

〈論 文〉

매개변수가진에 종속되는 현의 횡방향 진동을 이용한 종방향 진동의 추정

Estimation of Longitudinal Vibration Using Transverse Vibration of a String Subject to Parametric Oscillation

김도균* · 김광준**

Kim Do-Gyun and Kim Kwang-Joon

(1994년 5월 27일 접수; 1994년 6월 27일 심사완료)

ABSTRACT

Periodic longitudinal vibrations of a video and audio tape and the like used for transducing pictures and sounds may be induced by self-excited vibrations which are caused by frictions against the heads and guides, and their eccentricity, noncircularity or irregularity. It is important to analyze the longitudinal vibration of a tape because it causes distortions of a reproduced signal. It is difficult to measure directly the longitudinal vibration. In this paper a method estimating longitudinal vibration using impulse responses in the transverse direction is presented. And, the parameters' boundary domain where the transverse and longitudinal vibration can be decoupled is introduced. In the domain where the both vibrations are decoupled, analytic methods using frequency characteristics and transient responses of the transverse vibration, respectively, are presented. The time domain method predicted more exactly the instantaneous phase of the longitudinal vibration than frequency domain method did.

기 호 설 명

- $F(X, T), f(x, t)$: 가진 충격력
- V, v : 횡방향 변형변위
- U, u : 종방향 변형변위
- Γ, γ : 횡방향 감쇠계수
- Δ, δ : 종방향 감쇠계수
- θ : 장력비
- X_0, χ_0 : 초기 신장량
- X_a, χ_a : 동적 변화량
- R_0 : 정적 장력
- R_a : 동적 장력
- ε_0 : 초기 종방향 변형률

1. 서 론

문명의 이기인 비디오나 오디오는 카메라류와는 달리 움직이는 영상이나 시간적으로 변화하는 음성에 촛점을 둔 동적인 감각을 전달하는 기기로서, 인간의 상실되어 소멸되어가는 감각을 보완하여 재생시켜 준다는 커다란 장점에도 불구하고, 기기자체의 문제점 — 비디오의 화질의 떨림이나, 오디오의 음질의 변형 — 으로 실제 영상이나, 음질보다는 다소 떨어지는 감각만을 전달 한다. 그 이유는 이들 영상이나 음질 전달 장치는 현으로 모델화 할 수 있는 얇은 자기 테이프를 이용하여 시간에 따라 연속적으로 변화하는 영상이나 음질을 기록하고 재생하는데, 테이프와 기록헤드(recording head)는 고밀도 기록(high density recording)을 위하여 되도록 가까이

*대우 중공업 주식회사
**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

접촉하게 된다. 따라서, 이때 발생하는 미끄럼 접촉이 종방향 진동을 야기시키고, 결과적으로 헤드와 테이프의 접촉면에 마모를 가속화시켜 성능을 저하시키며, 기록 및 재생 신호의 변형을 유발시킨다. 또한, 로울러나 가이드의 편심률(eccentricity)과 비진원도(noncircularity) 및 표면의 불균일성과 테이프 표면의 불균일성(irregularity)도 중요한 변형의 요인이 된다.

그런데, 이와는 달리 벨트구동계에 있어서는 정확한 동력전달을 목적으로 하는데, 일반적으로 횡방향 진동이나 비틀림 진동이 종방향 진동보다 훨씬 크다. 따라서, 지금까지 발표되어온 논문들은 대부분 횡방향이나 비틀림 진동만을 고려하여 운동을 해석하고 이들을 감소시키는 방향으로 제어해 왔다^(1,6~8).

그러나, 자기테이프 구동하는 계에서는 정밀한 신호 전달을 목적으로 하고, 비디오 레코더인 경우 종방향 기록 방식으로 작동하는 나선형 주사법(helical scan)을 사용하는 것에서도 예로서 알 수 있듯이, 횡방향이나 비틀림 진동뿐만 아니라 종방향 진동도 신호 변조에 중요한 요인이 됨을 인식 할 수 있다^(9,10).

본 논문에서는 이러한 계를 적절히 모델화한, 매개 변수가진에 종속되는 현의 횡방향충격응답을 이용한 종방향진동을 추정하는 방법을 제시하고자 한다. 또한, 실험을 통하여 이론의 타당성을 검증하려고 한다.

2. 현의 연성된 횡방향 진동에 대한 이론적 해석

2.1 연성된 운동방정식(Coupled Equation)에서 횡방향 충격응답과 종방향 진동 변위의 유도

시스템의 불완전 운전에 의해 발생하게 되는 매개 변수가진만에 의하여 발생한 진동의 경우, 가진주파수가 횡방향 고유진동수의 2배의 정수배에서만 불안정 영역에 포함되어 진동진폭이 증가하지만, 일반적으로는 진폭이 작아 해석이 어렵다. 따라서 이러한 난점을 해결하기 위해 현(string)의 한부분에 충격력을 가진하여 모든 가진주파수에서 충분한 진동응답을 얻을 수 있게 설정할 수 있다. 또한, 실제의 자기테이프는 일정한 속도로 구동되지만 해석의 편의를 위해 고정시키고, 테이프를 지지하는 많은 부분들—헤드, 편치 로울러, 캡스턴(capstan), 가이드, 아이들러(idler)—을 간략화하여 우 끝단의 하나의 가이드만 고려하였다.

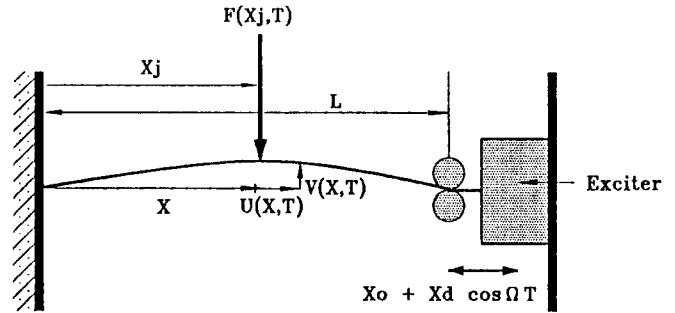


Fig. 1 Schematic diagram of the string model with parametric drive

(1) 운동 방정식

현 구동계의 이론적인 모델은 Fig. 1과 같이 일단이 고정되고 타단은 주기적인 매개변수가진으로 주어지며, 현 사이의 임의의 한점에서는 집중 충격력을 가진하였다.

이 계의 모형화를 위하여 다음과 같은 가정을 하였다.

