사각단면 프레임의 충돌해석과 Hourglass 제어

Crashworthiness Analysis of Rectangular Section Frame and Hourglass Control

김 헌 영, 강 신 유, 민 동 균
H. Y. Kim, S. Y. Kang, D. K. Min

김 헌 영
• 1962년 2월생
• 전산구조해석 및 금형설계
• 강원대학교 기계공학과

강 신 유
• 1959년 6월생
• 기계요소설계 및 충돌해석
• 강원대학교 정밀기계공학과

민 동 균
• 1961년 5월생
• 소성가공 및 금형설계
• 서울대학교 정밀기계설계공동연구소

1. 서 론

컴퓨터를 이용한 자동차 충돌해석은 국내외에서 컴퓨터 성능의 급속한 향상, 응용 소프트웨어의 발전과 더불어 활발히 진행되고 있다. 국내에서는 주로 자동차 회사들이 PAMCRASH, LS-DYNA 등과 같은 상용 프로그램을 도입하여 연구 및 설계에 활용하고 있다. 이러한 상용 프로그램들은 explicit 적분법과 이를 이용한 Belytschko-Tsay 셸 요소[1]와 Huges-Liu 셸 요소[2]를 사용하며, 계산 시간 등에서의 잇점 때문에 실제로는 Belytschko-Tsay 셸 요소가 많이 적용되고 있다. Belytschko-Tsay 셸 요소는 4절점 1적분점을 갖는 degenerated 타입의 셸 요소로 횡전단 응력을 계산하지 못하고,[3] patch test를 통과하지 못하는[4] 단점을 가지고 있으나, 비선형 구간에서의 수렴성이 좋으며 안정성이 보장되어 반복계산양을 줄일 수 있는 잇점이 있다. 일반적으로 1개 적분점을 갖는 사각형 유한요소는 소위 'hourglass 모드'가 발생하므로 이에 대한 제어가 필요하다.[5-9] Hourglass모드에 대한 제어는 모든 선형장(linear field)에 대해 직각으로 영향을 미치므로 선형장의 연속성이 손상될 가능성이 있음으로 해석할 때 주의하여야 한다.

본 연구에서는 차량충돌해석에 널리 사용되고 있는 Belytschko-Tsay 셸 요소를 정식화하고 이 요소에 대한 hourglass 제어기법들을 제시하고자 한다. S자형 사각단면 프레임 충돌해석시 hourglass 제어기법에 대하여 논하고, 이러한 제어가 해석의 결과에 미치는 영향에 관하여 알아보고자 한다. 또한 자동차 충돌해석을 할 경우 고려하여야 할 제반문제들 중 경계조건 및 초기결함(initial imperfection)에 대하여 사각단면 직선 프레임을 예로 하여 논하고자 한다.

2. 이 론

2.1 셸 요소 정식화

Belytschko-Tsay 셸요소는 비선형 수치계산의 효율성을 위하여 Hughes-Liu 셸요소의 대안으로 개발되었으며, 그런 효율성 때문에 셸요소 정식화에 널리 사용된다.[1] 이것은 요소 좌표계(element or co-rotational coordinate system)와 Cauchy 응력에 대응되는 속도 변형률(velocity strain, rate of deformation)을 기본으로 정식화된 것이다. 사각형 요소의 기준면은 4개의 절점의 위치에 의하여 정의되며, 요소의 변형에 따라 함께 변하는 요소좌표계는 그 절점 좌표값들로 표현된다. Fig.1의 요소좌표계를 구성하는 절차는 먼저, 사각형 요소의 두 대각선 벡터로 부터 단위 법선 벡터를 계산하고, 요소 좌표계의 x축은 절점 1과 2사이의 변에 가깝도록 결정한후, 나머지 단위 벡터는 앞에서 얻은 두 벡터의 곱으로부터 구해진다.

$$\hat{e}_3 = s_3 / |s_3|$$

$$s_3 = r_{31} \times r_{42}$$

$$|s_3| = \sqrt{(s_{31}^2 + s_{32}^2 + s_{33}^2)} \tag{1}$$

$$\hat{e}_1 = s_1 / |s_1|$$

$$s_1 = r_{21} (r_{21} \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3 \tag{2}$$

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 \tag{3}$$

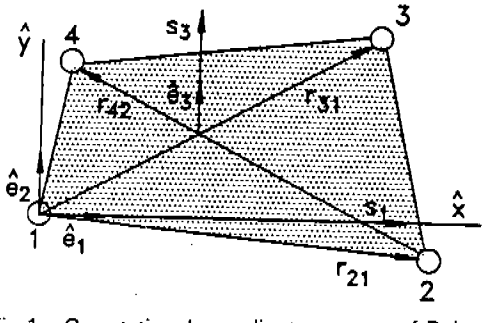


Fig.1 Co-rotational coordinate system of Belytschko-Tsay shell

윗 식에서 위 첨자 ^는 요소 좌표계임을 의미한다. Belytschko-Tsay 셸 사용에서 유의할 점은 요소 두께 방향의 재료의 회전과 요소좌표계의 e_3벡터의 회전 사이의 차이가 작아야 적용성이 보장된다는 것이다. 이는 out-of-plane 변형, 즉 변형률에 대한 규제이며, 강체 회전을 규제하는 것은 아니다.

