

4차 모멘트를 이용한 비선형성의 탐색

Detection of Nonlinearity Using a Fourth Moment

장 한 기* · 김 광 준*

Jang Han-Kee and Kim Kwang-Joon

<1994년 3월 12일 접수 ; 1994년 8월 15일 심사완료>

ABSTRACT

Existence of any nonlinearity in responses of a nonlinear system is tested using a kurtosis or a fourth moment which has been widely used to characterize signal patterns. By inputting a harmonic signal to a system and investigating the distortions of an output signal from a harmonic pattern, which are due to violations of proportionality between the input and the output, it is judged whether the output is generated from a nonlinear system or not. Through applying the method presented in this work to simulation studies on detections of nonlinearities of a single degree of freedom system, in which three kinds of nonlinearities are treated as restoring force terms, feasibilities of the method are shown and the range of both frequency and input amplitude, in which the system generates nonlinear responses, is determined.

1. 서 론

동적인 시스템을 규명하기 위한 많은 이론적, 실험적인 기법들이 발전되고 또, 요구하는 정밀도의 수준이 향상됨에 따라, 최근에 들어 그 해석의 영역을 비선형의 범위까지 확장하려는 시도가 많이 행해지고 있다. 비선형성의 해석이나 규명을 위해서 제일 먼저 해야 할 일은 말할 것도 없이, 계의 거동이 선형인지 비선형인지를 판단하는 것이다. 실제로 이에 대한 많은 연구들이 있었으며^(1~7), 이들은 각각 목적에 합당하게 나름대로의 장점을 가지고 있으나 문제점과 한계도 함께 안고 있는 것이 사실이다. 이에 대한 가장 중요한 이유는 비선형계의 범위가 너무 광범위하고 그 특성 또한 다양하기 때문이며 또 다른 이유로는, 계의 거동에 대해 선형과 비선형을

구분짓기 위한 일반화된 기준이 없기 때문이다. 즉, 비선형계에서는 선형계에서 항상 성립하는 다양한 특성들인 비례(propportionality) 관계, 중첩(superposition)의 원리, 합(additivity)의 법칙 등 중에서 어느 하나 혹은 모두 성립되지 않을 수 있는데, 과연 어떤 기준을 사용하는 것이 타당한지를 결정하는 것이 매우 어렵기 때문이다. 특히 동적인 시스템에서는 진폭뿐만 아니라 주파수에 의해서도 비선형성의 출현여부가 결정되므로 상황은 더 복잡해진다.

본 연구에서는 동적 시스템의 거동에서 나타나는 비선형성을 탐색하고 이를 체계적으로 표현하기 위한, 실용적인 측면이 강조된 새로운 방법을 제안하였다⁽⁸⁾. 이 방법에서는, 일정한 진폭과 주파수를 갖는 정현파 입력에 대응하는 계의 출력신호의 파형이 정현파로 유지되는지를 조사함으로써 비선형성의 존재 여부를 판단하였다. 이를 위하여 신호의 특성함수로 사용되는 4차 모멘트(kurtosis)를 도입하였으며^(4,5,8,9), 이를 이용하여 계의 거동에 포함된 비선형성

*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

의 존재여부를 탐색하고, 비선형성이 나타나는 입력의 진폭과 주파수의 영역을 결정하였다.

동적인 시스템에서 주파수와 진폭에 관련된 비선형성 탐색방법을 제시하기에 앞서, 먼저 동적인 계에서 선형/비선형 관계를 어떻게 정의하고 분류할 것인가에 대해서 고찰하였으며 이에 대한 기준을 설정하였다. 이어서, 4차 모멘트 즉, kurtosis의 정의와 이를 비선형성 탐색에 적용하기 위하여 고려해야 할 사항들에 대하여 고찰해 보았다. 끝으로, 제안된 방법을 기계계에서 흔히 나타나는 3가지 비선형성의 탐색에 적용함으로써 그 타당성을 보였으며, 이 때 본 방법과 그 개념이 유사한 sig함수⁽³⁾와 그 성능을 비교, 고찰함으로써 본 방법의 장점을 보였다.

