

안정상태 시물레이션의 다수측도 동시추정

Simultaneous Inference in Steady-State Simulation

방준식*, 김영휘**, 홍윤기***

Joon Sik Bang, Young Hui Kim, Yoon Gee Hong

Abstract

In many real-world simulation studies the several measures of performance are of interest simultaneously. There exist very limited number of studies that explain and suggest the methods or procedures of inferencing the system performances at the same time. This study presents a procedure for determining the number of simulation observations required to achieve the prespecified confidence level for several measures of system performance. Mean values are selected as the measures, for instance, expected ordering cost, expected holding cost, and expected shortage cost for a given period of time in the study of inventory problems. Basically, the batch means approach is applied and extended to develop an algorithm to carry out the procedure handling more than single parameter. The efficacy of the presented method is assessed through the experiments. The empirical results based on some stochastic systems such as queues and inventory problems show that the suggested method produces an excellent result in terms of the precision of estimated means and the number of observations required.

1. 서 론

대부분의 실제 시스템(real system)에서는 수행측도(measure of performance)가 단 한개에 그치지 않고 여러 개의 복수인 경우가 일반적이다. 지금까지 다수측도의 동시추정에 관한 시물레이션절차 및 결과분석에 대한 연구는 Seila[16], Adam[2] 그리고 Charnes[4] 등에서 찾아 볼

수 있다. Seila는 개념 및 예상되는 연구방법의 예를 제시하고 있으며 구체적 절차는 소개하지 않고 있으나 최근에 발표된 Charnes의 절차는 그 적용범위가 국한되어 있어서 적용에 어려움이 있다.

수행측도의 관측치간에 자기상관관계(autocorrelation)가 존재하는 안정상태 시물레이션의 연구에서 평균값과 같은 단일측도(single measure)의 결과분석방법으로는 Autore-

* 삼성데이터시스템(주)

** 고려대학교 산업공학과

*** 한성대학교 산업공학과

gressive 분석, Spectral 분석, Regenerative 접근, 독립시행 (Independent Replications), Batch 평균방법 등이 오래전부터 널리 이용되고 있다. Fishman[5]은 이와같은 방법들에 대한 상세한 설명과 함께 각 방법의 적용한계 및 문제점에 대해 언급하고 있으며 이를 간단하게 요약하면 다음과 같다.

Autoregressive 분석은 이 방법에 의해 추정된 샘플평균의 분산이 타당한지를 확인해야 하는 문제가 있고 분석자의 충분한 통계적 배경이 요구된다. Spectral 분석은 시계열분석방법에 익숙한 분석자에게도 부차적인 어려움을 주며, 기타 여러 확률과정에도 만족할 만한 결과를 제공할 수 있느냐하는 의문이 제시된다. Regenerative 접근방법은 시스템에서 regeneration 시점을 찾는 것이 용이하지 않고 또한 적용 가능한 시스템의 발견에도 제한이 따르는 단점이 있다.[6] Law[8]에 의하여 평가된 독립시행과 Batch 평균방법에 관한 분석에서는 Batch 평균방법이 독립시행방법보다 다음과 같은 몇가지 점에서 우수하다고 주장하고 있다.

만약 시물레이션 반복시행회수를 k , 그리고 각 시행에서 얻어지는 관측치의 수를 n 이라고 하면,

- 1) 독립시행방법으로 얻어진 점추정치는 대체로 편이(bias)를 갖는 단점이 있으며,
- 2) 독립시행방법에서 n 이 너무 작으면 k 가 증가함에 따라 신뢰구간이 참값을 포함할 확률(coverage probability)은 현저하게 감소하게 되고,
- 3) 독립시행방법은 1)번의 문제 때문에 점추정치의 편이를 해결하는 일련의 과정이 필요하다.

위에서 언급한 내용들을 근거로 Batch 평균방법과 비교해 볼때 Batch 평균방법이 효과적인 결과분석방법으로 제시되고 있음을 알 수 있게 된다. Adam[2]은 batch간의 자기상관관계를 줄이는 batch크기 결정과 신뢰수준을 확보하는 신뢰구간 결정에 대한 효과적인 절차를 제시하였다. 그는 자신의 절차를 이용한 다수측도 결과분석에 적용하는 것에 대하여 추후 연구과제로 언급하였다.

본 연구의 목적은 단 한번의 시물레이션 수행으로 다수측도의 참값들을 동시에 추정할 수 있는 절차를 개발하고, 이와 병행하여 출력의 결과분석방법을 제시하는데에 있다. 본 연구에서 추구하는 시물레이션 유형은 안정상태 하에서 수행측도의 참값이 존재하는 경우이며 연구의 범위는 안정상태 시물레이션에서 얻어지는 여러가지 측도의

안정상태 평균치(steady-state mean)를 동시에 추정하는 것이다. 본 연구에서 개발한 다수측도 동시추정방법은 단일측도 추정방법으로 제시된 Adam의 Batch 평균방법에 Bonferroni 부등식을 적용하여 축차적으로 시물레이션을 수행하는 절차를 체계적으로 정리하는 것이다.