$$|e_3 \cdot f - 1| < \delta \tag{4}$$

f는 셸 두께 방향의 단위 벡터이다. 대개의 응용에서 δ가 10^{-2} order 이하의 값을 갖는 것이 적합하다. 셸에 대한 Mindin 이론으로부터 셸 요소내의 어떤 점에서의 속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\upsilon = \upsilon^m - \hat{z} e_3 \times \theta \tag{5}$$

위식에서 υ^m은 기준면의 속도, θ는 각속도 벡터, $\hat{z}$는 셸 요소의 두께 방향을 따른 좌표값이다. 속도 변형률의 요소좌표계 성분은 다음과 같다.

$$\hat{d}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \hat{\upsilon}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{\upsilon}_j}{\partial \hat{x}_i}\right] \tag{6}$$

기준면 속도와 각속도를 bilinear 함수를 사용하여 절점 속도와 절점 각속도로 나타내면 (5)식과 (6)식으로부터 속도변형률이 절점 속도와 절점 각속도로 표현된다. 또한, 속도 변형률을 구성식에 대입하여 응력식을 얻고, 이것을 셸 두께 방향으로 적분하면 합력과 합모멘트를 얻는다.

$$\hat{f}_{\alpha\beta}^R = \int \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \, d\hat{z}$$

$$\hat{m}_{\alpha\beta}^R = \int \hat{z} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \, d\hat{z} \tag{7}$$

2.2 Hourglass 제어

요소의 변형을 한 점에서 평가하면 계산 시간의 단축과 전단 잠금(shear locking)문제를 해결하는 등의 장점이 있으나 그로 인해 요소가 어떤 형상으로 변형되는데 필요한 에너지가 '0'이 되는

변형모드가 발생할 수 있다. 이러한 모드를 기하학적 모드(kinematic mode) 혹은 '0'에너지 모드, Keystoning, hourglass 모드라 하며 1점 적분을 하는 경우에는 이에 대한 제어가 필수적이다. 일반적으로 hourglass 모드는 구조물의 응답보다 짧은 주기를 가지며, 통상 진동한다. 한편 구조물의 응답에 가까운 주기를 갖는 hourglass는 안정된 전체 변형 모드로 받아들여져야 한다. 원치 않는 hourglass 모드로의 변형을 제어하는 방법으로는 점성 감쇠(viscous damping)에 의한 것과 탄성 강성(elastic stiffness)에 의한 것이 있다. 이러한 방법에 의해 원치 않는 hourglass 모드 생성을 막을수 있는데, 이것이 전체 변형에 주는 효과는 무시할 만큼 작아야 한다. 셸 요소에서도 hourglass 제어가 필요한데, Belytschko-Tsay 셸의 경우 요소 수준의 계산시에 hourglass 응력을 물리적인 응력에 더해주는 방법이 쓰인다.[7]

셸 요소의 형상함수는 변형양상에 따라 다음과 같이 몇개의 기준벡타의 조합으로 나타낼 수 있다.[5]

$$\phi_I=\frac{1}{4}\sum_I+\frac{1}{2}\xi\Lambda_{1I}+\frac{1}{2}\eta\Lambda_{2I}+\xi\eta\Gamma_I \qquad (8)$$

(I=1, 2, 3, 4 : number of nodes)

위의 ϕ_I는 4절점 셸요소의 형상함수(shape function)이며, $\sum_I$, Λ_{1I}, Λ_{2I}, Γ_I는 단위사변형의 변형모드(displacement modes)를 나타낸다.(Fig.2) $\sum_I$는 강체운동(rigid body translation)을 나타내며, Λ_{1I}는 균일 수직변형률 모드(uniform normal strain mode)를, Λ_{2I}는 균일전단 변형률 모드(uniform shear strain mode)를, Γ_I는 Hourglass 모드를 나타낸다. 계의 Hourglass 속도 υ_{iI}^{HG}를 다음과 같이 정의한다.

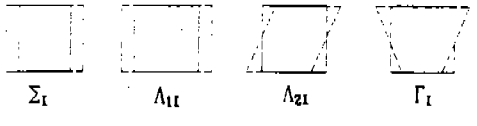


Fig.2 Displacement modes of quadrilateral

$$\upsilon_{iI}^{HG}=\upsilon_{iI}-\upsilon_{iI}^{LIN} \qquad (9)$$

이때 υ_{iI}^{HG}와 $\sum_I$, υ_{iI}^{HG}와 B_{jI}는 서로 직교하며, υ_{iI}^{HG}는 Γ_I의 선형조합으로 이루어진다.[5]

$$\sum_I \upsilon_{iI}^{HG}=0 \qquad (10)$$

$$B_{jI}\,\upsilon_{iI}^{HG}=0 \qquad (11)$$

$$\upsilon_{iI}^{HG}=\dot{q}_i\Gamma_I \qquad (12)$$

$\dot{q}_i$는 hourglass 모드 속도(hourglass generalized strain rate)로서, 다음과 같이 가정한다.