- 1) 길이에 따르는 장력의 변화는 무시한다. 즉, 장력은 시간만의 함수로 가정한다.
- 2) 재료는 충분히 유연하여 굽힘에 의한 강성은 무시한다. 즉, 현으로 모델화 한다. ($EI \approx 0$)
- 3) 현의 스펠 길이에 비하여 횡 및 종방향 변위를 충분히 작다고 가정한다.
- 4) 횡방향 변위가 종방향 변위에 비해 훨씬 차원이 큰 경우만 생각한다. ($v \gg u$)
- 5) 로울러와 현의 마찰은 무시한다.
- 6) 중력에 의한 효과는 무시한다.
- 7) 구동시 현은 일정한 선밀도를 유지한다.

위와 같은 가정하에, 감쇠항을 무시한, 현을 따라 구동되는 계의 운동방정식은 해밀턴의 원리(Hamilton's Principle)을 이용하여 다음과 같이 유도하였다⁽²⁾.

먼저, Fig. 1에서 변형률과 진동 변위의 관계식은 가정 4)와 2)에 따라서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_{,xx} = U_{,x} + \frac{V_{,x}^2}{2} + \frac{R(T)}{EA} \quad (1)$$

따라서, 탄성 변형에너지(elastic strain energy)는 다음과 같이 나타낸다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \epsilon_{,xx}^2 dA dx \quad (2a)$$

또한, 운동에너지(kinetic energy)는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(U_{,t}^2 + V_{,t}^2) dX \quad (2b)$$

따라서, 해밀턴의 원리(Hamilton's Principle)인 $\delta H = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0$ 로부터 다음과 같은 운동을 지배하는 운동방정식을 유도할 수 있다⁽²⁾.

$$m \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} - EA \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) - \frac{3}{2} EA \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 - R(T) \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = F(X, T) \quad (3)$$

$$m \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} - EA \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = EA \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \quad (4)$$

또한 경계조건은 다음과 같다.

$$\left[EA \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 - R(T) \right] \delta U \Big|_0^L = 0 \quad (5a)$$

$$\left[EA \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^3 + R(T) \frac{\partial V}{\partial X} \right] \delta V \Big|_0^L = 0 \quad (5b)$$

여기에서 현에 걸리는 장력 $R(T)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R(T) = R_0 + R_a \cos(\Omega T) \quad (6)$$

$R_0 = \frac{EA}{L} X_0$ 는 초기 신장(X_0)에 의한 정적 장력 성분이고, $R_a = \frac{EA}{L} X_a$ 는 구동가진에 의한 동적 장력 성분으로 구동계의 불완전성에 의해 발생하는 항이며, Ω 는 매개변수 가진주파수이다. 이러한 장력의 식은 탄성한도(elastic limit)내에서 유효하며, 또한 길이에 따른 장력의 변화는 무시하였다.

(2) 선형화(linearization)와 무차원화

식 (3)과 식 (4)는 종방향과 횡방향 진동이 연성(coupling)되어 나타나는 식으로 이자체 만으로는 해석의 난점이 있다. 앞의 가정 3)과 4)에 따라서 현의 횡방향 및 종방향 변형에 대한 복원력이 관성력 및 장력에 대한 복원력과 외부 가진력에 비해 작다고 가정하여 $U_{,x} \ll 1$, $U_{,xx} \ll 1$ 이며, $V_{,xx} (V_{,x})^2 \ll 1$ 이라고 설정한다. 그리고, 이론적 결과를 실험적 결과와 일치시키기 위하여 해석의 편의상 점성감쇠항을 첨가하고 무차원 변수를 도입하여 정리하면 수정된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial v}{\partial t} - (1 + \theta \cos \omega t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (8)$$

그리고, $X=0$ 에서는 고정단이고, $X=L$ 에서는 횡방향 진동만 억제됨으로 정리된 경계조건은 다음과 같다.

$$v(0, t) = v(L, t) = 0 \quad (9a, b)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (9c)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=L} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=L} + \chi_0 + \chi_a \cos \omega t = P(t) \quad (9d)$$

위의 식 (9d)에서 $-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=L}$ 는 로울러로 지지되는 끝단에서 현의 횡방향 변형에 의하여 종방향 변형률에 영향을 주는 항이다.

여기에서 무차원 매개변수는 다음과 같이 정의하였다.

$$x = \frac{X}{L}, v = \frac{V}{L}, u = \frac{U}{L}, t = \frac{T}{\sqrt{mL^2/R_0}},$$

$$f(x, t) = \frac{L}{R_0} F(X, T),$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{\sqrt{mR_0/L^2}}, \delta = \frac{\Delta}{\sqrt{mR_0/L^2}}, \omega = \frac{\Omega}{\sqrt{R_0/mL^2}},$$

$$\theta = \frac{R_a}{R_0} = \frac{X_a}{X_0}, \epsilon_0 = \frac{R_0}{EA} = \frac{X_0}{L}, \chi_0 = \frac{X_0}{L}, \chi_a = \frac{X_a}{L} \quad (10)$$

여기에서 ϵ_0 는 초기장력에 의한 종방향 변형률이고, θ 는 초기장력과 동적장력의 비인 장력변화비(tension fluctuation ratio)이다.

(3) 횡방향 충격응답에 의한 종진동의 변수분리를 통한 해석

횡방향 충격응답을 식 (7)에서 유도하여 여기에서 유도된 응답을 식 (8)에 대입하여 종방향 진동변위를 유도하는 절차로 진행하기로 하자. 그러면, 식 (7)에서 충격력이 벨트에 가해질때 횡방향 충격응답의 근사해는 변수분리에 의한 확장원리(Expansion Theorem)를 적용하여 구한다. 그중에서 공간함수는 정적장력만 벨트에 작용하는 경우의 질량 정규화 고유함수(mass normalized eigenfunction)를 이용하여 구하고, 시간함수인 $\xi_n(t)$ 는 감쇠항, 정적장력에 의해 결정되는 고유진동수와 관련된항, 그리고 가변장력에 의해 결정되는 주기함수로 분리하여 플로케이론(Floquet Theory)과 순간주파수의 개념을 도입하여 해석하고, 그중 가진충격력 $f(t)$ 를 초기조건으로 대치하면 $x=x_j$ 에 충격력이 가해지고, $x=1$ 에서 $x_0 + x_a \cos \omega t$ 의 매개변수가진이 주어질 때의 횡방향 충

격응답은 다음과 같이 구할 수 있다⁽³⁾.

$$\begin{aligned}
 v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \xi_n(t) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(n\pi x) [\xi_n \exp\{a_{n0}t \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} e^{jk\omega t} + b_{nk} e^{-jk\omega t})\} + \overline{\xi_n} \exp\{\overline{a_{n0}t} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{b_{nk}} e^{jk\omega t} + \overline{a_{nk}} e^{-jk\omega t})\}] \quad (11)
 \end{aligned}$$

여기에서 윗첨자 $\overline{\quad}$ 는 각 매개변수의 켈레복소수를 의미한다.