결과분석방법의 타당성검토(validation)를 위하여 이미 해석해가 알려진 M/G/1 대기행렬시스템에 대하여 관심있는 몇개의 모수들을 선정한 후 시물레이션 결과를 해석해와 비교하는 일련의 과정을 살펴보기로 한다. 그리고 또한 이 방법을 (s,S) 재고관리시스템에 적용하여 시스템 출력의 서로 다른 측도들로서 재고관리시스템에서 거론되는 몇가지 평균치를 선정하여 이들을 동시에 추정하기로 한다.

우선 다수측도 동시추정을 위해 Bonferroni 부등식에 관하여 설명하고 이를 이용한 다수측도 동시 추정방법의 개념과 절차를 소개하고 이 연구에서 개발한 방법을 확인하기 위해 M/G/1 대기행렬시스템과 (s,S) 재고관리시스템에 적용하여 얻어진 자료를 분석하기로 한다.

2. 다수측도 동시추정

2.1 Bonferroni 부등식의 적용

독립인 n 개의 사건 A_1, A_2, \dots, A_n 에 대하여 i 번째 사건이 사실일 확률을 $P(A_i \text{ 사실}) = 1 - \alpha_i$, $i=1,2,3,\dots,n$, 이라고 하자. 그리고 n 개의 사건 중 적어도 하나의 사건이 거짓일 확률을 α_c 라고 하면 α_c 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \alpha_c &= P(\text{적어도 하나의 사건이 거짓}) \\ &= 1 - P(n\text{개의 사건이 모두 사실}) \\ &= 1 - P(A_1 \text{ 사실} \cap A_2 \text{ 사실} \cap \dots \cap A_n \text{ 사실}) \\ &= 1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i). \end{aligned}$$

그러나 사건들이 서로 독립이 아닌 경우에는 위의 표현식은 적용이 되지 않는다. 따라서, 이 경우에는 α_c 의 정확한 값을 구할 수 없으므로 상한값을 구하게 된다. 여기서 α_c 의 상한값을 결정해 주는 절차는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_i &= P(\text{적어도 하나의 사건이 거짓}) \\ &= P(A_1 \text{ 거짓} \cup A_2 \text{ 거짓} \cup \dots \cup A_n \text{ 거짓}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n P(A_i \text{ 거짓}) \end{aligned} \quad (1)$$

이다. 그리고 $P(A_i \text{ 거짓}) = \alpha_i, i = 1, \dots, n$, 이므로 식(1)은

$$\alpha_i \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (2)$$

이 된다. 이와같은 관계식은 다수측도의 동시신뢰구간을 구하고자 할 때 유용하게 적용되어 왔다. 만약 각 측도의 동시추정치에 대한 신뢰구간이 독립이 아니라면 모든 구간이 실제 평균치를 포함할 확률은 정확히 구할 수가 없다. 왜냐하면 여기서 사건들의 교호 확률(the probability of intersection)을 알 수 없기 때문이다. 하지만 이 확률의 하한치는 식(2)로부터 다음과 같은 부등식으로 유도될 수 있다.

$$1 - \alpha_i \geq 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

이는 다시

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_i &= P(n\text{개의 사건이 모두 사실}) \\ &= P(\text{모든 신뢰구간이 동시에 각각의 참값을 포함}) \\ &\geq 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \end{aligned}$$

와 같이 쓰여질 수 있다. 다시 말해서 $1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$ 는 동시신뢰구간의 하한치가 되며 위의 관계를 Bonferroni 부등식이라고 한다. 예를 들어, 추정하고자 하는 측도의 개수가 k 개라고 하자. k 가 작은 경우 신뢰수준을 적어도 $100(1-\alpha)\%$ 로 하기 위해서는 $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \alpha$ 가 되는 α_i 를 선정해야 한다. 이와같은 방법을 적용함에 있어서 야기되는 지적사항으로는 신뢰구간이 실제 기대하는 것 보다 더 커진다는 점이다. 따라서 이 효과를 줄이기 위해서는 더 많은 양의 관측치를 필요로 하므로 수행길이가 증가하게 된다. 이러한 이유 때문에 Law[13]는 다수측도의 가지수 k 를 10개 이내로 택할 것을 권고하고 있다.

2.2 다수측도 동시추정 방법

우선 본 연구에서 사용되는 기호 및 수식을 다음과 같이 표현하자.

n : 시뮬레이션 수행 길이

m : batch 크기

k : batch 수 ($k = n/m$)

관측치 : Y_1, Y_2, \dots, Y_n

$$\text{Grand mean : } \bar{Y} = (1/k) \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i$$

i 번째 batch의 평균

$$\bar{Y}_i = (1/m) \sum_{h=1}^m Y_{(i-1)m+h}, \quad i=1,2,\dots,k \quad (3)$$

$$\text{batch 평균의 표본 분산 : } R_{0,m}^2 = \left(\frac{1}{k-1}\right) \sum_{i=1}^k (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad (4)$$

batch 평균의 p^{th} lag 자기상관계수 :

$$\hat{\rho}_{p,Y} = \left(\frac{1}{k-1}\right) \sum_{i=1}^{k-p} (\bar{Y}_i - \bar{Y})(\bar{Y}_{i+p} - \bar{Y}) / R_{0,m}^2, \quad p=1,2,\dots,L$$

batch 평균의 p^{th} lag 자기상관계수의 표본 분산 :

$$\text{Var}(\hat{\rho}_{p,Y}) = \left(\frac{1}{k}\right) \left\{ 1 + 2 \sum_{v=1}^{p-1} \rho_{v,Y}^2 \right\} \quad (5)$$