2. 동적인 시스템에서의 선형/비선형의 정의와 분류

전술한 바와 같이, 비선형성은 그 종류가 매우 광범위하고 특성 또한 다양하게 나타나므로 시스템의 거동이 '선형이다' 혹은 '비선형이다'라고 명료하게 구분지을 수 있는 일반적인 방법은 기대하기 어렵다. 비선형성의 탐색 및 정량화를 위해 제안된 방법들의 대부분은, 선형계에서 성립하는 여러 특성들을 역으로 이용하여 비선형성의 존재여부를 체크하는 방식으로 개발되어 왔다. 본 연구에서 제시하는 방법도 마찬가지로 선형계에서 성립하는 성질 중의 하나인 입, 출력의 진폭사이의 비례관계를 역이용하여 비선형성의 존재여부를 파악하고자 하였다.

비선형성의 탐색방법을 논하기에 앞서 비선형성에 대한 정의와 그 범위를 명확히 해둘 필요가 있다. '비선형'은 두 개의 변수 사이의 관계를 나타내는 용어이며, 말 그대로 선형이 아니라는 의미를 갖는다. 따라서 선형성에 대한 정의를 먼저 재고해보고 이어서 이들 개념이 동적인 계에 어떻게 확장되는지에 대해 언급하기로 한다.

2.1 선형과 비선형의 정의

'선형'이라 함은 서로 다른 두 값 사이의 관계를 의미하는 용어인데, 두 변수 x, y 에 대한 선형관계를 정의하면 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

여기서, 계수 a, b, c 는 변수 x, y 와 무관한 상수이다. 이처럼 정의된 두 변수 사이의 관계는 앞서 언급한 선형 특성들을 모두 만족하게 된다. 이 개념을 근간으로 하여 두 변수 사이의 비선형 관계를 정의

한다면, 식 (1)로 표현되지 않는 x 와 y 사이의 모든 관계를 의미한다. 예를 들어, $ax^n + by + c = 0$, $axy = b$ 등과 같이 주어진 변수 x, y 에 대한 일차항 이외의 항을 포함하는 모든 경우는 비선형 관계가 된다.

식 (1)의 선형관계를 동적인 계에 확장시키려면 변수 x, y 이외에 시간 t 를 포함시키고 또, 시간에 대한 미분 혹은 적분 연산자도 도입할 필요가 있다. 많은 경우에 동적인 선형계는 미분 연산자만으로 표현하며 다음과 같다.

$$Dy = x \quad (2)$$

$$D = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \quad (3)$$

여기서, D 는 선형 미분 연산자라고 불리우며, 계수 $a_i (i=0, 1, \dots, n)$ 들은 시간 t 와 변수 x, y 와 무관한 상수이다. 식 (2)와 같이 상미분 방정식의 형태로 정의된 두 변수(x, y)와 관계식은 선형계에서 요구되는 여러가지 특성들을 모두 만족할 수 있다. 따라서 동적인 문제에서의 선형관계는 바로 식 (2)와 같은 제차(homogeneous) 선형 상미분 방정식을 의미한다고 볼 수 있겠다. 정적인 경우에서와 마찬가지로 동적인 계에서도 식 (2)와 같이 표현되지 않는 경우를 비선형계로 분류하는 것은 그다지 어렵지 않다.

구분(piecewise) 선형계, 시간에 따라 인자가 변하는(time varying)계, 편미분 방정식으로 표현되는 계 등과 같이 그 구별이 애매한 경우들도 있으나, 우리가 관심있는 두 변수(입력과 출력) 사이만의 관계로 판단한다면 이들에 대한 구분도 어렵지 않다. 본 연구에서는 혼동을 피하기 위해 그 대상을 시간 불변계의 정상상태의 신호로 국한시키기로 한다.

2.2 동적인 시스템에서의 비선형성의 표현

우리가 비선형성의 존재여부를 파악하고자 할 때는 이미, 대상이 비선형계일 수 있다는 목시적인 가정을 하고 있게 된다. 실제로, 수식에 의한 시뮬레이션과 같은 특수한 경우를 제외하면, 실존하는 물리적인 계의 대부분은 비선형성을 포함하고 있다. 단지 우리가 취급하는 진폭의 범위내에서 선형관계로 그 특성이 충분히 표현되는 것뿐이다. 따라서 실용적인 관점에서 볼 때, 계가 선형인지 비선형인지를 구별하는 것보다는 주어진 크기의 입력에 대해 그 거동이 선형인지 비선형인지를 판단하는 것이 의미가 있을 것이다. 왜냐하면 비선형계라 할지라도

특정 범위내에서는 비선형성을 거의 보이지 않고 선형계처럼 거동하기 때문이다.

