이용하여 식 (3.5)는 다음과 같이 성립한다.

$$\begin{aligned} df \cdot f^{-1} &= A_1 dx_1 + Ad_{e^{A_1 x_1}}(A_2) dx_2 + \dots \\ &\quad + Ad_{e^{A_1 x_1} \dots e^{A_{n-1} x_{n-1}}} (A_n) dx_n \\ &\quad + x_1 \int_0^1 Ad_{e^{A_1 x_1}} (dA_1) ds \\ &\quad + x_2 Ad_{e^{A_1 x_1} \dots e^{A_{n-1} x_{n-1}}} \left(\int_0^1 Ad_{e^{A_n x_n s}} (dA_2) ds \right) + \dots \\ &\quad + x_n Ad_{e^{A_1 x_1} \dots e^{A_{n-1} x_{n-1}}} \left(\int_0^1 Ad_{e^{A_n x_n s}} (dA_n) ds \right) \\ &\quad + Ad_{e^{A_1 x_1} \dots e^{A_{n-1} x_{n-1}}} \left(\int_0^1 Ad_{e^{\Gamma s}} (d\Gamma) ds \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

식 (3.7)은 기구적 파라미터와 관절변수를 대상으로 선형화한 POE식이다. 선형화한 식을 좀더 흔한 행렬 공식인 $Ap = y$ 로 표시하자면, y 는 $df \cdot f^{-1}$ 의 6차원 벡터 표시이며, p 는 다음과 같은 $(7n+6)$ 차원 기구적 파라미터 벡터로 정의된다.

$$\begin{aligned} p &= [dx_1 \ dx_2 \ \dots \ dx_n \ dw_1^T \ dv_1^T \\ &\quad \dots \ dw_n^T \ dv_n^T \ dw_M^T \ dv_M^T] \end{aligned} \quad (3.8)$$

A 행렬의 성분들은 아래 정의한 요소들로 구성되어 있다.

$$e^{A_i x_i} = \begin{bmatrix} \Theta_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{A_i x_i s} = \begin{bmatrix} \Re_{i(s)} & d_i(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$M = e^\Gamma = \begin{bmatrix} \Theta_M & b_M \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{\Gamma s} = \begin{bmatrix} \Re_M(s) & d_M(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

위에서 $e^{A_i x_i}$ 는 i 행렬로 정의하고,

$$r_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \Theta_i & 0 \\ [b_i] & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$Q_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \Theta_i & 0 \\ [b_i] \Theta_i & \Theta_i \end{bmatrix} \right)$$

$$x_k \int_0^1 \begin{bmatrix} \Re_k(s) & 0 \\ [d_k(s)] \Re_k(s) & \Re_k(s) \end{bmatrix} ds \quad (3.12)$$

$$Q_M = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \Theta_i & 0 \\ [b_i] \Theta_i & \Theta_i \end{bmatrix} \right)$$

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} \Re_M(s) & 0 \\ [d_M(s)] \Re_M(s) & \Re_M(s) \end{bmatrix} ds \quad (3.13)$$

로 정의한다. 위의 양들을 대입하면 식 (3.7)은 다음과 같이 성립될 수 있다.

$$\begin{aligned} y &= [r_1 | r_2 | \dots | r_n | Q_1 | Q_2 | \dots | Q_n | Q_M] \\ &\triangleq Ap \end{aligned} \quad (3.14)$$

다음에는 식 (3.7)의 우측인 $df \cdot f^{-1}$ 를 고려한다. T_a 는 기구적인도의 공정 치수를 이용하여 얻은 말단계의 예상 위치와 방향이다. 그러면 $df \cdot f^{-1} = (T_a - T_n) T_n^{-1} = T_a T_n^{-1}$ 이며, $T_a T_n^{-1}$ 를 $I + Q + Q^2/2! + \dots$, $Q = \log(T_a T_n^{-1})$ 로 쓰면, T_a 와 T_n 이 적당히 근접할 경우에는 $df \cdot f^{-1}$ 를 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$df \cdot f^{-1} = \Omega = \log(T_a T_n^{-1}) \quad (3.15)$$