상대정도(relative precision) : ϵ

위에서 식(5)는 Bartlett의 근사식을 나타낸 것이다. 시뮬레이션의 수행길이가 n 일때 batch 크기가 m 이면 batch 수 $k = \frac{n}{m}$ 이 된다. 한편 batch 평균간에 서로 독립관계가 성립되면 $\rho_p = 0 (p=1,2,\dots,L)$ 이 된다. 그러면 이때 최대로 가능한 lag의 값 L 은 얼마나 크게하여야 하는지를 결정하여야 한다. 만약 ρ_p 가 단조감소한다면, $\rho_p > \rho_{p+j}, j=1,2,\dots,L$ 의 관계가 성립 되고 이러한 경우에는 $p > 1$ 인 ρ_p 는 고려할 필요가 없게 된다. 그러나 시뮬레이션으로부터 얻어지는 수없이 많은 관측치들은 단조성을 갖지 않는다. 따라서 ρ_1 만을 가지고 batch 평균의 독립성을 보장할 수 없게 된다. Box & Jenkins[3]는 lag 1에서 L 까지의 자기상관계수가 0이라는 가설을 세우고 이를 축차적으로 검정하는

방법으로 다음과 같이 제시하고 있다. 만약

$$|\hat{\rho}_{p,y}| \leq Z_{\eta/2} (\hat{v}ar(\hat{\rho}_{p,y}))^{1/2}, p=1,2,\dots,L \quad (6)$$

이면 가설을 기각하지 않는다. 여기서, η 는 p 번째 자기상관계수 검정에 대한 유의수준이다. 만약

$\rho_{1,y} = \rho_{2,y} = \dots = \rho_{p-1,y} = 0$ 이면, 식(5)는 $Var(\hat{\rho}_{p,y}) = 1/k$ 이 된다. 표본자기상관계수도 상관관계가 존재하게 되어 가설검정을 위해서는 1절에서 설명한 Bonferroni 부등식을 적용한다. 귀무가설을 $H_0 : \rho_{1,y} = \rho_{2,y} = \dots = \rho_{L,y} = 0$ 이라고 하자. δ 를 L 개 사건에 대한 전체 유의수준이라고 하면 식(2)에 의해 $\delta < L\eta$ 이다. η 가 고정되고 L 이 증가하면 δ 도 증가한다. 즉, L 이 증가하면 자기상관계수 검정의 신뢰수준은 낮아지게 된다[2]. Box & Jenkins는 자기상관계수의 유용한 추정치를 얻기 위해서 L 은 batch 수의 25% 이내로 권장하고 있다. Geisler[7]는 L 이 batch 수의 8% 내지 10% 정도가 되는 것이 바람직하다고 하였다. 다수측도 동시추정을 위해서는 Bonferroni 부등식을 적용하여 η 를 조정하여야 한다. 예를 들어, 추정하려는 측도의 수가 3개일 경우에 p 번째 lag의 자기상관계수를 η 의 유의수준으로 검정하기 위해서는 각 측도가 동일하게 중요하다는 조건을 부여했을 때 유의수준이 $\eta/3$ 가 되어야 할 것이다.

이제는 다수측도 동시신뢰구간의 절반간격(Half-length of the Interval)이 $(1-\alpha)$ 신뢰수준을 만족하는 batch 수를 결정하는 문제가 남아있다. 상대오차를 상대정도(relative precision)라고 하고 이를 ϵ 라 하자. 상대정도란 신뢰구간 절반길이의 점추정치에 대한 비율을 말한다. $(1-\alpha)$ 의 신뢰수준으로

$$\left\{ t_{k-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{R}_{0,m}}{k}} \right\} / |\bar{Y}| \leq \epsilon \quad (7)$$

의 관계가 만족되어야 한다. 이는 다시

$$\hat{R}_{0,m} \leq k \left(\epsilon |\bar{Y}| / t_{\alpha/2, k-1} \right)^2 \quad (8)$$

와 같이 쓸 수 있게 된다.

추정하고자 하는 측도의 수가 3개일 경우 각 측도의 유의수준이 α 라면 식(7)에 대한 신뢰수준이 $(1-3\alpha)$ 가 된다. 따라서 동시신뢰구간의 유의수준이 α 가 되게 하기 위해서는 유의수준을 $\alpha/3$ 로 조정해 주어야 한다. 만약 $n = m^*$

k 만큼 수행을 추가로 실시하여 식(8)이 만족되면 수행을 멈추고 그렇지 않으면 batch 한개에 해당하는 m 개의 관측치를 추가하여 수행길이를 증가시킨다.

2.3 다수측도 동시추정 절차

Adam이 소개한 Implemented Blocking 방법을 응용하고 이미 언급한 Bonferroni 부등식을 적용한 다수측도 동시추정 절차를 간단히 소개하면 다음과 같다.