일반적으로 비선형성을 다루는데 있어서 가장 중요한 것은 진폭의 크기인데 진동계와 같은 동적인 문제에서는, 고유진동수 등의 주파수 특성이 비선형성의 출현에 크게 영향을 미치므로, 진폭뿐만 아니라 거동의 주파수 또한 중요한 인자가 된다. 따라서, 두 가지의 인자를 동시에 고려하는 것이 마땅하겠다. 이는, 같은 진폭이라도 주파수에 따라서 비선형성이 나타날 수도 있고 그렇지 않을 수도 있기 때문이다.

본 연구의 목적은, 비선형성을 탐색하는데 있어 그 종류의 규명이나 정량화에 있는 것이 아니고 관심있는 주파수의 영역에서 입력의 진폭이 어느 정도 될 때 계의 거동이 비선형 영역으로 들어가는지를 알고자 하는 것이다. 따라서 본 연구에서는 비선형성에 관련된 계의 특성을 표현하는 방법의 하나로, 정현파 입력을 이용하여 주파수와 입력의 진폭을 각각 일소(sweeping)해가며 각 경우에 출력의 파형이 정현파로 유지되는지를 판단함으로써 비선형 거동이 나타나는 입력의 진폭과 주파수의 영역을 결정하였는데, 구체적인 방법은 3장에 나타냈다.

3. 4차 모멘트(kurtosis)를 이용한 비선형성 탐색

본 연구에서는 Fig. 1에서 보인 바와 같이, 정현파 입력이 계에 가해질 때, 선형계의 가장 기본적인 특성인 두 변수 사이의 진폭에 대한 비례(propportionality) 관계의 성립여부를 확인함으로써 거동의 비선형 여부를 파악하고자 하였다. 비례성질이라 함은 곧 두 변수의 관계가 진폭의 변화에 상관없이 일정하지 아닌지를 말하는 것으로 선형성(linearity)과 가장 근접한 개념이라 할 수 있다⁽¹¹⁾. 식 (2)와 같이 상미분 방정식으로 표현되는 동적인 선형계에 정현파 입력을 가하면 주어진 주파수에서 출력신호는 0

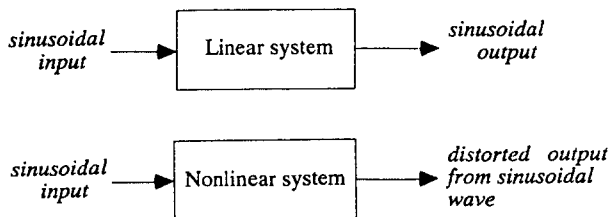


Fig. 1 Input-output relation of linear and nonlinear system in case of harmonic excitations

에서 신호의 최대진폭사이에서 주기적으로 변화하게 되는데, 이 때 출력의 진폭과 위상은 계의 특성에 의해 주파수에 따라 변화하겠지만 그 파형만은 정현파를 그대로 유지하게 된다. 그러나 비선형계의 경우에는 정현파 입력이 가해지더라도 특정 주파수와 진폭에 이르면 비선형 효과에 의해, 출력신호의 파형이 왜곡되며 더이상 정현파 형상이 유지되지 않는데, 본 연구에서는 이와 같은 특성의 관찰을 통해 거동의 비선형 여부를 결정하였다. 이 방법은 출력신호의 정현파 여부를 체크하므로 적용시에 주의할 점은, 계를 가진할 때 나타나는 초기 과도 응답이 사라지고 정상상태에 다다른 후의 신호로 판단해야 한다는 것이다.