이제 식 (11)에서 구한 횡방향 충격응답을 식 (8)에 대입해서 종방향 진동변위를 구하기로 하자. 이때 식 (8)은 편미분 2차 비선형 비동차 방정식으로 볼 수 있고, 또 초기조건 식 (9c), (9d)도 종방향 변위 $u(x, t)$ 를 동차 경계조건을 갖는 $u'(x, t)$ 와 비동차 경계조건식의 항의 합으로 설정하면 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$u(x, t) = u'(x, t) + h(x)P(t) \quad (12)$$

여기에서 $u'(x, t)$ 에 대한 동차 경계조건을 적용하면

$$u'(0, t) = -h(0)P(t) \quad (\rightarrow 0) \quad (13a)$$

$$\left[\frac{\partial u'}{\partial x} \right]_{x=1} = P(t) - \left[\frac{dh(x)}{dx} \right]_{x=1} P(t) \quad (\rightarrow 0) \quad (13b)$$

이때 $h(x)$ 는 식 (13a)와 식 (13b)을 동시에 만족시키는 임의의 함수이면 되므로

$$h(x) = x \quad (14)$$

로 임의로 선택한다.

따라서 $u'(x, t)$ 는 일단자지가 타단자유의 경계조건을 가지게 되므로 역시 변수분리를 통하여 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u'(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) T_n(t) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) T_n(t) \quad (15)
 \end{aligned}$$

결과적으로 종방향 진동변위 $u(x, t)$ 는 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= u'(x, t) + h(x)p(t) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) T_n(t) \\
 &\quad + x \left[\chi_0 + \chi_a \cos(\omega t) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=1} \right] \quad (16)
 \end{aligned}$$

여기에서, 종방향 진동변위의 우변 첫번째항은 동차 경계조건을 갖는 횡방향 진동에 의한 영향을 나타내는 항이고, 두번째 항은 비동차 경계조건식에 의한 항이다.

따라서, 횡방향 변위 $v(x, t)$ 에 대한 정적 장력으로부터 구해지는 횡방향 정적 감쇠고유진동수 $\Omega_{v,nd}$ 와 종방향 변위 $u(x, t)$ 에 대한 종방향 정적 감쇠고유진동수 $\Omega_{u,nd}$ 는 다음과 같다.

$$\Omega_{v,nd} = \sqrt{(n\pi)^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \sqrt{\frac{R_0}{mL^2}} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{u,nd} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{\epsilon_0} - \delta^2} \sqrt{\frac{R_0}{mL^2}} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{mL^2} \sqrt{(2n-1)^2 \pi^2 EA - \delta^2 R_0}} \quad (18)
 \end{aligned}$$

위의 식에서 알 수 있듯이 $\Omega_{v,nd}$ 는 R_0 에 직접적으로 의존하나, $\Omega_{u,nd}$ 는 일반적으로 감쇠가 아주 작으므로 R_0 에는 무관한 재료의 고유한 물성치에 의해 결정되는 값을 알 수 있다.

2.2 횡 및 종방향 진동의 상호 분리해석을 위한 모의실험

식 (16)의 임의 시간과 공간에서의 종방향 변위를 나타내는 식은 일반적으로 종방향 변위에 횡방향 변위가 우변의 첫번째 무한함으로 주어진 항과 마지막 2차 미분항에 의하여 연성되어져서 나타나게 됨을 알 수 있다.

그러나, 이렇게 종변위에 횡변위가 연성되는 영역에서는 해석 — 횡변위로 부터 종변위의 추정 — 의 난점을 수반하게 되므로 적절한 방법으로 횡방향 변위를 종방향 변위에서 분리시킬 필요가 있다. 따라서, 종변위를 횡변위와 분리시켜서 매개변수가진주파수를 가지며 종방향으로 길이에 따르는 선형적인 변위의 증가성을 부여하면 다음과 같이 모델화 되어진다.

$$u(x, t) = x[\chi_0 + \chi_a \cos(\omega t)] \quad (19)$$

식 (16)과 횡변위에서 분리된 종변위식인 식 (19)로부터 다음의 방정식을 얻는다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) T_n(t) - \frac{2}{x} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=1} = 0 \quad (20)$$

위의 식 (20)은 횡방향 변위로부터 얻어지는 방정식으로 $T_n(t)$ 가 $x=1$ 에서의 비동차 경계조건식의 미분항들로 된 식의 2차 적분으로 주어지므로 계수

비교법으로부터 방정식의 해를 구하는 것에는 많은 노력을 요하게 된다.

그런데 식 (20)이 유효한 것은 횡방향 변위로부터 분리된 식 (19)로 종방향 변위가 주어진다는 전제조건이 있을 때이므로 종방향 변위를 횡방향 변위에서 분리시킬수 있는 한계범위를 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin\left(\frac{2n-1}{2} \pi x\right) T_u(t) - \frac{2}{x} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=1}}{x [X_0 + X_d \cos(\omega t)]} \right| \ll 1 \quad (21)$$

즉, 종방향 변위가 매개변수가진만에 의하여 발생하는 항(분리항)에 비하여 횡방향 변위의 영향을 고려한 항(연성항)이 무시될 수 있을때, 비로소 이러한 변수의 선택 영역에서 종방향 변위는 횡방향 변위로부터 완전 분리된 매개변수가진만의 항으로 나타낼 수 있다.

식 (21)의 한계영역을 나타내는 그림이 Fig. 2에서 묘사되어 있다. (a)는 $\frac{X_0}{L}$ 가 0.00034일때로서 이 값은 비디오 테이프의 평균치인 0.0004와도 유사한 값이다. 식 (21)의 분자항인 횡방향 변위의 영향을 고려한 항은 가진충격력과 직접적인 관계가 있어서 결국 식 (21)의 조건을 만족시키기 위하여서는 가진충격력을 감소시켜 횡변위를 줄여서 결국 분자항을 감소시켜야 한다. 그러므로, 그림에서 가진충격력(f_0)의 상한치가 감소하는 영역에서는 식 (21)의 분자항이 증가하므로 이를 감소시켜줄 필요가 있음을 의미한다. 이러한 사실을 염두에 두면 (a)에서는 횡 및 종변위를 분리시켜서 해석할 수 있는 가진충격력의 상한치가 매개변수가진주파수 및 장력비의 함수임을 알 수 있고, 매개변수가진주파수(ω)와 장력비($\frac{X_d}{X_0}$)가 증가할수록 가진충격력(f_0)의 상한치가 감소함으로써 이러한 영역에서는 종방향 변위에 횡방향 변위가 연성되어져서 나타남을 의미하며, 결국 매개변수가진주파수(ω)와 장력비($\frac{X_d}{X_0}$)의 일정한도 내에서만 횡 및 종변위를 분리시켜 해석할 수 있음을 알 수 있다. 또한, (b)의 그림은 가진충격력(f_0)이 1.0×10^{-4} 일 때를 기준으로 한 것으로 이 값은 매개변수가진주파수와 장력비의 넓은 영역—그림(a)에서 평평한 면의 영역을 제외한 변수의 영역—의 값에서 종방향 진동을 횡방향 진동에서 분리시켜주는 충격력으로 설정하였다. 그림에서 보듯이 $\frac{X_0}{L}$ 가 2.0×10^{-4}