$$\dot{q}_i=\gamma_I\,\hat{\upsilon}_{iI}, \qquad \begin{matrix}\dot{q}_\alpha^B=\gamma_I\,\hat{\theta}_{\alpha I}\\ \dot{q}_3^B=\gamma_I\,\hat{\upsilon}_{zI}\\ \dot{q}_\alpha^M=\gamma_I\,\hat{\upsilon}_{\alpha I}\end{matrix} \qquad (13)$$

여기서 B는 굽힘, M은 평면을 나타내는 첨자이며, γ_I는 hourglass 형상벡터(shape vector)이다.

$$\gamma_I=\Gamma_I-\frac{1}{A}B_{iI}\,\hat{x}_{iJ}\,\Gamma_J \qquad (14)$$

hourglass 모드 속도 $\dot{q}_i$에 대응하는 hourglass 응력 Q_i는 점성과 탄성의 2가지 형태가 가능하며, 이를 구조물의 물리적 응력에 부가하여 hourglass 모드를 제어한다.

$$Q_i=\varepsilon C_{cr}\,\dot{q}_{ia}+\kappa\,K_{max}\,q_{ia} \qquad (15)$$

여기서 C_{cr}은 계의 임계 감쇠(critical damping)이며, K_{max}는 계의 최대 강성을 나타내며, ε과 κ는 각각 감쇠와 강성에 대한 상수값이다. 점성형과 탄성형의 hourglass 응력은 각각 식(16)과 같다. 대변형 문제의 경우 탄성형은 응력속도를 계산한 후, 다음단계의 hourglass 응력을 계산한다.

Hourglass 모드를 제어할 목적으로 $\hat{f}_{iI}^{HG}$를 도입하면, Q_i와 이에 대응하는 $\dot{q}_i$는 식(17)의 관계를 만족한다.

Viscous	$Q_\alpha^B = C_1 \dot{q}_\alpha^B$,	$C_1 = \frac{1}{2}\varepsilon\rho c\sqrt{A}\, l^2$
	$Q_3^B = C_2 \dot{q}_3^B$,	$C_2 = \varepsilon\rho c\sqrt{A}\, t$
	$Q_\alpha^M = C_3 \dot{q}_\alpha^M$,	$C_3 = \varepsilon\rho c\sqrt{A}\, t$
	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$	; sound speed
Stiffness	$Q_\alpha^B = C_1 \dot{q}_\alpha^B$,	$C_1 = \frac{1}{192}\kappa(Et^3 A)B_{\alpha I} B_{\alpha I}$
	$Q_3^B = C_2 \dot{q}_3^B$,	$C_2 = \frac{1}{12}\kappa(Gt^3)B_{\alpha I} B_{\alpha I}$
	$Q_\alpha^M = C_3 \dot{q}_\alpha^M$,	$C_3 = \frac{1}{8}\kappa(EtA)B_{\alpha I} B_{\alpha I}$
	$Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \dot{Q}$	

(16)

$$\hat{f}_{il}^{HG}\hat{\upsilon}_{il} = Q_i \dot{q}_i$$

$$= \hat{\upsilon}_{il} Q_i \gamma_I \qquad (17)$$

그러므로 hourglass 응력에 대응하는 절점력은

$$\hat{m}_{\alpha I}^H = \gamma_I Q_\alpha^B$$
$$\hat{f}_{il}^{HG} = Q_i \gamma_I,\ \hat{f}_{3I}^H = \gamma_I Q_3^B \qquad (18)$$
$$\hat{f}_{\alpha I}^H = \gamma_I Q_3^M$$

위식으로 주어지는 hourglass 절점력이 변형에 의한 절점력에 각각 더해진다.

3. S형 프레임의 충돌해석과 hourglass 제어

S형 프레임 모델은 단면의 상하 대칭성을 이용하여 한쪽 부재의 1/2만 모델링하였으며, 사용된 요소수는 440개, 절점수는 492개이다.(Fig.3) 10mm/ms의 속도로 강체벽에 충돌하여 30ms까지 해석을 수행하였다. Fig.4는 시간에 따른 프레임의 변형양상을 나타낸 것으로 t=20ms와 30ms에서 보이듯이 불안정한 변형모드가 급격히 발전됨을 알 수 있다. Fig.5는 점성제어와 탄성제어에 의한 시간 20ms에서의 프레임의 변형을 보인 것이다. 점성 제어의 경우, ε=0.001일 때 hourglas 모드가 프레임 전반에 발생하였으며, ε=0.01일 때는 불안정한 모드가 시작됨을 알 수 있다. 즉, 점성제