- 1) 초기 설정한 수행길이 n 만큼 시물레이션을 실시한다.
- 2) 변이기간(Transient Period)을 추정하여 이를 제거한다.
- 3) batch 크기(m)의 초기값 m' 을 설정한다. batch 평균의 정규성을 고려하여 m' 은 50 이상으로 한다.
- 4) batch 수 k 를 계산한다. $k = \lceil n/m \rceil$.
- 5) $k < K$ (정규성을 보장하기 위해 설정하는 batch 수의 하한치)이면 n 을 증가시키고 (본 연구에서는 $n = n + (K - k) \cdot m$) 증가된 길이만큼 수행한 후 절차 6으로 진행한다. $k \geq K$ 이면 바로 절차 6으로 간다.

6) 식(3)과 (4)를 이용하여 각 측도에 대해 \bar{Y}_i 와 $\hat{R}_{0,m}$ 을 계산한다.

7) 각 측도에 대해 lag 1에서 L 까지의 표본 자기상관계수($\hat{\rho}_{p,y}$)를 계산하고 식(6)을 확인한다. 이때 조건을 만족하지 않으면 $m = 2m$ 으로 하고 절차 4로 간다. 그렇지 않으면 다음 절차로 간다.

8) 각 측도에 대해 식(8)을 확인한다. 조건을 만족하면 절차 11로, 그렇지 않으면 다음 절차로 간다.

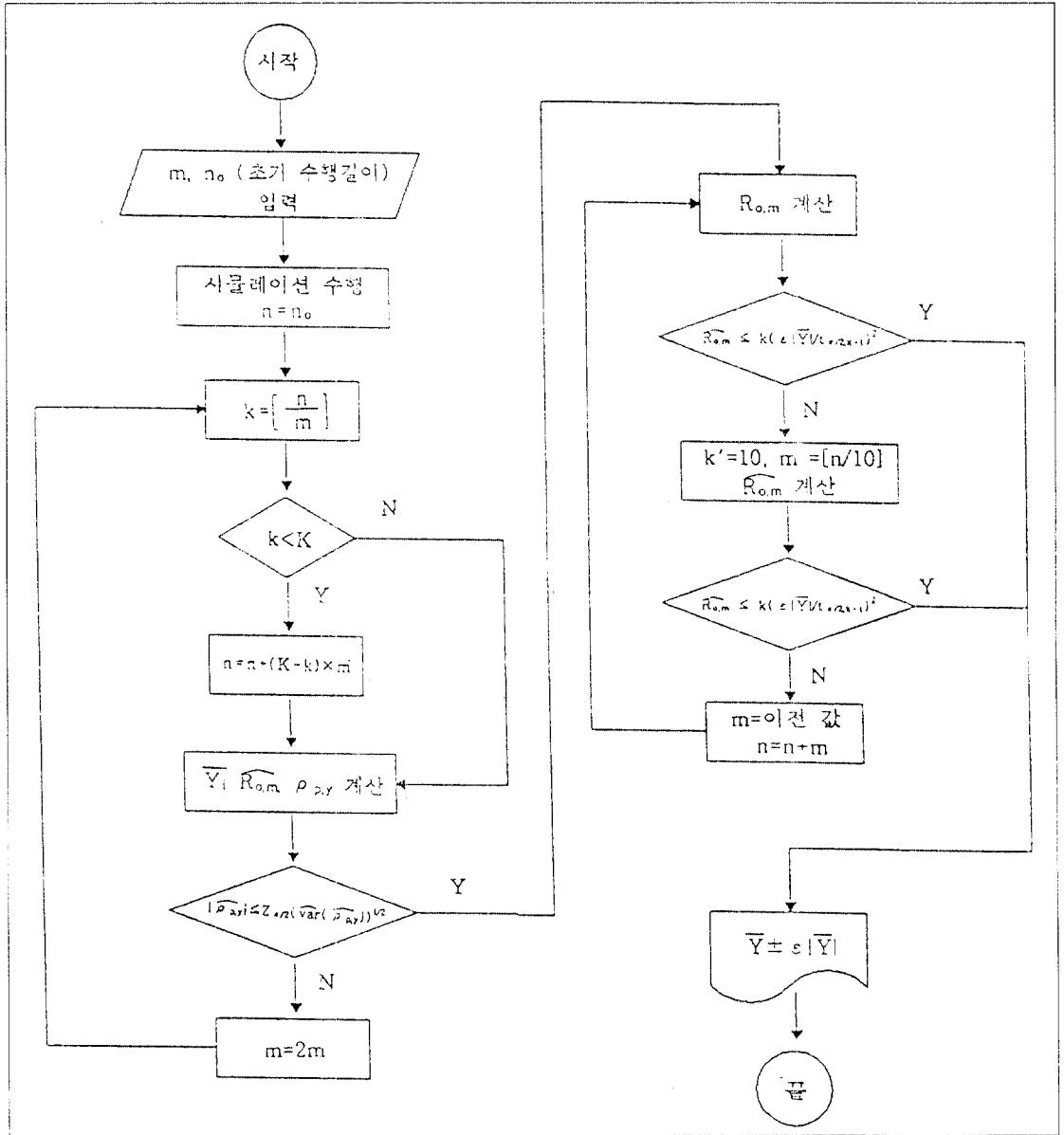
9) $k = 10$ 으로 하고 이에 따른 새로운 batch 크기($m = n/10$)를 구한다. 그리고 나서 새로운 $\hat{R}_{0,m}$ 을 계산한다.