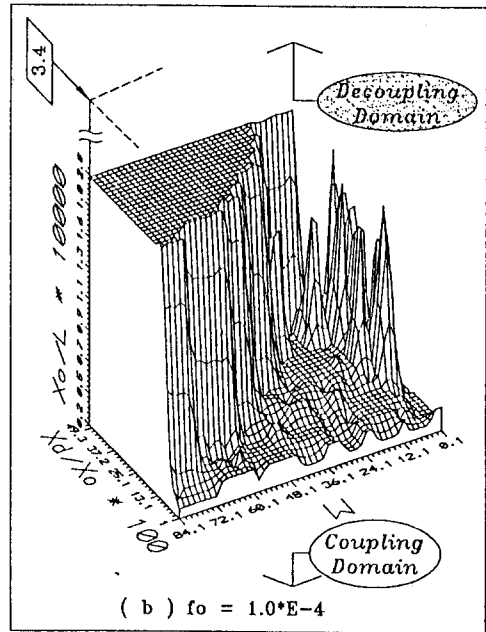
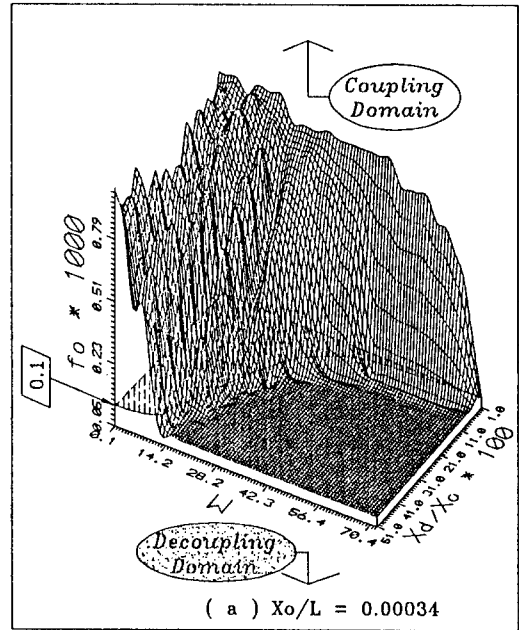


Fig. 2 The boundary domain indicating the coupling of a transverse and longitudinal response(decoupling occurs in lower surface of (a) and in upper surface of (b).)

으로 높게 나타나는 영역이 (a)의 평평한 바닥면에 해당하는 횡방향과 종방향의 연성되는 영역으로 이러한 영역을 제외한 변수의 영역에서는 실제 비디오 테이프의 구동시 $\frac{X_0}{L}$ 의 평균값인 4.0×10^{-4} 에 비하여 $\frac{X_0}{L}$ 의 하한치가 4.0×10^{-5} 으로 훨씬 낮기 때문에 종

방향 진동을 횡방향에서 분리 해석할 수가 있다. 그리고, 이러한 분리 해석이 가능한 영역에서는 $\frac{X_0}{L}$ 의 하한치가 매개변수가진주파수와 장력비에 거의 무관한 상수로 주어짐을 알 수 있다. 즉, 시스템이 결정되고 테이프의 길이가 정해지면 횡 및 종방향을 분리 해석하기 위한 초기신장량의 하한치(X_0)는 결정된다. 여기에서 매개변수가진주파수가 2π , 4π 에서의 피크성분은 횡방향 진동의 공진에 의한 영향으로 추측된다.

2.3 비디오 테이프의 횡 및 종방향 진동간의 상호연성(coupling) 해석

비디오 테이프는 정확한 영상신호의 기록 및 재생을 목적으로 하는 전달 매개체로서 그 특수한 기록 및 재생방식에 의하여 구동시 발생하는 횡방향 진동뿐만 아니라 그와 함께 자기가진(self-excitation) 및 제작상의 문제로 수반되는 종방향 진동도 그 진동진폭이 횡방향 진동에 비하여 상대적으로 미소함에도 불구하고 정확한 해석의 필요성이 언급되었다.

실제로 비디오 테이프는 캡스틴(capstan) 및 핀치롤러(pinch roller)에 의하여 정속으로 구동되면서 헤드드럼(head drum)에 의하여 화상 신호를 기록 및 재생한다. 따라서, 헤드드럼과 테이프의 분기선으로부터 캡스틴까지의 거리를 구동거리 L^* 이라 정하고 식 (21)과 Fig. 2을 참조하면 비디오 테이프를 현으로 적절히 모델화한 경우 횡 및 종방향 진동간의 상호 분리해석이 가능한 변수의 영역을 설정할 수가 있다. 여기에서 비디오 테이프의 재원 및 진동고유진동수는 Table 1에서 상술되었다.

먼저 상호 분리해석을 위한 가진충격력의 상한치 영역을 결정하기 위하여 테이프 길이에 대한 초기신장량의 비(X_0/L)는 3.97×10^{-4} 으로 매개변수가진주파수(Ω)는 헤드드럼의 회전수인 30 Hz로 설정하였다. 또한 장력비의 가설범위와 그때의 가진충격력의 상한치영역이 Table 2에서 기술되었다. 일반적으로 비디오 테이프가 구동시에는 외란이 거의 없으므로 상호 진동의 분리영역에 해당함을 파악할 수 있다.