3.2 기구적 보정을 위한 최소오차자승 알고리즘

보정의 첫 단계는 메카니즘을 작업공간상의 여러 자세에서 공구계의 위치와 방향을 측정하여 수집한 오차 벡터 \mathbf{y}_i 와 자코비안(Jacobian) 행렬 A_i 를 단 하나의 식으로 조합하는 것이다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} p \quad (3.16)$$

이 식을 더 간략하게

$$\mathbf{y} = Ap \quad (3.17)$$

로 쓴다. 식(3.17)의 최소오차자승해는 아래와 같다.

$$p = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y} \quad (3.18)$$

기구학적 파라미터의 최초값을 P 로 정하면, 수정된 파라미터 P' 의 값은 다음과 같이 얻는다.

$$P' = P + p \quad (3.19)$$

이 문제는 비선형 견적(nonlinear estimation)문제 이므로 변환 벡터 P 가 0으로 접근하거나, P 가 안정한 극한치로 수렴할 때까지 상기의 과정을 반복하며, 식(3.16)의 A_i 행렬들은 기구학적 파라미터의 최근값을 대입하여 구한다. POE식 (3.2)에서 각

$A_i = \begin{bmatrix} [w_i] & v_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 행렬은 관점축이 w_i 방향으로 정렬되었고, 퍼치가 $w_i^T v_i = 0$ 인 일반 헬리컬(helical) 관절을 모델한다. 순수한 회전 관절은 $w_i^T v_i = 0$ 조건을 만족시켜야 하고, 미끄럼 관절에서는 $w_i = 0$ 조건이 적용된다. 따라서 일반 로보트의 회전 관절을, 제조로 인한 오차가 전혀 없고 완벽한 회전관절로 모델링하고자 한다면, 상기의 조건을 적용한다. 이에 따라, n 개의 회전 관절을 갖춘 기계를 보정할 때는 다음과 같은 최적화 문제로 표현한다.

최소화:

$$J(p) = \|A_{p-y}\|^2 \quad (3.20)$$

구속조건

$$P^T Q P = 0 \quad (3.21)$$

단, Q 는 $6n \times 6n$ 블럭대각행렬이며, 각 블럭은 다음과 같은 $n \times n$ 행렬로 구성되어 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

여기서 I 는 3×3 항등(identity) 행렬이다. 미끄럼 관절일 경우에는 V_i 만 견적한다.

4. 보정예

본 절에서는 6축 퓨마(Puma) 560형 로보트를 대상으로 한 시뮬레이션을 통하여 앞절에서 제시한 보정 알고리즘의 타당성과 효율성을 시험하고자 한다. 관심 대상인 로보트의 기계적 구조도는 Fig. 2와 같으며, 각 관절의 몸짓은 0으로 정하므로, 식(3.8)의 P 벡터의 dx_i 성분들은 견적하지 않는다. 따라서 식(3.14)의 A 행렬에서 앞쪽 n 개의 열은 제거한다. 로보트의 기구학적 파라미터의 실제값과 공칭값은 Fig. 3에 주어진 표와 같다.