10) 각 측도에 대해 식(8)을 확인한다. 조건을 만족하면 다음 절차로, 그렇지 않으면 batch 크기를 이전 값으로 변경하고 batch 크기만큼 추가로 시물레이션을 수행한 후 절차 8로 간다.

11) 시물레이션 끝. 모든 절차를 마쳤을때 평균값에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\bar{Y} \pm \epsilon |\bar{Y}|.$$

위에서 제시된 시물레이션 절차를 그림으로 나타낸 흐름도는 <그림 1>과 같다.



(그림 1) 다수측도 동시추정절차 흐름도

3. 결과 및 비교

3.1 실험조건

본 연구에서 제시한 방법의 타당성검토를 위하여 해석해가 존재하는 M/G/1 대기행렬시스템과 (s,S) 재고관리시

스템에 대하여 본 절차를 적용하고자 한다. 본 실험에서 추정하고자 하는 M/G/1 대기행렬시스템의 수행측도는 평균대기시간(mean delay in queue ; Wq), 평균대기수(mean number in queue ; Lq) 그리고 평균가동률(mean utilization factor ; ρ) 이다. (s,S) 재고관리시스템에서 수행측도는 평균주문비용(mean ordering cost), 평균유지비용(mean hold-

ing cost), 평균품질비용(mean shortage cost)으로 한다. 자기상관계수에 대한 검정에서 사용되는 유의수준 η 는 0.15로 하며 동시신뢰구간을 위한 유의수준 α 는 0.10으로 고정시켰다. 추정하고자 하는 측도가 세가지이므로 실제의 각 측도에 대한 유의수준은 $\eta/3 = 0.5, \alpha/3 = 0.0333$ 이다.

각각의 실험에 대하여 반복시행(replication)으로 50회 반복 실시하였으며, 각 시행의 독립성을 고려하여 난수의 발생은 매 시행마다 다른 초기값(seed)을 부여했다. 초기수행에서 나타나는 초기편이(initial bias)를 제거하기 위해 pilot run을 실시하였다. 일시상태(transient state)에서 안정상태로 진입할때까지의 수행길이의 결정에 관한 연구들을 참고로 하였으며 본 연구에서는 충분한 관찰과 검토를 통하여 수행길이를 결정하였다. 단일측도보다 다수측도에서 초기편이가 결과에 미치는 영향은 더 민감하기 때문에 삭제 길이가 대체로 크게 나타났다.

프로그래밍 언어로써 C언어를 사용했으며 난수발생기(random number generator)는 Fishman과 Moore에 의하여 제시된 Linear Congruential방법을 이용했다. 시물레이션수행을 위한 컴퓨터로써 IBM RS/6000을 사용하였다.

앞에서 제시한 실험 조건을 반영하는 M/G/1 대기행렬시스템의 실험순서는 다음의 <표 1>과 <표 2>와 같다. 표안의 번호는 실험번호이다.

<표 1> 상대정도가 0.075인 M/G/1 실험순서

batch 수	가동률	M/M/1	M/E ₁ /1	M/U/1
K=25	$\rho = 0.8$	1	6	11
	$\rho = 0.5$	2	7	12
K=50	$\rho = 0.8$	3	8	13
	$\rho = 0.9$	4	9	14
K=80	$\rho = 0.8$	5	10	15

(s,S) 재고관리시스템의 실험순서는 다음의 <표 3>과 같다.

3.2 실험결과 및 분석

1) 실험결과

M/G/1 대기행렬시스템의 실험결과를 <표 4>에서 <표 5>까지 나타내었다. 해석하는 Pollaczek-Khintchine 공식으

<표 2> 상대정도가 0.15인 M/G/1 실험순서

batch 수	가동률	M/M/1	M/E ₁ /1	M/U/1
K=25	$\rho = 0.8$	16	21	26
K=50	$\rho = 0.5$	17	22	27
	$\rho = 0.8$	18	23	28
	$\rho = 0.9$	19	24	29
K=80	$\rho = 0.8$	20	25	30

<표 3> (s,S) 재고관리 실험순서

배치 수	(20,40)		(20,60)		(20,80)	
	$\gamma=0.075$	$\gamma=0.15$	$\gamma=0.075$	$\gamma=0.15$	$\gamma=0.075$	$\gamma=0.15$
K=10	1	2	7	8	13	14
K=20	3	4	9	10	15	16
K=40	5	6	11	12	17	18

로부터 구한 것이며 추정치는 본 연구에서 제시한 절차를 따라 시물레이션을 50회 시행하여 얻어진 수행 측도치의 평균값이다. 실험결과표에서 coverage rate은 50회의 시물레이션 반복시행으로 얻어진 수행측도의 구간추정치가 참값을 포함한 비율을 나타내며 신뢰구간은 유의수준 α 로

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

와 같이 구해진다.

(20,60) 재고관리시스템의 실험결과를 <표 6>에서 <표 11>과 같다. 이 실험에서는 초기편이의 영향을 알아보기 위하여 초기 수행길이를 1,000, 800, 600으로하여 각각 다르게 실시하였다.