비선형계에 $U\sin\omega t$ 꼴의 입력이 가해질 때, 정상상태의 출력을 일반적으로 표현하면 $\sum_j B_j(t)\sin(\omega_j(t) + \phi_j(t))$ 와 같이 나타낼 수 있다⁽¹²⁾. 여기서 진폭(B), 주파수(ω), 위상(ϕ)은 정상상태의 시간불변계에서라면 일정한 값을 갖는 것으로 가정해도 무리가 없겠다. 이 때, 비선형의 정도가 너무 크지 않다면, 출력은 가진 주파수 성분(ω)이 가장 뚜렷하고 그 외에 두, 세 개의 배수 성분(harmonics)들만으로 표현될 수 있다⁽¹²⁾. 비선형의 정도가 심해지면 필요한 항의 수도 많아지게 되며, 이 경우, 어떤 과정을 거치든지 출력신호는 정현파로부터 점점 더 왜곡된다. 실제로 이와 유사한 개념을 이용한 비선형성 탐색법으로 sig함수⁽³⁾가 있으며 그 정의는 다음과 같다.

$$\text{sig-function}(\omega) = \frac{\int_0^T (y(t) - y_\omega(t))^2 dt}{\int_0^T y(t)^2 dt} \quad (\times 100\%) \quad (4)$$

여기서, $y(t)$ 는 정현파 입력에 대해 측정된 출력 신호이고 $y_\omega(t)$ 는 측정신호 중에서 가진주파수 ω 에 해당하는 성분이다. T 는 전체 데이터의 기록시간이다. 이 함수는 전체 출력신호의 파워와 가진 주파수 성분을 필터링하고 난 나머지 신호의 파워와의 상대적인 비로 정의된다. 결국 가진 주파수 이외의 성분은 정현파로부터의 왜곡량인데 이를 비선형 효과로 보고 정량화한 값이다. 정현파 입력이 선형계를 통과한 응답의 경우는, 가진주파수 성분 이외의 응답이 없으므로 0(%)값을 나타내며 비선형성이 커지면 이 값이 증가한다. 이 함수는 주파수에 따라 비선형성 여부를 판단할 수 있는 장점이 있으나 잡음의 영향에 취약하고 비선형 왜곡량에 대한 민감도가 낮아서 거의 사용되고 있지 않다⁽¹³⁾. 본 연구에서는 보다 계

산이 쉽고 신호의 비선형 왜곡에 대한 민감도가 높은 4차 모멘트를 도입하여 비선형 요소에 의한 정현파 신호의 왜곡 여부를 관찰하였으며, 이를 비선형성이 나타나는 가진력의 진폭과 주파수의 영역으로 표현하고자 하였다.

3.1 4차 모멘트(kurtosis)의 정의

데이터의 통계해석에 흔히 사용되는 '모멘트'는 1차인 경우 평균치, 2차인 경우 분산이고, 3,4차의 경우는 각각 skewness, kurtosis라고 칭하며 확률밀도 함수(probability density function) 형상을 분석하는데에 사용된다^(4,9,14). 4차 모멘트 혹은 kurtosis에 대한 정의는 다음과 같다.

$$kurtosis = \frac{E[y^4]}{[E[y^2]]^2} = \frac{\int y^4 p(y) dy}{\left[\int y^2 p(y) dy \right]^2} \quad (5)$$

여기서, $E[\]$ 는 기대치(expectation)를 나타내며 $p(y)$ 는 신호 y 의 확률밀도함수이다. 이 값은 정규화된(normalized) 꼴로 정의되므로 신호의 진폭과 무관하며 오로지 신호의 패턴에 의해 결정된다. 예를 들면, Gaussian 랜덤신호의 경우 3, 정현파 신호의 경우 1.5를 각각 나타낸다. 이 함수는 특히 변수의 크기에 대한 차수가 높아서 확률밀도함수에서의 양 끝단, 즉 최대 진폭부근에서의 형상변화에 민감하므로⁽⁹⁾, 정현파의 경우라면 최대값 부근의 변화를 잘 감지할 수 있다. 비선형성은 많은 경우, 거동의 진폭이 큰 부분에서 강조되는 경향이 있으므로, 위의 성질은 비선형 효과를 탐색하는데 매우 유리한 성질이 된다고 하겠다. 부록 A에서는 비선형 응답을 간단한 형태로 가정한 뒤 Kurtosis와 sig함수를 계산하여 비선형 왜곡에 대한 민감도를 각각 비교하여 보았는데, 비선형성에 의한 왜곡량이 작은 경우에 특히 Kurtosis의 민감도가 상대적으로 높음을 알 수 있었다.