두번째로 상호 분리해석을 위한 길이에 대한 초기신장량의 하한치 영역의 결정을 위하여 가진충격력이 $41.5 \mu\text{N}$ 일때와 41.5 pN 일때를 가정하고 매개변수가진주파수를 역시 30 Hz로 설정하였으나 그때의 초기신장량의 하한치값은 가진충격력의 크기 및 장력비의 범위에 무관한 상수인 대략 3.0×10^{-5} 으로 결

Table 1 비디오 테이프(video tape)의 재원

	기호	상수값	단위	
길이	L^*	110	mm	
두께	t	19.5	μm	
폭	b	12.65	mm	
선밀도	m	0.37	g/m	
전송속도	V	33.35	mm/sec	
출력장력	R_0	0.33~0.50	N	
탄성계수	자성층	E	3.53~6.86	GPa
	Base film		3.53~3.92	GPa
	Total		3.72~4.90	GPa
파단 신장량		5~8	%	
항복응력		σ_y	49.0~68.6	GPa
횡방향 정적고유진동수		Ω_v	1.56	Hz
종방향 정적고유진동수		Ω_u	3848.07	Hz

새한미디어 자료참조

Table 2 장력비에 따르는 상호진동의 분리해석을 위한 충격력의 상한치 및 길이에 대한 초기 신장량의 하한치 영역

	$\omega=0.098(30 \text{ Hz})$		
	$\frac{X_0}{L}=3.97 \times 10^{-4}$	$f_0=1.0 \times 10^{-4}$ (41.5 μN)	$f_0=1.0 \times 10^{-10}$ (41.5 pN)
$\frac{X_d}{X_0}$	max(f_0)	min($\frac{X_0}{L}$)	min($\frac{X_0}{L}$)
1.0×10^{-6}	1.0×10^{-3} (0.415 mN)	4.0×10^{-5}	3.0×10^{-5}
↓	↓	↓	
1.0×10^{-1}	7.0×10^{-4} (0.29 lmN)	3.0×10^{-5}	

정되었다. 그런데, 실제 비디오 테이프의 설정치가 이 하한치의 13배 가량인 3.97×10^{-4} 인 점을 감안하면 결국 비디오 테이프는 구동시 발생하는 횡 및 종방향 진동신호를 상호 분리하여 해석이 가능함을 입증하는 것이라 하겠다.

그러나, 비디오 테이프 구동시에 횡 및 종방향 진동신호를 상호 분리하여 해석이 가능함에도 불구하고 상호 분리 가능한 영역 내에서 실험을 수행시 충격가진하에 횡방향 진동신호로부터 종방향 진동의 정적 및 가변성분을 정확하게 추정하기란 충격력의

상한치가 아주 작고 비디오 테이프의 구동특성에 기인하여 많은 난점을 수반한다. 이런 경우에는 충격력을 상호 연성영역에 포함되는 다소 큰 값으로 가진하면, 이때 실제 비디오 테이프의 종방향 진동은 횡진동과 연성되어 발생하나, 앞으로 언급할 시간영역 해석법의 결과로 추정되는 종방향 진동은 상호 연성되는 충격력의 가진시에도 분리가능영역 내에서와 같이 횡진동 신호의 영향을 인식하지 못한다. 그러므로, 이때 연성영역 내에서 시간영역 해석법으로 추정된 종진동 신호를 실제 구동시 분리가능영역 내에서의 종진동 신호로 대치하여 해석이 가능하다.

3. 테이프 횡진동의 시간영역조작을 통한 종진동의 추정

현의 횡진동을 주파수 영역에서 해석함으로써 종진동의 근간을 형성하는 초기신장량, 매개변수 가진 주파수 및 동적변화량을 예측하게 되는 주파수영역 해석법으로는 진폭의 정보 이외에는 시간에 따른 종진동 신호의 위상의 순간정보를 추론할 수가 없었다. 이러한 난점을 해결하여 시간에 따른 진폭의 순간적인 정보 및 위상 정보를 동시에 추출할 수 있는 방법의 모색이 시간영역해석법에서 취급될 전망이다.

그러면, 현의 횡방향 충격 진동신호를 시간영역에서 해석하여 종방향 순간진동변위를 추정하는 절차를 단계적으로 살펴보자.

3.1 횡진동 신호에서 잡음신호의 필터작업 (Filtering)

이론적으로 구한 신호와는 달리 실험으로 부터 구한 신호는 매개변수에 의한 주기적인 진동과 계의 불안정성으로 인하여 횡방향으로도 진동하며 띠(strip)표면의 미소한 조도등으로 정확하게 한점을 순간적으로 가진하는 것이 불가능하고 결과적으로 횡방향 진동신호는 예기치 않은 잡음신호를 포함하게 된다. 따라서, 잡음신호를 적당히 필터링(filtering) 해주어야 하는데, 비연성(decoupling)의 조건에서 충격가진력(f_0)이 일정한도 이내이어야 하고, 이 범위 내에서는 횡진동의 주파수 스펙트럼(frequency spectrum)의 피크들도 작으므로 고차모우드에서는 노이즈에 더욱 민감해 지게 된다. 그러므로, 이런 고주파수—두번째 모드 이상의 영역—에서의 잡음신호를 적당히 제거하기 위하여 저역통과필터(low-pass filter)를 사용하게 된다.

본 논문에서는 FIR 필터중에서 널리 사용되는 일

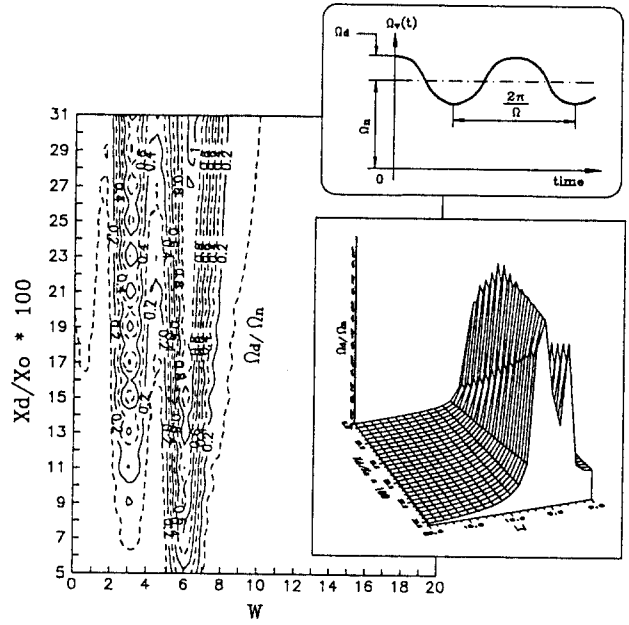


Fig. 3 Variation of frequency ratio with tension fluctuation ratio and non-dimensional frequency of parametric excitation (The sharp peaks indicate resonant parametric frequencies.)

명 “Equ-ripple필터” 로도 통하는 “REMEZ FIR 저역통과 필터”를 이용하여 위상보정을 해주었다.