2) 결과분석

본 연구에서 제시한 다수측도 동시추정절차 및 결과분석방법은 M/G/1 대기행렬시스템과 (s,S) 재고관리시스템에서 대체로 신뢰수준이 90% 내외인 구간추정치를 나타내었다. 이것은 실험조건에서 동시신뢰구간을 위한 유의수준 α 를 0.10으로 고정시킨 것에 대하여 예상되는 결과를 나타내었다고 본다.

M/G/1 시스템에서 19, 24번 실험이 $(1-\alpha)$ 의 신뢰수준을 만족하지 못했으나 나머지 실험에서는 비교적 높은 포함확률을 나타냈다. 19번 실험과 24번 실험은 가동률이

〈표 4〉 상대정도가 0.075인 M/G/1 실험결과

실험 No.	Coverage Rate*	수행길이*
1	0.82(0.91,0.73)	65872 (72602,59142)
2	0.80(0.89,0.71)	60068 (66957,53179)
3	0.84(0.93,0.75)	99768(119565,79971)
4	0.80(0.89,0.71)	172348(191684,153012)
5	0.82(0.91,0.73)	80563(101537,59589)
6	0.90(0.97,0.83)	80440 (86645,74235)
7	0.88(0.96,0.80)	66808 (81377,52239)
8	0.84(0.93,0.75)	76784 (81369,72199)
9	0.86(0.94,0.78)	142292(154311,130273)
10	0.82(0.91,0.73)	102290(130473,74107)
11	0.78(0.88,0.68)	71248 (75694,66802)
12	0.86(0.94,0.78)	62300 (72827,51773)
13	0.86(0.94,0.78)	72104 (76697,67511)
14	0.86(0.94,0.78)	142588(154404,130772)
15	0.90(0.97,0.83)	75488 (85465,65511)

* 점추정치(90% 신뢰 구간)

〈표 5〉 상대정도가 0.15인 M/G/1 실험결과

실험 No.	Coverage Rate*	수행길이*
16	0.88(0.96,0.80)	51688 (54386,48990)
17	0.98(1.00,0.95)	49812 (55626,43998)
18	0.94(1.00,0.88)	55440 (60524,50356)
19	0.82(0.91,0.73)	86304 (95470,77137)
20	0.92(0.98,0.86)	61082 (77382,44782)
21	0.94(1.00,0.88)	46112 (48748,43476)
22	0.94(1.00,0.88)	50346 (57437,43255)
23	0.94(1.00,0.88)	50404 (53439,47369)
24	0.87(0.95,0.79)	88698(106932,70464)
25	0.98(1.00,0.95)	82902(106347,59457)
26	0.96(1.00,0.91)	44624 (45991,43257)
27	1.00(1.00,1.00)	46116 (49656,42576)
28	0.96(1.00,0.91)	51040 (55135,46945)
29	0.94(1.00,0.88)	86228 (89257,83199)
30	0.98(1.00,0.95)	64263 (76003,52523)

* 점추정치(90% 신뢰 구간)

〈표 6〉 상대정도 0.075, 초기 수행길이 1,000인 (20,60) Inventory 실험결과

실험 No.	Coverage Rate*	수행길이*
7-1	0.94(0.99,0.88)	1874(2127,1621)
9-1	0.92(0.98,0.86)	2023(2515,1531)
11-1	0.98(1.00,0.95)	3065(4109,2021)

* 점추정치(90% 신뢰 구간)

〈표 7〉 상대정도 0.15, 초기 수행길이 1,000인 (20,60) Inventory 실험결과

실험 No.	3Coverage Rate*	수행길이*
8-1	1.00(1.00,1.00)	1272(1426,1118)
10-1	1.00(1.00,1.00)	1220(1371,1069)
12-1	0.98(1.00,0.95)	2160(2877,1443)

* 점추정치(90% 신뢰 구간)

〈표 8〉 상대정도 0.075, 초기 수행길이 800인 (20,60) Inventory 실험결과

실험 No.	Coverage Rate*	수행길이*
7-2	0.90(0.97,0.83)	1630(1764,1496)
9-2	0.92(0.98,0.86)	1781(2000,1562)
11-2	0.96(1.00,0.91)	2531(3375,1687)

* 점추정치(90% 신뢰 구간)

〈표 9〉 상대정도 0.15, 초기 수행길이 800인 (20,60) Inventory 실험결과

실험 No.	Coverage Rate*	수행길이*
8-2	0.98(1.00,0.95)	928 (988,868)
10-2	1.00(1.00,1.00)	1076 (1204,948)
12-2	1.00(1.00,1.00)	2464(3386,1542)

* 점추정치(90% 신뢰 구간)

0.9로서 Law & Carson의 연구에서도 나타났듯이 그 포함 확률이 낮았다. Fishman[5]의 연구에서도 가동률이 높아 질수록 포함확률이 낮아지는 경향을 찾아 볼 수 있다. (s, S) 재고관리시스템에서 포함확률은 대부분 양호하였고 수

〈표 10〉 상대정도 0.075, 초기 수행길이 600인 (20,60) Inventory 실험결과

실험 No.	Coverage Rate*	수행길이*
7-3	0.90(0.97,0.83)	1621(1748,1494)
9-3	0.80(0.89,0.71)	1470(1603,1337)
11-3	0.78(0.88,0.68)	1594(1760,1428)

* 점추정치(90% 신뢰 구간)