3.2 4차 모멘트의 신뢰구간

4차 모멘트는 실제로 일정갯수(N)의 데이터로부터 계산되는 랜덤한 변수이며, 잡음의 영향이나 신호의 이산화(discretization) 등의 영향으로 정현파라 할지라도 정확하게 이론치인 1.5가 된다고 보장할 수 없다. 따라서 이와 같은 경우 신호가 과연 정현파인지 아닌지를 판단할 필요가 있으며, 이를 위해 신뢰구간이 필요하게 된다. 정규분포를 갖는 랜덤 변수의 신뢰구간은 $\pm \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{N}}$ 와 같다⁽¹⁴⁾. 여기서

$z_{\alpha/2}$ 는 주어진 유의수준에 대한 신뢰계수로 95%인 경우 1.96, 99%인 경우에 2.57이며, σ 는 주어진 변수에 대한 표준편차이다. Fisher와 Pearson⁽¹⁵⁻¹⁷⁾은 kurtosis의 계산에 사용된 데이터 세트의 갯수가 충분히 크고, 또 데이터 세트가 모집단으로부터 정규적으로 추출됐다는(normally sampled) 가정하에 kurtosis 변수 자체에 대한 분산을 다음과 같은 식으로 표현하였다.

$$\sigma^2\{kurtosis\} = \frac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)} \quad (6)$$

실제로 본 연구에서는 입, 출력신호가 정상(stationary) 상태의 데이터라는 가정하에서 분석했으므로 정규적으로 추출됐다는 가정은 저절로 만족된다.

3.3 4차 모멘트의 계산에 미치는 인자들

4차 모멘트를 계산에 의해 구하는 경우, 이에 영향을 미칠 수 있는 중요 인자로는 외부잡음, 신호의 종류(변위, 속도 또는 가속도)등을 들 수 있는데 여기서는 이들에 대해 고찰해 보았다.

(1) 외부 잡음의 영향

시뮬레이션이 아닌 실험 데이터의 처리에서는 잡음의 효과를 무시할 수 없으므로 외부 잡음이 kurtosis의 계산에 미치는 영향을 관찰하였다. Table 1에는 정현파 함수의 rms(root mean square) 값의 1~10%에 해당하는 백색 잡음(white noise)을

Table 1 Dependence of kurtosis for a sinusoidal wave on external noise effect (confidence interval : 1.491~1.509)

NSR (%)	Kurtosis
0	1.50018
1	1.49888
2	1.49983
3	1.50135
4	1.50343
5	1.50609
6	1.50929*
7	1.51306
8	1.51740
9	1.52220
10	1.52760

정현과 신호에 각각 추가하여 각 경우마다 4차 모멘트를 계산하여 정리하였다. 데이터 수 1000개인 경우에 대한 95% 신뢰구간은 식 (6)을 이용해서 구하면 1.5 ± 0.009 이며 이 범위를 만족하는 외부잡음의 최대치는 Table 1에서 볼 때, 5% 정도이다. 즉, 5% 정도의 외부잡음이 있더라도 신호의 정현과 여부를 판단하는데 무리가 없음을 알 수 있다. 실제로 최근의 실험장비들은 매우 정밀하며, 또 비선형 해석을 하면서 상당량의 잡음을 고려한다는 것 자체가 무의미하므로, 5% 정도까지의 잡음에 대해 kurtosis를 적용할 수 있다면 실제 비선형계에의 적용에도 무리가 없다고 판단된다.

(2) 신호의 종류에 의한 영향

동적인 기계계의 경우에 응답은 변위, 속도, 혹은 가속도 등으로 다양하게 측정될 수 있다. 부록 A에서 보인 바와 같이, 정현과 가진한 비선형계의 변위 응답이 $A \sin 2\pi a t + B \sin 2\pi(na)t$ 와 같이 기본 가진 주파수(a)와 n 배수 성분으로 얻어지는 간단한 경우를 고려해보자. 이 때, 속도는 $(2\pi a) A \sin 2\pi a t + (2\pi n a) B \sin 2\pi(na)t$ 가 되고 가속도는 $(2\pi a)^2 A \sin 2\pi a t + (2\pi n a)^2 B \sin 2\pi(na)t$ 와 같이 표현된다. 변위, 속도와 가속도 신호에 대한 kurtosis를 부록의 식 (A6)을 이용하여 차례대로 표현하면 다음과 같다.