3.2 횡방향 진동의 순간주파수 계산

순간주파수(instantaneous frequency) $a(t)$ 는 힐버트 변환(Hilbert transform)과 해석신호(analytic signal)에서 유도되는 순간위상신호(instantaneous phase) $\theta(t)$ 를 미분하여 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\tan^{-1} \frac{\tilde{v}(t)}{v(t)} \right] \quad (22)$$

또는,

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\tilde{v}(t)v(t) - \dot{v}(t)\tilde{v}(t)}{v^2(t) + \tilde{v}^2(t)} \quad (23)$$

현의 횡방향 충격응답과 같이 요동(fluctuation)이 심한 신호—시간에 따라 급변하는 함수—일 경우에는 식 (23)이 $v(t)$ 와 $\tilde{v}(t)$ 의 미분항을 포함하므로 두 신호를 미분할 경우에 분해능(Resolution)에 따라 상당한 오차를 포함할 수가 있는 반면, 식 (22)는 위상보상(phase unwrapping)의 소요시간이 다소 걸리는 단점에도 불구하고 순간위상신호(instantaneous phase)인 $\theta(t) = \tan^{-1} \frac{\tilde{v}(t)}{v(t)}$ 함수가

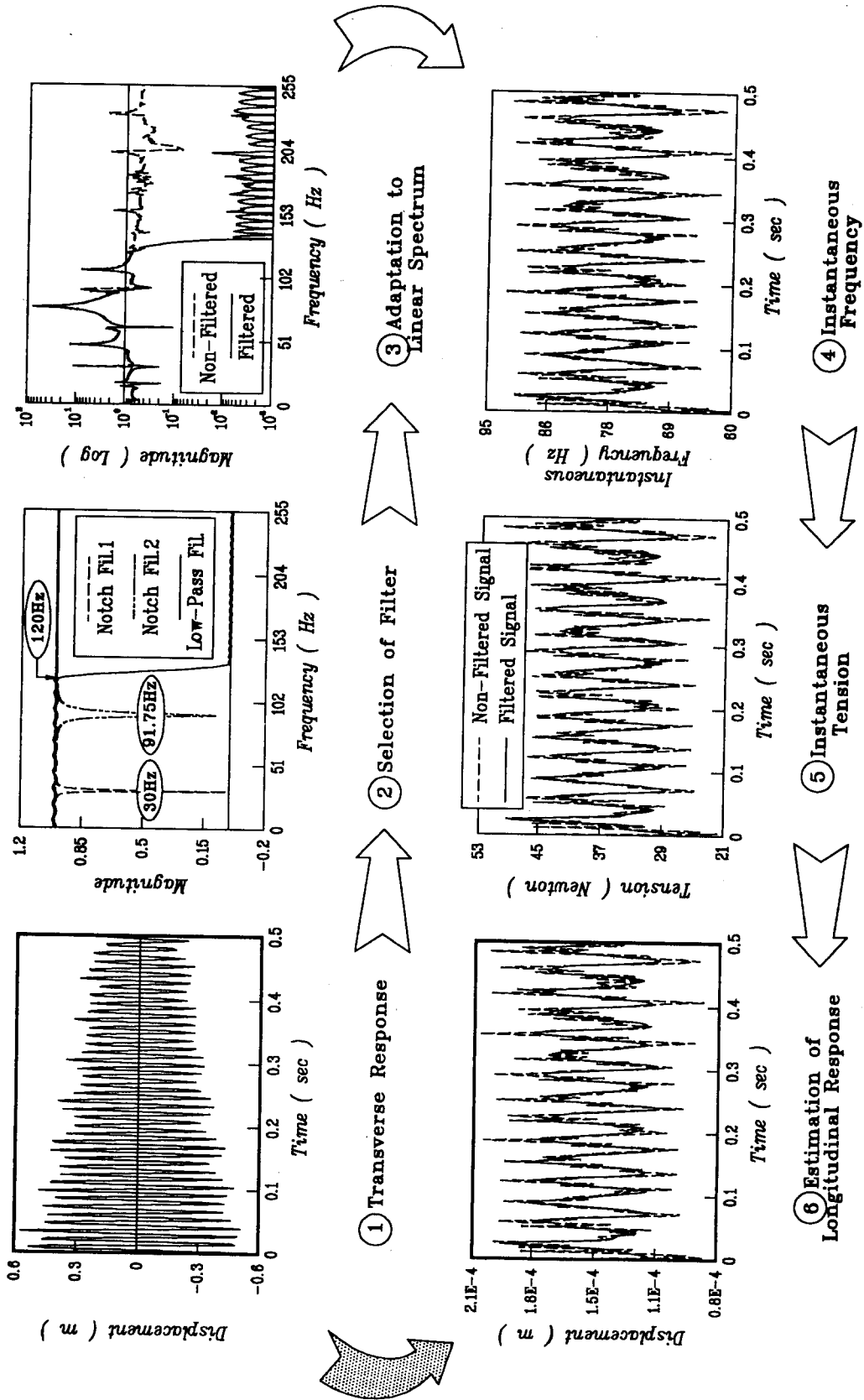


Fig. 4 Flow chart to estimate longitudinal displacement using impulse response in the transverse direction
 ($X_0/L=0.00034$, $W=30$ Hz, $X_d/X_0=0.192$, $f=3.68E-3$)

요동이 적은 함수—실제로는 거의 일정한 기울기를 갖는 직선에 가까움—이므로, $v(t)$ 는 요동이 심할 지라도 순간주파수 (instantaneous frequency)를 구하기 위한 미분시에 발생하는 오차를 최소화할 수가 있다. 본 논문에서도 계산이 보다 정확한 식 (22)를 이용한 순간주파수의 계산방법이 수행되었다.

그러므로, 식 (22)를 이용하면 $x=x_j$ 인 위치에서 충격력 f_0 의 가진시에 임의의 위치 $x=x$ 에서의 횡방향 충격응답함수인 식 (11)의 $v(t)$ 로부터 횡방향의 순간주파수 $\Omega_v(t)$ 를 다음과 같이 유도할 수가 있다.

$$\Omega_v(t) = \omega_m + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k\omega (a_{nk}e^{jk\omega t} - b_{nk}e^{-jk\omega t}) - \sum_{k=1}^{\infty} k\omega (\bar{b}_{nk}e^{jk\omega t} - \bar{a}_{nk}e^{-jk\omega t}) \right] \quad (24)$$

여기에서,

$$\omega_n = \pi \sqrt{\frac{R_0}{mL^2}} \text{ (rad/sec)}$$

결과적으로 $\Omega_v(t)$ 는 매개가진주파수(ω)와 장력변화비($\theta = \frac{X_d}{X_0}$)의 함수라는 것을 알 수 있다.

Fig. 3은 횡방향진동의 순간주파수에 대한 주파수비(Ω_d/Ω_n)가 매개변수가진주파수(Ω)에 전체적인 경향이 반비례하고 장력비(R_d/R_0)에는 비례하는 것을 보여주고있다. 그리고, 매개가진(parametric excitation)의 특성에서도 인식할 수 있듯이, 횡방향 무차원 고유진동수(π)가 매개변수가진주파수(ω)의 절반의 정수배가 될때인 $\omega = 2\pi, \pi, 2\pi/3, \dots$ 에서는 공진(resonance)이 발생하여 주파수비(frequency fluctuation ratio)가 급증하여 피크로 나타남을 알 수 있다.