〈표 11〉 상대정도 0.15, 초기 수행길이 600인 (20,60) Inventory 실험결과

실험 No.	Coverage Rate*	수행길이*
8-3	0.96(1.00,0.91)	692 (733,650)
10-3	0.96(1.00,0.91)	934(1109,759)
12-3	0.98(1.00,0.95)	1650(2298,1002)

* 점추정치(90% 신뢰 구간)

행길이는 M/G/1 보다 훨씬 작았다. 이것은 재고관리시스템이 대기행렬시스템보다 더 빨리 안정상태로 수렴하기 때문이다. 9-3, 11-3번 실험의 포함확률이 $(1-\alpha)$ 의 신뢰수준을 만족하지 못했으나 나머지 실험은 M/G/1 시스템보다 좋은 포함확률을 나타냈다. 9-3, 11-3번 실험은 초기 수행길이가 짧고 상대정도도 작기 때문에 포함확률이 낮은 것으로 나타났다. 9번과 10번 실험에 대한 실험조건 중 초기재고수준을 60에서 20으로 변화시켰을 때의 포함확률과 수행길이는 변경전의 값과 거의 유사했다. 이것은 시스템이 안정상태에 도달하게 되면 수행속도치는 초기조건과 독립이 되기 때문이다. 평균수요간격(mean interdemand time)을 0.20 또는 0.05 개월로 변화시켜 본 실험의 포함확률 역시 $(1-\alpha)$ 의 신뢰수준을 잘 만족하는 것으로 나타났다.

결과분석을 위해 고려되는 기준요소들은 신뢰구간이 참값을 포함하는 확률(coverage probability)과 상대정도(ϵ) 그리고 수행길이(n)와 batch 수의 하한치(K)이다. 실험결과에 대하여 항목별로 분석하면 다음과 같다.

(1) 상대정도와 포함확률의 관계:

M/G/1 대기행렬 시스템에서 가동률이 0.5, 0.8일 때 상대정도가 크면 포함확률도 높다. 그것은 상대정도가 크면 신뢰구간의 폭도 넓어지기 때문이다. 하지만 가동률이 0.9

일 때에는 이러한 현상이 나타나지 않았다. 또한 (s,S) 재고관리시스템에서도 상대정도가 0.075일때 보다 0.15일때 포함확률이 높았다.

(2) 상대정도와 수행길이의 관계:

상대정도와 수행길이는 가동률과 관계없이 반비례 관계를 갖는다. 상대정도가 크면 신뢰구간의 상대적인 반간격이 커지므로 식(8)을 쉽게 만족하게 되어 수행길이가 크게 증가하지 않게 된다. 재고관리시스템도 정책과 관계없이 이러한 경향을 볼 수 있다.

(3) 상대정도 고정시 K와 수행 길이의 관계:

상대정도가 고정되고 batch 수의 하한값 K가 증가하면 수행길이는 증가한다. K가 증가하면 그만큼 자기상관관계는 커지게 되고 이를 줄이기 위해서 batch의 크기는 커져야 한다. batch의 크기가 커지면 batch 수는 작아지는데 batch 수의 하한치보다는 커야하므로 더 많은 수행길이를 요구하게 되는 것이다.

(4) M/G/1 대기행렬시스템에서 상대정도가 고정되고 가동률이 커지면 포함확률은 낮아 진다.

(5) (s,S) 재고관리시스템에서 초기 수행길이와 포함확률과의 관계: (20,60) 재고관리 정책에서 초기수행길이가 작을수록 포함확률은 약간 작아졌다. 초기수행길이가 작으면 안정상태에 도달하기 이전의 편이를 갖는 상태에서 결과치들이 수집되기 때문에 점추정치가 편이를 갖게되어 포함확률은 작아지게 되는 것이다.

이상과 같은 결과를 토대로 본 연구에서 제시한 다수측도 동시추정에 관한 방법이 M/G/1 대기행렬 시스템과 (s,S) 재고관리시스템에서 만족스럽게 적용되고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

지금까지 Batch 평균방법과 Bonferroni 부등식을 이용하여 다수측도 동시추정을 위한 절차와 방법에 대하여 연구해 보았다. 본 연구에서 제시한 방법이 M/G/1 대기행렬 시스템과 (s,S) 재고관리 시스템에서 만족스럽게 적용됨을 알 수 있다. M/G/1 시스템의 안정상태 수행속도의 추정치는 배치수를 40내지 60으로 정하는 것이 $(1-\alpha)$ 의 신뢰수준을 만족하면서 수행길이를 적절하게 결정해 준다. (s,S) 재고관리 시스템은 비교적 안정상태로 빨리 수렴하기 때문에 초기수행길이를 M/G/1 시스템처럼 크게 설정해

줄 필요가 없으며 배치수는 20내지 30으로 택하는 것이 바람직하다.

상대정도는 신뢰구간의 간격과 수행길이의 관계를 고려하여 설정해 주어야 한다. 신뢰구간의 폭이 넓더라도 높은 포함확률을 원한다면 상대정도를 0.15로 하고, 수행길이가 길어지더라도 정확한 추정치를 얻고자 한다면 상대정도를 0.075 이하의 값으로 설정해주면 만족한 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다.