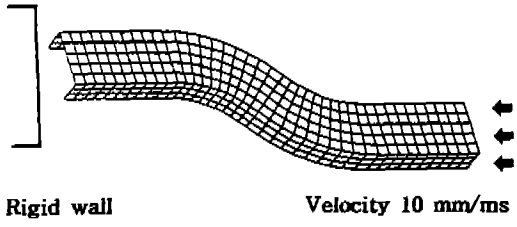


Fig.3 Finite element model of S type frame

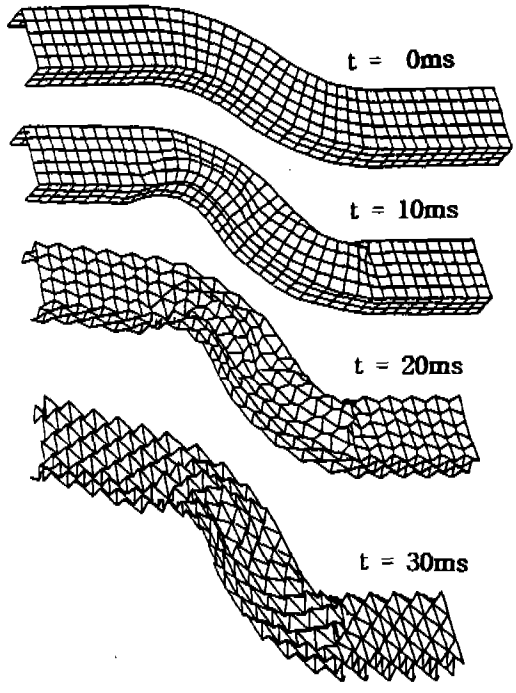


Fig.4 Deformed meshes without anti-hourglassing

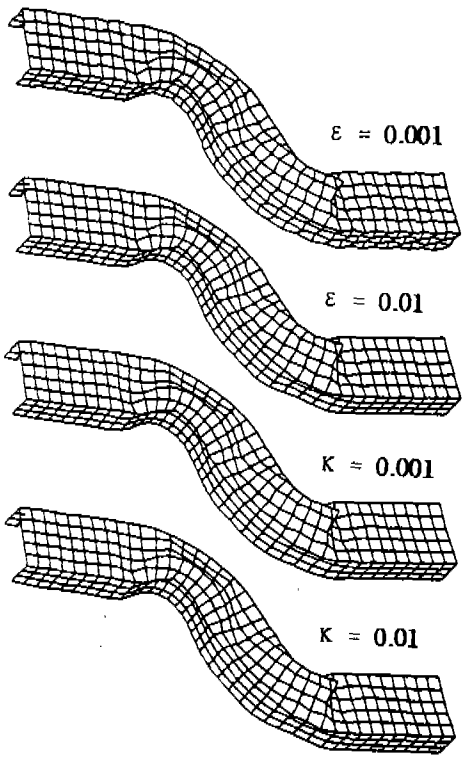


Fig.5 Deformed meshes with various anti-hourglassing

어는 단지 불안정한 변형모드를 늦게 발생하도록 할 뿐이지 변형을 근본적으로 안정되게할 수는 없다. Fig.5에서 $\kappa=0.001$의 탄성제어의 경우 점성제어와 비교할 때 안정된 반응을 보이며, 작은 계수를 사용하더라도 계를 안정되게 함을 알 수 있다.

Table 1은 제어상수에 대한 시간 20ms에서의 시간증분과 내부변형 에너지를 나타낸 것이다. Hourglass 저항력이 커짐에 따라 점성, 탄성제어 모두 시간증분이 커진다. Fig.6은 hourglass제어에 따른 hourglass에너지를 나타낸 것으로 hourglass 저항력을 크게할 수록 에너지가 크게된다. 일반적으로 hourglass에너지와 같은 인위적인 에너지가 전체 변형에 주는 효과는 무시할 만큼 작아야 한다. Fig.7은 $\kappa=0.1$일 때의 내부변형에너지 운동에너지, 운동에너지 및 hourglass에너지를 비교한 것으로 각각 1514, 380, 128kN · mm로서 hourglass 에너지는 내부에너지의 약 8.5%정도이다.

Fig.8은 점성제어시 제어상수 ε이 0.001, 0.01, 0.1일 때의 내부변형에너지를 비교한 것으로 상수값의 변화에 따른 에너지 변화가 거의 없음을 알 수 있다. Fig.9의 탄성제어의 경우는 κ가 0.1일 때 약 6%정도의 내부변형에너지가 증가하였다. 위의 결과로부터 탄성제어는 작은 제어상수값으로도 안정된 변형모드를 얻을 수 있으나, 식(16)에 나타나 있듯이 탄성 hourglass 저항력은 축적되며, 이는 전체계의 강성을 증가시킨다. 그러므로 점성제어를 사용할 경우 상수값의 선택은 매우 중요하다.