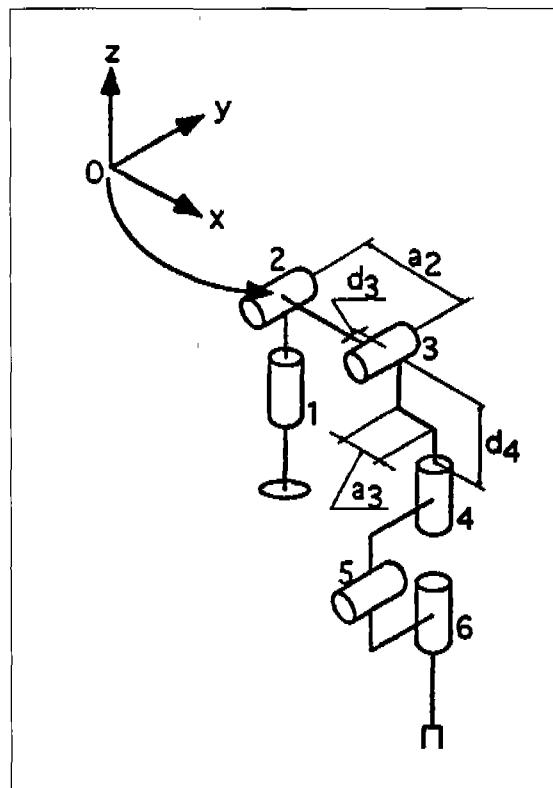


Fig. 2 A 6R Puma 560-type manipulator

	nominal value	actual value
ω_1	(0, 0, 1)	(0.05, 0, 0.96)
v_1	(0, 0, 0)	(0.04, -0.03, -0.00208333)
ω_2	(0, -1, 0)	(-0.04, -1.08, 0.01)
v_2	(0, 0, 0)	(-0.03, 0.001574074, 0.05)
ω_3	(0, -1, 0)	(0.02, -0.97, 0)
v_3	(0, 0, -100)	(0.01, 0.00206185, -106)
ω_4	(0, 0, -1)	(0.005, 0.001, -0.99)
v_4	(-50, 250, 0)	(-51, 248, -0.007070707)
ω_5	(0, -1, 0)	(-0.02, -1.04, 0.001232)
v_5	(-20, 0, -250)	(-20.6, 0.1, -250)
ω_6	(0, 0, -1)	(-0.01, -0.002, -1)
v_6	(-50, 250, 0)	(-51, 250, 0.01)
ω_M	(0, 0, 0)	(0.0015, 0.01, 0.043252427)
v_M	(250, 50, -20)	(254, 51, -20.6)

Fig. 3 POE kinematic parameters for the Puma 560-type manipulator

로보트가 다양한 자세를 취한 상태에서 실제 기구적 파라미터를 이용하여 공구계의 위치와 방향을 계산하고, 이것을 측정한 데이터로 간주하여 시뮬레이션을 실행한다. 제시한 보정 알고리즘의 노이즈에 대한 민감성을 측정하기 위하여 각 데이터 점에 균일한 무작위 노이즈(uniform random noise)를 가한다. 즉, 공구계의 측정한 방향과 원점위치를 $\theta_a(x)$ 와 $P_a(x)$ 로 표시하면, $(-1, 1)$ 범위에 해당하는 무작위한 노이즈 값을 $P_a(x)$ 벡터의 각 성분에 가하며, $\log \theta_a(x)$ 의 3개의 독립한 성분에는 $(-0.1, 0, 1)$ 범위에 해당하는 노이즈 값을 가한다.

전술한 방법으로 얻은 측정 데이터를 보정 알고리즘에 사용하여 공정 파라미터를 개선한다. 견적한 파라미터 값을 실제 파라미터와 비교하는 데에는 SE(3)의 거리 함수(distance function)가 필요하고, 이 함수를 다음과 같이 정의한다. 로보트의 전 관절들이 0으로 고정된 상태에서 공구계의 실제 위치와 방향을 T_a 라 하고, 개선된 파라미터로 계산한 공구계는 T_c 로 한다. T_a 와 T_c 의 방향 행렬과 위치 벡터는 다음과 같이 정의한다.

$$T_a = \begin{bmatrix} \Theta_a & b_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_c = \begin{bmatrix} \Theta_c & b_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

T_a 와 T_c 간의 거리는 다음과 같이 정의한다.

$$d(T_a, T_c) = \{\|b_c - b_a\|^2 + \|\log(\Theta_a^{-1}\Theta_c)\|^2\}^{1/2} \quad (4.2)$$

보정한 기구적 파라미터가 실제 파라미터에 근사하면, T_a 와 T_c 의 값도 역시 비슷할 것이고, 따라서 상기의 거리함수의 값도 최소화된다.

시뮬레이션의 결과는 Fig. 4에 나와 있다. 이 그림에서는 오차를 측정 순서의 함수로 표시하였으며, 모두 20개의 측정한 데이터 샘플을 수집하였다. 오차는 상기의 거리함수를 사용하여 측정하였고, 각 관절을 완벽한

회전 관절로 모델링시켜 POE식의 각 행렬에 $W_i^T V_i = 0$ 조건을 적용하였다. 보정된 파라미터 값은 MATLAB의 최적화 툴박스를 사용하여 얻었고, 분석 결과 오차는 예상대로 데이터 수가 늘어날수록 감소하고, 기구적 파라미터의 보정된 최종값은 약 10번째 반복에 수렴하는 것을 볼 수 있었다.