본 연구에서 제안한 다수측도 동시추정방법은 독립시행방법과 비교했을 때 coverage probability와 신뢰구간 절반 간격의 측면에서 훨씬 우월함을 알 수 있었다. 또한 독립시행방법은 동시추정을 위하여 동일한 실험을 여러번 반복하는 불편함이 초래되는 점도 감안하여야 한다.

다수측도 동시추정방법에서는 초기수행에서 발생하는 편이를 완벽하게 줄여 주어야하기 때문에 초기 수행시 단일측도 추정방법보다 더 많은 자료를 삭제해 주어야 한다. 하지만 다수측도 동시추정을 위해 시뮬레이션을 일회만 수행하면 되므로 불필요한 반복시행으로 야기되는 낭비를 없애주기 때문에 전체적으로는 수행길이가 현저하게 줄어들게 된다.

앞으로의 연구과제는 이 연구에서 소개된 방법을 이용하여 기타 확률과정을 따르는 여러 시스템에 적용해 보는 것이며, 중첩 Batch 평균방법, 가중치 Batch 평균방법등을 이용하여 다양한 다수측도 동시추정방법을 제시하는것을 비롯하여 평균치의 추정뿐만 아니라 분산이나 비율(percentile)과 같은 다른 측도들의 추정을 위한 방법에도 관심을 갖는 것이 바람직하다.

참고문헌

- [1] 홍윤기, "시뮬레이션 출력비 추정량의 통계적 분석," 한국시뮬레이션학회 논문지, 제3권, 제1호, pp. 17-28, 1994.
- [2] Adam, N. R., "Achieving a Confidence Interval for Parameters Estimated by Simulation," Management Sci., Vol. 29, 1983, pp. 856-866.
- [3] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M., *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970.
- [4] Charnes, J. M., "Multivariate Autoregressive Techniques for Constructing Confidence Regions on the Mean Vector," Management Sci., Vol. 39, No. 9, Sep. 1993, pp. 1112-1129.
- [5] Fishman, G. S., *Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1973.
- [6] Fishman, G. S., "Grouping Observations in Digital Simulation," Management Sci., Vol. 24, No. 5, Jan. 1978, pp. 510-521.
- [7] Geisler, M.A., "The Size of Simulation Samples Required to Compute Certain Inventory Characteristics with Stated Precision and Confidence," Management Science, Vol. 10, No. 2, 1964.
- [8] Law, A. M., "Confidence Intervals in Discrete Event Simulation: A Comparison of Replication and Batch Means," Naval Res. Logistics Quart., Vol. 24, No.4, Dec. 1977, pp. 667-678.
- [9] Law, A. M., "Statistical Analysis of the Output Data," Operations Res., 31., 1983, pp. 983-1029.
- [10] Law, A. M., "Confidence Intervals for Steady-State Simulations, II: A Survey of Fixed Sample Size Procedures," Operations Res., 32., 1984, pp.1221-1239.
- [11] Law, A. M. and Carson, J. S., "A Sequential Procedure for Determining the Length of a Steady-State Simulation," Oper. Res., Vol. 27, No. 5, Sep - Oct. 1979, pp. 1011-1025.
- [12] Law, A. M. and Kelton, W. D., "Confidence Intervals for Steady-State Simulations, II: A Survey of Sequential Procedures," Management Sci., 28., 1982, pp. 550-562.
- [13] Law, A. M., and Kelton, W. D., *Simulation Modeling & Analysis*, 2nd Ed., McGRAW-HILL International Editions, 1991, pp. 522-581.
- [14] Mehdi D. A., "Confidence interval Estimation of the Steady-State Mean Value of A Simulation Output Process," Department of Industrial and Systems Eng., Univ. of Southern California, California, U.S.A., 1986.
- [15] Schmeiser, M. K., "Batch Size Effects in the Anaysis of Simulation Output," Oper. Res. May - Jun. 1982, pp. 556-568.
- [16] Seila, A. F., "Multivariate Simulation Output Analysis"

American Journal of Math. & Management Sci., Vol. 4, NOS. 3&4, 1984, pp. 313-334.

[17] Welch, P. D., "The Statistical Analysis of Simulation

Results," in The Computer Performance Modeling Handbook, S. S. Lavenberg, ed., Academic Press, New York, 1983, pp. 268-328.

● 저자소개 ●



방준식

1991년 고려대학교 공과대학 산업공학과 (공학사)

1993년 고려대학교 대학원 산업공학과 (공학석사)

1993년-현재 삼성 데이터시스템 연구원

관심분야 : 시뮬레이션, 화상회의 시스템



김영휘

1960년 서울대학교 공과대학 전기공학과 (공학사)

1967년 Oklahoma State Univ. 산업공학과 (공학석사)

1970년 Virginia Polytech. 산업공학과 (공학박사)

1970-현재 고려대학교 산업공학과 교수

관심분야 : 신뢰도 공학, 품질관리, OR



홍윤기

1980년 고려대학교 공과대학 산업공학과 (공학사)

1985년 Univ. of Southern California 산업공학과 (OR 석사)

1989년 Univ. of Southern California 산업공학과 (공학박사)

1989년-1991년 California State Univ., Northridge 경영과학과 조교수

1991년-현재 한성대학교 이공대학 산업공학과 조교수

관심분야 : Simulation Output Analysis, Wargame Simulation, Stochastic Combat Analysis