$$kurtosis(a)_d = 1.5 \times \frac{(1+4r^2+r^4)}{(1+r^2)^2} \quad (7)$$

$$kurtosis(a)_v = 1.5 \times \frac{(1+4(nr)^2+(nr)^4)}{(1+(nr)^2)^2} \quad (8)$$

$$kurtosis(a)_a = 1.5 \times \frac{(1+4(n^2r)^2+(n^2r)^4)}{(1+(n^2r)^2)^2} \quad (9)$$

이 때, $r(=B/A)$ 은 비선형 왜곡량의 정도를 나타내는 값으로, 부록 A에서 언급한 바와같이, 비선형성에 의한 왜곡량(B)의 가진주파수 성분(A)에 대한 상대적인 비를 나타낸다. 속도와 가속도 신호의 kurtosis를 변위의 경우에 대한 결과와 비교해 보면 r 대신 각각 nr , $(nr)^2$ 로 대체되어 있다는 차이를 볼 수 있다. 이들에 의한 효과는, 비선형 응답에 고차 배수성분(super-harmonics)이 나타나는지 저차 배수성분(sub-harmonics)이 나타나는지에 따라 차이가 난다. 먼저, 비선형 왜곡에 의해 나타난 제 2의 주파수 성분이 고차의 배수성분인 경우라면, n 이 1보다 크므로 변위보다는 속도, 속도보다는 가속도의 경우에 왜곡성분에 더 민감함을 알 수 있다. 그러나 저차의 배수 성분의 경우에는 n 이 0과 1 사이의 값을 갖게 되고 이와 같은 경우 반대의 경향을 보이게

된다. 결국 동일한 주파수와 진폭의 입력이 가해져도 응답을 변위로 측정하느냐 혹은 가속도로 측정하느냐에 따라서 kurtosis의 값이 달라질 수 있으며 결과적으로 거동의 선형, 비선형 판단 여부도 달라질 수 있게 된다.

일반적으로 물리적인 비선형계에서는, 예외도 있으나 많은 경우에, 고차 배수성분이 주로 나타나며 저차 배수성분은 고차 배수성분이 뚜렷하게 나타나는 경우에 부가적으로 나타나는 것으로 알려져 있다^(12,18). 결국 kurtosis는, 비선형성에 의한 응답의 왜곡에 대해 변위, 속도, 가속도 순으로 점점 더 민감해진다고 말할 수 있다. 따라서 비선형성을 해석하고자 하는 사람은 분석하고자 하는 대상에 있어서 어떤 형태의 신호가 의미있는지를 먼저 판단하고 신호의 종류를 결정할 필요가 있다. 본 연구의 모의실험에서는 기계계의 변위신호만을 다뤘으며 신호의 종류에 대한 비교는 하지 않았다.

4. 여러가지 비선형성 탐색에의 응용

4차 모멘트가 과연 비선형성의 탐색에 효과적으로 적용될 수 있는지 그 타당성을 확인하기 위해, 다음의 3가지 비선형성을 갖는 1자유도계에 대해 시뮬레이션을 수행하였다. 비선형성으로는 식 (10)과 같이 1자유도 기계계에 추가적으로 각각 변위의 3제곱에 비례하는 강성(cubic stiffness), 속도의 제곱에 비례하는 유체감쇠(quadratic damping), 마찰(Coulomb friction)을 고려하였다. 이 때, 비선형항의 효과를 제외한 선형계만의 고유진동수는 1.233 Hz였다.

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + g(y, \dot{y}) &= u \\ (m=1 \text{ kg}, c=2 \text{ N}\cdot\text{sec/m}, k=60 \text{ N/m}) \\ NL \text{ I} : g(y, \dot{y}) &= 60y^3 \\ NL \text{ II} : g(y, \dot{y}) &= 6|\dot{y}|\dot{y} \\ NL \text{ III} : g(y, \dot{y}) &= 0.2\text{sgn}[\dot{y}] \end{aligned} \quad (10)$$