3.3 순간 종진동 신호의 추정

우선 횡방향 진동의 순간주파수와 순간장력의 관계는 정적장력(R_0)만 작용하는 현의 횡방향 고유진동수와 정적장력의 관계를 확장적용하여 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$\Omega_v(T) = \pi \sqrt{\frac{R(T)}{mL^2}} \quad (25)$$

다음으로 현의 순간장력 $R(T)$ 과 종방향의 순간변위 $U(T)$ 와의 관계식은 선형한도(또는 탄성한도)의 내에서는 $R_0 = \frac{EA}{L} X_0$, $R_d = \frac{EA}{L} X_d$ 가 성립하므로 역시 변화하는 시간에 대하여 다음과 같이 확장 적용 할 수가 있다.

$$R(T) = \frac{EA}{L} U(L, T) \quad (26)$$

따라서, 현의 순간종방향변위는 횡방향의 순간주파수와 다음과 같은 관계로 부터 구할 수가 있다.

$$U(L, T) = \frac{L}{EA} R(T) = \frac{mL^3}{EA\pi^2} \Omega_v^2(T) = \frac{mL^3}{EA\pi^2} \left\{ \frac{d}{dT} \left[\tan^{-1} \frac{\tilde{V}'(X, T)}{V'(X, T)} \right] \right\}^2 \quad (27)$$

그러므로, 횡 및 종변위의 상호 분리해석이 가능한 영역에서는 다음과 같이 종방향 진동변위를 유도 할 수 있다.

$$U(X, T) = \frac{X}{L} U(L, T) \quad (28)$$

결과적으로 현의 순간종변위는 횡방향의 순간주파수의 자승에 비례함을 알 수 있다.

이상에서 매개변수가진(parametric excitation)에 종속되는 현에 충격력이 가진될 때, 측정된 횡방향 과도응답으로부터 필터작업과 힐버트변환을 수행하여 구해진 횡방향의 순간주파수를 이용하여 순간종방향변위를 추정하는 절차를 나타내는 그림이 Fig. 4에서 단계적으로 묘사되었다.

4. 실제 구동계에 시간영역해석법의 간접적 적용 방법

식 (11)에서도 판단할 수 있듯이 횡방향 충격응답 $v(t)$ 는 가진충격력 $f(t)$ 와 선형적인 비례관계가 있다. 따라서, 식 (12)에서 주어진 횡방향 순간 주파수 관계식에서 횡방향 충격응답과 그 힐버트 변환된 횡방향 진동변위간의 비율식은 가진충격력과 무관한 값을 취함을 알 수 있다. 결과적으로 횡방향 순간주파수 및 이값의 자승에 비례하는 종방향 진동변위는 가진충격력의 변화를 인식하지 못하는 것이다. 또한, 시간영역해석법의 적용시 사용된 저역통과 필터의 작용으로 고주파수의 모우드가 제거되어 결과적으로 얻어지는 종방향 진동변위는 상호 작동의 분리 가능 영역내의 결과와 동일하다.

그런데, 영상 및 음원전달을 목적으로 하는 비디오 오디오류의 테이프 구동계는 실제 구동상황이 앞에서도 언급 하였듯이 횡방향 충격응답과 종방향 진동변위가 상호 분리되어 독립적으로 해석이 가능한 영역이라고 하였다. 그러나, 앞서 실례로 들었던 비디오 구동계에서도 판단할 수 있듯이 현실적인 구동상황에서는 분리 가능한 영역 내에서 실험을 수행

시 충격가진하에 횡방향 진동신호로부터 종방향 진동의 정적 및 가변성분을 정확하게 추정하기에는 가진충격력의 상한치가 아주 작다. 비디오 테이프의 구동특성에 기인하여 현실적인 측정상의 문제점을 수반하는 경우에는 가진충격력을 양 진동간의 상호연성영역에 포함되는 다소 큰 값으로 가진하면, 이때 실제 비디오 테이프의 종방향 진동은 횡진동과 연성되어 발생할 것으로 기대되지만, 그때의 횡방향 충격응답을 이용하여 시간영역 해석법의 결과로 추정되는 종방향 진동변위는 분리가능영역 내에서의와 같은 결과를 산출하여 횡진동 신호의 가진 충격력에 따른 영향을 인식하지 못한다. 그러므로, 이때 양 진동간의 연성영역 내에서의 횡방향 충격응답을 측정하여 시간영역해석법으로 추정된 종진동 신호를 실제 구동시 분리영역 내에서의 종진동 신호로 대치하여 해석이 가능하다.

5. 실험적 규명

현의 시간영역해석법에서 횡방향 진동해석을 통한 종방향 진동의 추정을 위하여 다음과 같은 절차로 실험을 수행하였다.

Fig. 5에서도 알수 있듯이 우선 정적장력을 주기 위하여 질량계를 현의 끝에 있는 하중계(force transducer)의 하단에 설치하여 현과 일체가 되게 하였으며, 가진기(shaker)의 상단 잠금장치와 접합시켰다. 그리고, 질량계의 질량을 정적장력의 기대치로 설정하였다. 또한, HP 분석기(analyser)의 신호원(signal source)에서 정현(sin) 신호를 적정 주파수로 매개가진(Ω)하고 그 신호를 power supply에서 진폭을 조절(X_d)하여 현의 끝단에 가진시켜서 그때의 가진 신호를 윙(wing)과 질량계사이의 하중계[PCB 221 A02]로 측정하여 oscilloscope로 탐지하고, 동시에 laser sensor[Keyence 2100]를 윙의 날개 부분에 설치하여 그때의 정적(X_0) 및 동적변위(X_d)를 측정하였다. 또한 그때 현의 상단에서 길이의 27.24%되는 지점을 impact hammer[PCB 086C80]로 가진하고 동시에 현의 중앙에서 gap sensor[eddy current type proximity Probes AEC model 5505]를 이용하여 횡방향 충격응답 $v(t)$ 를 측정하였다.