4. 사각단면 직선 프레임 충돌해석

4.1 좌굴 모드 해석

McNay[10]는 사각관 해석에 대해 DYNA3D를 이용하여 완전한 구조물에 초기결함을 설정하지 않고 해석하여 이를 실험과 비교하였으며, 소성힌지 발생위치 및 갯수가 차이가 있다고 하였다. 이는 DYNA3D와 같은 익스프리시트(explicit)프

Table 1 Time step and internal energies of various hourglass control

(unit : time μsec, energy kN mm)

Control type	No control	$\varepsilon=0.001$	$\varepsilon=0.01$	$\varepsilon=0.1$	$\kappa=0.001$	$\kappa=0.01$	$\kappa=0.1$
Time step	3.70	3.91	4.17	4.53	4.17	4.24	4.60
Internal energy	1,424	1,425	1,425	1,438	1,427	1,435	1,514

* Initial time 5.065μsec

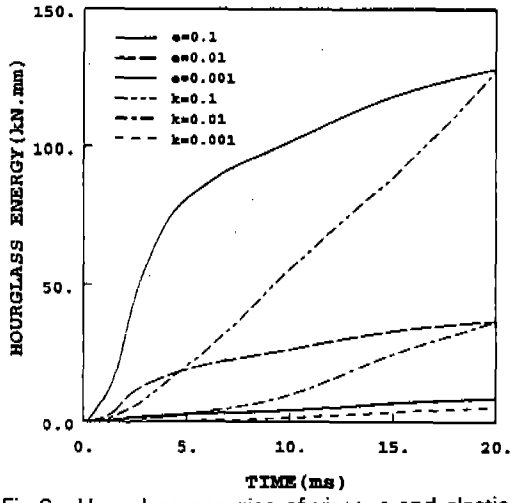


Fig.6 Hourglass energies of viscous and elastic hourglass control

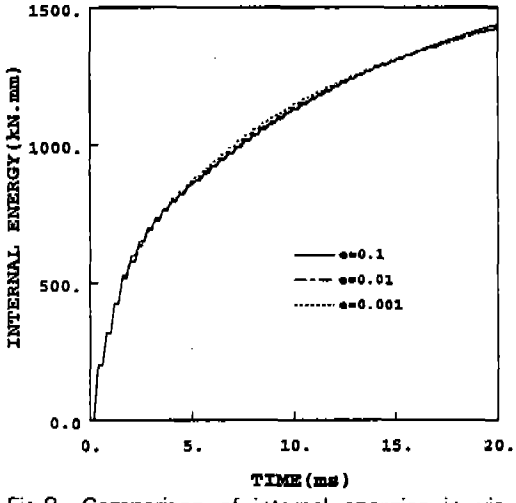


Fig.8 Comparison of internal energies in viscous hourglass control

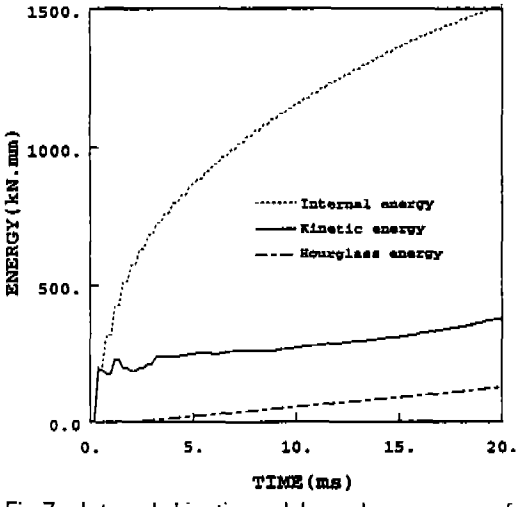


Fig.7 Internal, kinetic and hourglass energy of elastic hourglass control $\kappa=0.1$

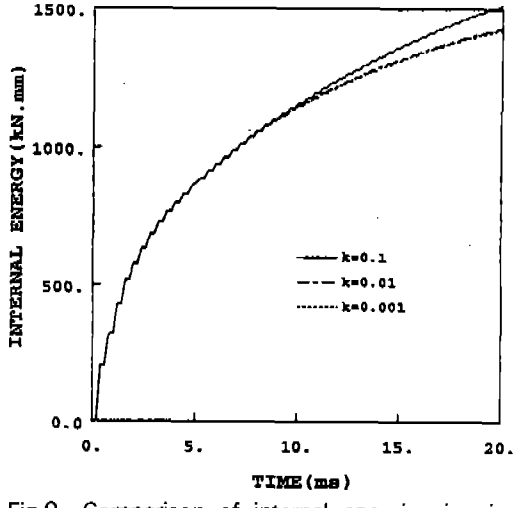
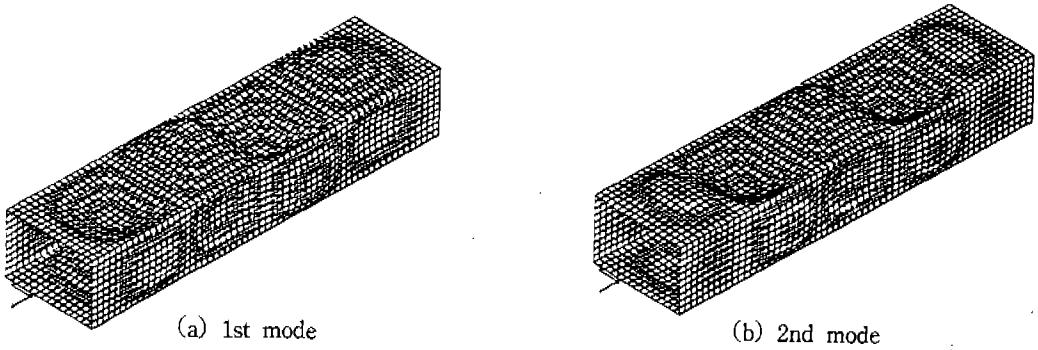
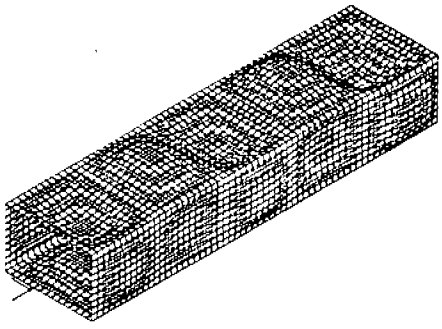