위의 세 가지 모형에 대해 입력의 진폭을 0.1 N에서 50 N까지 변화시키면서, 각 경우에 대해 정현과 신호를 0.1 Hz에서 3 Hz까지 일소(sweeping)하면서 응답의 변위를 구하여 4차 모멘트를 계산하였다. 변위의 적분계산에는 IMSL적분 알고리즘인 'DVERK'를 사용하였다. 데이터의 갯수는 1000개였으며 이에 대한 95%신뢰구간은 1.5 ± 0.009 였다. 이 때, 각 경우에 대해 sig함수도 계산하여 kurtosis에 의한 결과와 서로 비교하였다. sig함수를 적용할 때, 비선형

여부의 판단을 위한 임계치라든가 기준은 없지만, 5%를 사용하였다. 이 값이 작을수록 미세한 비선형 왜곡을 감지할 수 있겠으나 잡음의 존재를 고려할 때 이 값보다 작게 잡는 것은 무의미하다고 하겠다.

4.1 변위의 세제곱에 비례하는 강성 (cubic stiffness)

변위의 세제곱에 비례하는 강성은 강화(hardenig) 스프링의 모형으로 많이 사용되며 더핑진자(Duffing's oscillator)의 특별한 경우를 나타낸다. 이 모형은 3차 배수성분이 매우 강하게 나타나므로 가진주파수가 선형계의 고유진동수와 고유진동수의 약 1/3 정도 될 때 비선형성이 강하게 나타나는 것으로 알려져 있다⁽¹²⁾.

주어진 비선형계의 주파수 특성의 경향을 관찰하기 위해, Fig. 2에는 입력의 크기가 5 N, 20 N인 경우에 대해서 각각 kurtosis와 sig함수를 계산하여 도시하였다. 두 가지 그림에서 알 수 있듯이 계의 선형 고유진동수(1.233 Hz)의 약 1/3되는 주파수에서 비선형성이 강조됨을 볼 수 있다. 입력의 크기가 5 N인 경우에는 비선형성에 의한 왜곡이 거의 없어서 kurtosis와 sig함수 모두 계의 거동이 선형범위에는 있다고 지시하고 있다. 그러나 입력의 진폭이 20 N에 이르면 kurtosis로 판단할 때는 0~1.6 Hz, sig함

수로 볼 때는 0.3~0.55 Hz 범위에서 각각 계의 거동을 비선형으로 간주하고 있다. sig함수는 판단기준은 1% 정도로 한다면 kurtosis와 비슷한 결론을 내릴 수 있으나, 이는 전술한 바와 같이 잡음의 영향을 고려할 때 너무 작은 값이므로 무의미하다고 하겠다.

실제로 식 (10)의 선형항들(관성, 감쇠, 강성)과 비선형항이 나타내는 상대적인 크기를 특정 주파수에서 입력의 진폭을 바꾸면서 계산하였으며 결과를 Table 2에 정리하였다. 표에서 입력의 진폭이 20 N이고 주파수가 1.2 Hz인 특정 경우에 대한 결과를 보면 비선형항의 기여도가 전체의 14%가 넘고 있는데도 sig함수는 2% 정도밖에 안되는 결과를 보이고 있다. 반면에 kurtosis는 비선형성의 존재를 지시하고 있으므로 kurtosis가 sig함수보다 비선형성에 의한 왜곡에 더 민감하다는 결론을 내릴 수 있다.

Fig. 3에는 주어진 비선형계가 비선형 거동을 나타내는 입력의 진폭과 주파수의 영역을 kurtosis와 sig함수를 이용하여 결정하여 도시하였다. 어렵게 보이는 영역이 비선형성이 나타나는 영역인데 sig함수의 경우 그 크기에 따라 등고선 형태로 그 정도를 나타냈다. 두 가지 그림에서 공통적으로 나타나는 특성으로는, 진폭과 관련하여 생각할 때 선형 고유진동수의 약 1/3 되는 주파수에서 가장 먼저 비선형 영역으로 진입한다는 것이다. 이 주파수(0.4 Hz)에 국한시켜 보면 5 N 정도의 입력 진폭에 대해 kurtosis는 비선형 거동을 지시하고 있으나 sig함수는 Tomlinson이 지적했듯이⁽¹³⁾ 계산과정이 복잡할뿐 잡음에 취약하고 왜곡량에 대한 민감도도 낮아서 kurtosis에 비해 그 효용성이 떨어짐을 알 수 있다.