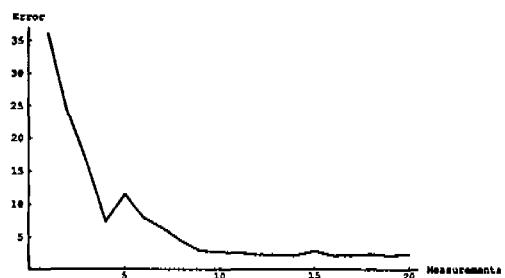


Fig. 4 The error in the position and orientation of the end-effector tool frame(measured in its zero position), as a function of the number of measurements.

5. 결 론

본 논문에서는 POE기구학 식을 기초로 한 오픈 체인의 기계적 파라미터 보정 기법을 제시하였다. POE식은 다른 기계적 표시법에 비해 모델링 차원에서 많은 이점을 가지고 있고, 특히 기계적 보정을 단순하고 균일하게 다룰 수 있는 유용한 기계적 표시법이다. 기존의 보정 기법과 달리 이웃하는 관절축이 평행인 경우를 다루는 데에도 개별적인 방법이 필요하지 않다.

POE식은 고전적인 스크류 이론을 현대 기하학적으로 해석한 표시법이며, 보정 이외의 광범위하고 다양한 로보트 동력학적 운동식을 구할 때에 POE식을 사용하여 로보트의 관성 행렬을 쉽게 분해할 수 있는 폐형식

표현(closed-form expression)을 얻을 수 있다(Park, bobrow, and Plaen⁽⁸⁾).

제시한 보정 기법은 최소오차자승해를 찾으나, 원칙적으로 다른 견적 알고리즘도 사용 가능하다(예를 들어 Levenberg-Marquardt, Total elast-squares 등). 또한, 여기서는 로보트의 기하학적 변경만 고려했지만, 좀더 상세한 모델이 필요하다면 백래시(backlash), 기어 트랜스미션(gear transmission)의 오차, 조인트 커플라이언스(joint compliance) 등 비기하학적 효과도 POE식에 포함시킬 수 있다(이와 관계되는 논의들은 참고문헌 Hollerbach⁽⁴⁾에서 검토되었다).

참고문헌

1. Brockett, R. W. 1983. Robotic manipulators and the product of exponentials formula, Proc. Int. Symp. Math. Theory of Networks and Systems, Beer Sheba, Israel.
2. Curtis, M. L. 1984. Matrix Groups. New York:Springer-Verlag.
3. Hayati, S. 1983. Robot arm geometric parameter estimation. Proc. 22nd IEEE Int. Conf. Decision and Control.
4. Hollerbach, J. M. 1989. A Survey of kinematic calibration. In O, Khatib, J.J.Craig, and T.Lozano-Perez, eds., The Robotics Review I. Cambridge/MIT Press
5. Mooring, B. W., and Tang, G. R. 1984. An improved method for identifying the kinematic parameters in a six axis robot. Proc. Int. Comput. in Eng. Conf. Exhibit, Las Vegas, pp. 79~84.
6. Paden, B., and Sastry, S. S. 1988. Optimal kinematic design of 6R manipulators. Int. J. Robotics Research. Vol. 7.
7. Park, F. C., and Murray, A.P. 1993. Computational aspects of the product-of-exponentials formula for robot kinematics. to appear in IEEE Trans. Auto. Contr..
8. Park, F.C., Bobrow, J.E., and Murray, A.P. 1994. A Lie group formulation of robot dynamics. Proc. 3rd Int. Workshop on Advanced Motion Control, Berkeley, CA.
9. Park, F.C. 1991. The Optimal Kinematic Design of Mechanisms. Ph.D. Thesis, Harvard University.
10. Paul, R.P. 1982. Robot Manipulators:Mathematics, Programming and Control, Cambridge/MIT Press.
11. Stone, H. W. 1987. Kinematic Modeling, Identification, and Control of Robot Manipulators, Boston:Kluwer
12. Whitney, D. E., Lozinski, C. A., and Rourke, J. M. 1986. Industrial robot forward calibration method and results. J. Dynamic Systems, Meas., Control. vol. 108, pp. 1~8.
13. Zhuang, H., Roth, Z.S., and Hamano, F. 1992. A complete and parametrically continuous kinematic model for robot manipulators. IEEE Trans. Robotics Autom. vol. 8, pp. 451~463.