Fig.9 Comparison of internal energies in viscous hourglass control

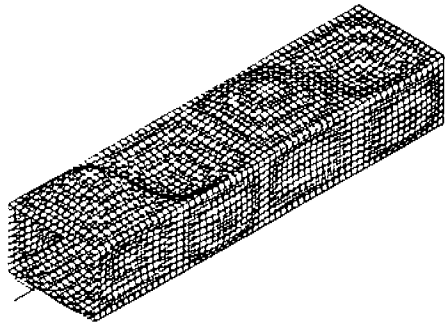


(a) 1st mode (b) 2nd mode

Fig.10 Buckling mode shape(fixed rotational boundary condition)



(a) 1st mode



(b) 2nd mode

Fig.11 Buckling mode shape(free rotational boundary condition)

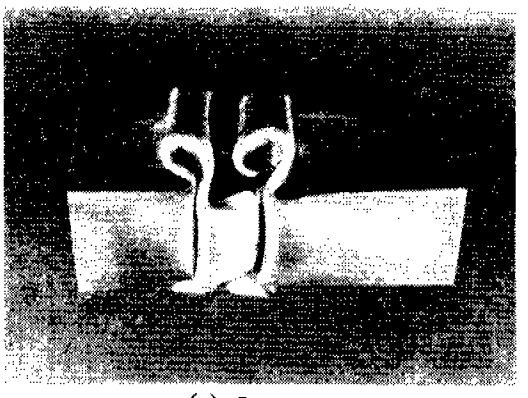
로그램의 수치적 오차에 기인하여 발생하는 것이다. 따라서, 본 연구에서는 임의의 위치에서 소성 힌지가 발생하는 것을 방지하기 위하여 탄성좌굴해석을 수행하고 이 결과를 이용하여 초기결함을 만들고자 한다. 양단의 경계조건은 I) McNay 경우와 같이 모델의 한 단은 고정단으로 하고 나머지는 하중단으로하여 하중단의 하중방향을 제외한 모든 자유도를 고정한 경우와 II) 변위경계조건은 McNay 경우와 같이 하고 회전경계조건은 모두 자유롭게 한 경우 2가지에 대하여 계산하여 그 결과를 분석한다.

Fig.10은 양단 경계조건에서 회전자유도를 구속한 전자의 경우에 대한 탄성좌굴해석을 수행한 결과로서, (a)는 1차 모드이며 (b)는 2차 모드이다. Fig.11은 양단의 회전을 자유롭게 한 후자의 경우로서 해석 결과 (a)는 1차 모드, (b)는 2차 모드이다.