Fig. 6의 (a)는 장력비(R_a/R_0)가 0.192로서 다소 크며, 충격력의 가진시($T=0$)에 종변위의 기대치가 경계조건에 의하여 예상대로 최대치를 취함을 알수 있다. 그리고, 실험치는 필터작업을 거친것이 거치

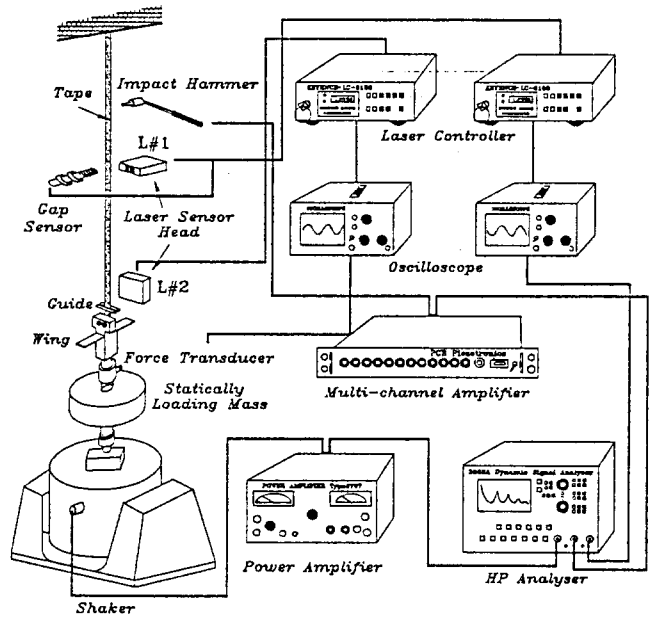
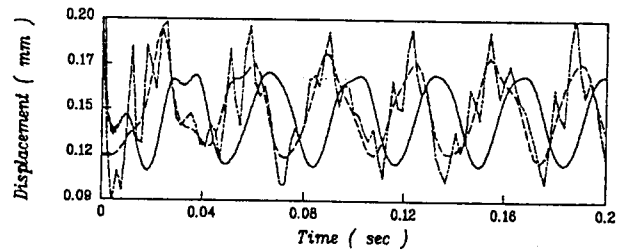
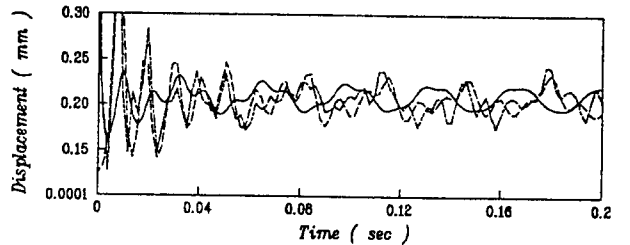


Fig. 5 Configuration of experimental setup



(a) $X_0/L=0.00034$, $X_d/X_0=0.192$, $f_0=3.68E-3$



(b) $X_0/L=0.000504$, $X_d/X_0=0.064$, $f_0=2.57E-3$

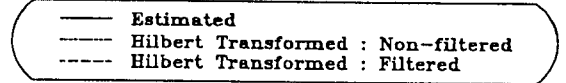


Fig. 6 Comparison of estimated (Simulated) and Hilbert transformed (Non-filtered and Filtered) instantaneous longitudinal displacement ($W=30$ Hz)

지 않고 힐버트변환하여 종변위를 추정한 것보다 기대치에 근접함을 알 수 있다. 또한, 실제적으로는 최대종변위의 순간에 충격력을 이론처럼 가진하기가 어려우므로 기대치와 측정치는 위상차를 수반하고,

실험치의 경우에는 초기시간에 최소장력을 취함을 판단할 수 있다. (b)는 장력비가 0.064로서 가변장력이 정적장력에 비하여 아주 낮으므로 가변장력에 의하여 형성되는 autospectrum에서의 주피크(main peak) 주위의 부피크(side peak)가 아주 작아져서 잡음신호의 영향을 많이 받게되므로, 순간 종방향 진동신호의 AC성분이 변형되어 나타남을 알 수 있다.

6. 결 론

매개변수가진에 증속되는 현의 횡방향 충격응답을 시간영역에서 필터작업, 힐버트변환과 순간주파수의 개념을 도입하여 해석함으로써 종방향의 순간진동 변위를 추정하는 방법이 제시되었다. 그리고, 실험을 통하여 이론의 타당성을 검증하였다. 또한, 모의 실험의 결과 일반적인 현구동계에 있어서는 넓은 적용변수의 선택영역에서 종변위가 횡변위와 분리(decoupling)되어서 공간적으로 길이에 따르는 선형적인 증가성과 시간적으로 조화적인 주기성을 갖는다는 것을 확인함으로써 임의의 위치에서의 종변위를 파악함이 가능하였다.

참 고 문 헌

- (1) G. Tagata, 1977, "Harmonically Forced, Finite Amplitude Vibration of a String," Journal of Sound and Vibration, Vol. 51(4), pp. 483~492.
- (2) K. W. Wang and C. D. Mote Jr. 1985, "Vibration Coupling Analysis of Band/Wheel Mechanical System," Journal of Sound and Vibration, Vol. 109(2), pp. 237~258.
- (3) 임 완택, 1993, "횡방향 진동을 이용한 벨트 구동계의 정적 장력 및 동적 장력의 규명," 한국과학기술원, 박사 학위논문.
- (4) Leonard Meirovitch, 1967, Analytical Methods in Vibration, The Macmillan Company, New York.
- (5) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, New York, pp. 273~285.
- (6) C. D. Mote Jr., 1965, "A Study of Band Saw Vibrations," Journal of the Franklin Institute, Vol. 279(6), pp. 431~444.
- (7) R. D. Swope and W. f. Ames, 1963, "Vibrations of a Moving Threadline," Journal of the Franklin Institute, Vol. 275, pp. 36~55.
- (8) Serge Abrate, 1992, "Vibrations of Belts and Belt Drives," Mechanism and Machine Theory, Vol. 27(6), pp. 645~659.
- (9) T. Majewski, 1986, "Audio Signal Modulation caused by Self-excited Vibrations of Magnetic Tape," Journal of Sound and Vibration, Vol. 105(1), pp. 17~25.
- (10) J. A. Wickert, 1993, "Analysis of Self-Excited Longitudinal Vibration of a Magnetic Tape," Journal of Sound and Vibration, Vol. 160(3), pp. 455~463.
- (11) D. W. Alspaugh, 1967, "Torsional Vibration of a Moving Band," Journal of the Franklin Institute, Vol. 283(4), pp. 328~338.
- (12) W. Z. Wu, C. D. Mode Jr., 1984, "Analysis of Vibration in a Bandsaw System," Forest Products Journal, Vol. 34(9), pp. 12~21.
- (13) J. G. Proakis and D. G. Manolakis, 1992, Digital Signal Processing, 2nd Edition, Maxwell Macmillan, New York, pp. 330~361.
- (14) J. S. Bendat and A. G. Piersol., 1992, Random Data : Analysis and Measurement Procedure, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York, pp. 484~492.