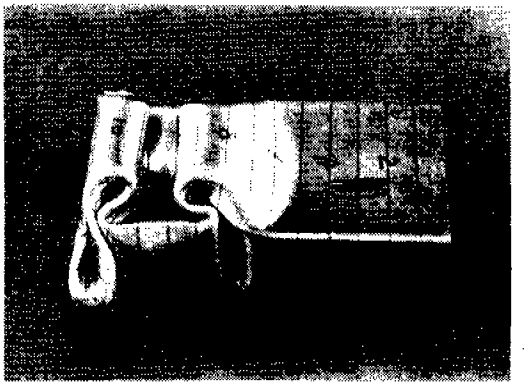
4.2 사각관 충돌해석

사각관 충돌실험은 준정적 실험이므로 가능한한 초기속도를 줄여 해석하였다. 초기속도는 1.5 m/sec, 충돌질량 8ton으로 하였으며, 해석 모델은 대칭성을 이용한 1/4모델이므로 대칭면은 경계조건으로 대칭조건을 부여하였고, 양끝의 경계조건중 변위경계조건은 한쪽끝은 고정시키고, 충돌질량이 있는 곳은 축방향변위가 있게 하였다. 회전경계조건은 탄성좌굴해석 경우와 같이 고정할 때와 자유롭게 하였을 때의 2가지 경계조건을 주었다. 붕괴해석은 회전경계조건이 다른 2가지 경우에 대하여 각 경우 1차, 2차 2가지 좌굴 모드를 초기 결함으로 하였다. Fig.10의 좌굴모드를 초기결함 형상으로 하고 회전 경계조건을 고정한 해석 결과는 Fig.13과 같다. Fig.13(a)는 1차 좌굴모드 형상을 이용하여 해석한 결과의 변형 모습이며 Fig.13(b)는 2차 좌굴모드를 이용한 것이다. 해석결과를 Fig.12의 실험결과와 비교하였을 때, Case 1과 유사한 변형양상을 보였으며, Case 2와는 다른 양상을 나타내었다. Fig.14는 Fig.11의 좌굴모드를 초기결함 형상으로 하고 회전 경계조건을 자유롭게한 해석결과이다. Fig.14(a)는 1차 좌굴모드를 초기 결함으로 하여 해석한 결과로써 실험결과인 Case 1과 비슷한 모습으로 2개의 소성힌지를 해석모델 길이방향의 중앙부근에 형성한 모습을 보여주고 있다. Fig.14(b)는 2차 좌굴모드를 초기결함으로 하여 해석한 것으로 Case 2의 실험결과와 유사한 변형 양상을 나타낸다. Fig.15는 초기결함을 설정하지 않고 해석한 결과로써 소성힌지 발생위치 및 소성힌지 갯수가 실험결과와 차이가 있었다.

해석결과중에서 회전경계조건을 구속하지 않았을 경우 실험결과와 변형된 모습이 잘 일치하여 이 해석결과와 실험결과를 변위·하중 선도에서 비교하였다. Fig.16(a)은 1차 좌굴 모드 형태를 가지고 변형하는 경우, 실험결과와 해석결과를 비교한 것으로 실험결과의 반력은 평균을 구하여 비교하였다. 1차 최대반력은 계간결과 69700N이며, 평균치는 51500N으로 계산되었다. 실험결과의 평균값은 변위에 대한 반력의 평균을 구한 것으로

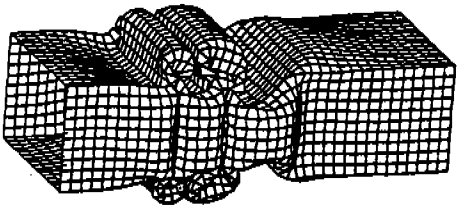


(a) Case 1

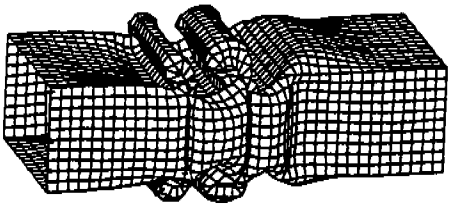


(b) Case 2

Fig.12 Deformed shapes from experiment

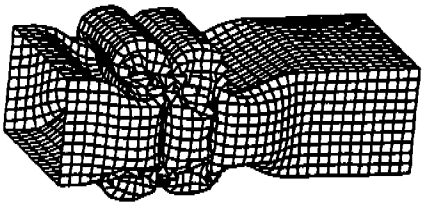


(a) 1st mode

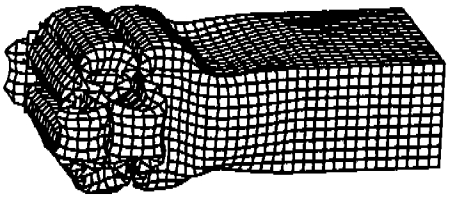


(b) 2nd mode

Fig.13 Deformed shapes from simulation with initial imperfection and fixed rotational boundary condition



(a) 1st mode



(b) 2nd mode

Fig.14 Deformed shapes from simulation with initial imperfection and free rotational boundary condition

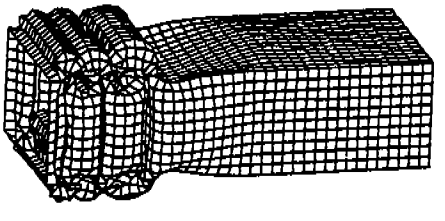
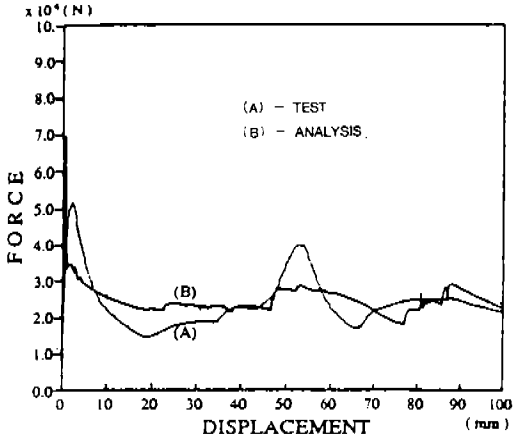
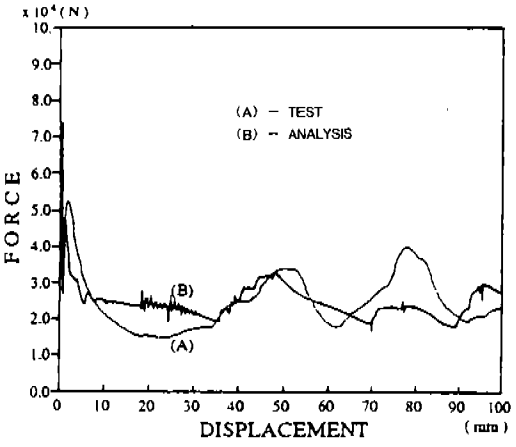


Fig.15 Deformed shapes from simulation without initial imperfection

각각의 최대반력에 비해 5000N 정도 낮게 계산되었다. 2차 최대하중이 발생하는 변위위치는 거의 일치하였으나 1차 최대하중과 반대로 계산값이 낮게 산출되었다. 실험에서는 Fig.12(a)와 같이 첫번째 소성힌지가 발생한 다음 일정거리만큼 지난 곳에 두번째 소성힌지가 발생하는 모습으로 관찰되었으나, 계산에서는 첫번째 소성힌지와 두번째 소성힌지사이에 오목한 형태의 소성힌지가 생겨 강성을 약하게 하기 때문이라고



(a) 1st mode



(b) 2nd mode

Fig.16 Displacement-reaction curves

판단되었다. Fig.16(b)는 2차 좌굴형상으로 변형한 경우 실험과 계산에서의 반력을 비교하였다. 계산에서의 최대반력은 74500N이며, 실험값의 최대반력평균은 52700N으로 계산되어 실험치가 계산치에 비하여 높게 산출되었으나, 2차 3차 최대하중이 발생되는 변위위치는 잘 일치하였다.

5. 결 론

1) 차량 충돌 해석에 널리 사용하고 있는 Belytschko-Tsay 쉘 요소 및 이에 대한 hourglass 제어방안을 정식하하였으며, 충돌해석 전용 프로그램에 도입하였다.
2) S자형 사각단면 프레임의 충돌해석시 점성과 탄성의 2가지형태의 hourglass 제어방안을 검증하였다. 안정된 변형모드를 얻기 위하여는 2가지 방법중 탄성제어가 효과적이나, 과다한 제어는 전체 계의 강성을 크게할 수 있다.
3) 동적거동해석 프로그램을 이용하여 사각관과 같은 완전한 형상의 구조물을 해석하고자 할 때 초기불완전형상을 해석 모델에 부여하여 해석하는 것이 타당하다.
4) 사각관 모델의 양단을 용접하지 않고 알루미늄판을 이용하여 막은 경우, 이에 대한 수치해석상 경계조건은 회전자유도를 자유롭게 한 것이 실험과 잘 일치함을 보였다.

참 고 문 헌

1. T.Belytschko, J.I.Lin and C.S.Tsay, "Explicit Algorithms for the Nonlinear Dynamics of Shells", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng'g, Vol.42, pp.225-251, 1984.
2. T.J.R.Hughes and W.K.Lin, "Nonlinear Finite Element Analysis of Shells", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng'g, Vol.26, pp.331-362, 1981.
3. T.Belytschko, B.L.Wong and H.Y.Chiang, Improvement in Low-order Shell Element for Explicit Transient Analysis", Analytical and Computational Models of Shell(edited by A.K. Noor), ASME, pp.383-398, 1989.
4. T.Belytschko, "On Computational Methods for Crashworthiness", Proc. of 7th Int. Conf. Vehicle Structural Mechanics, P-210, SAE No.880 893, pp.123-134, 1988.
5. D.P.Flanagan and T.Belytschko, "A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Othogonal Hourglass Control", IJNME Vol.17, pp.679-706. 1981.
6. T.Belytschko, C.S.Tsay and W.K.Liu, "A Stabilization Matrix for the Bilinear Mindlin Plate

Element", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.29, pp.313-327, 1981.

7. T.Belytschko and C.S.Tsay, "A Stabilization Procedure for The Quadrilateral Plate Element with One-Point Quadrature", IJNME, Vol.19, pp.405-419, 1983.
8. D.P.Flanagan and T.Belytschko, "Eigenvalues and Stable Time Steps for The Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral", Trans. of ASME J. of Applied Mechanics, Vol.51, pp.35-40, 1984.
9. J.C.Schulz, "Finite Element Hourglassing Control", IJNME, 21, pp.1039-1048, 1985.
10. G.H.McNay, Numerical Modeling of Tube Crush with Experimental Comparison", Proc. of 7th Int. Conf. on Vehicle Structural Mechanics, P-210, SAE, pp.123-134, 1988.