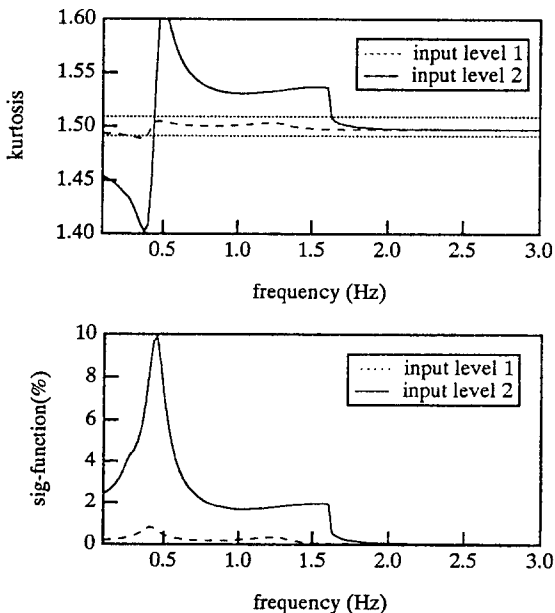
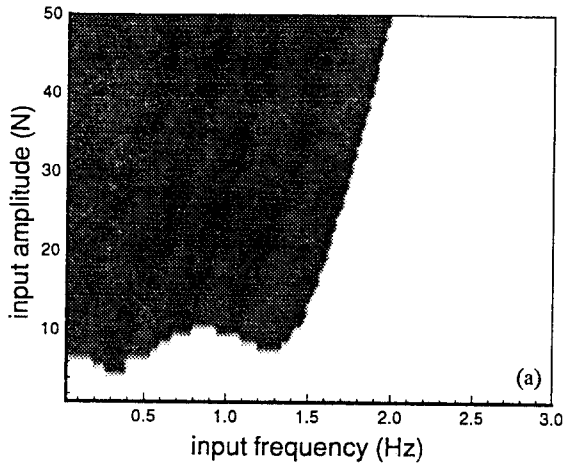


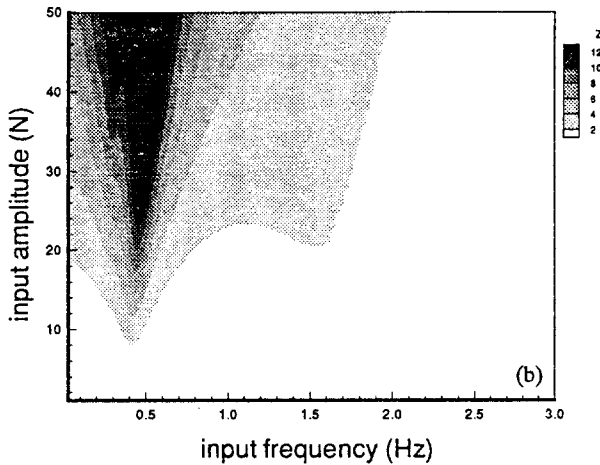
Fig. 2 Comparison of capabilities of kurtosis and sig-function to detect cubic stiffness nonlinearity (input level 1; 5 N, input level 2; 20 N)

Table 2 Relative magnitudes of linear terms and a cubic stiffness nonlinear term for sinusoidal inputs of frequency 1.2 Hz at several amplitudes

Input amplitude	Linear term			Nonlinear term
	$m\ddot{y}$	$c\dot{y}$	ky	$k_N y^3$
1 N	41.9	11.4	46.5	0.15
5 N	40.7	11.1	45.2	2.96
20 N	36.2	9.77	39.7	14.4



(a) By kurtosis (white-linear region, gray-nonlinear region)



(b) By sig-function

Fig. 3 Determination of region of frequency and input amplitude where the system containing cubic stiffness generates nonlinear responses

4.2 속도의 제곱에 비례하는 감쇠 **gkd**(quadratic damping)

속도의 제곱에 비례하는 감쇠는 유체에 의한 저항력(drag force)의 모형으로 많이 사용되는데 이 모형에 대한 거동은, 수식내에 절대값 기호가 포함되어 있어 그 해를 해석적으로 구하기가 힘들며, 단지 진동계와 같은 경우에 속도의 크기가 커질수록 비선형 감쇠항의 기여정도가 다른 항보다 더 커진다는 물리적 특성정도를 파악할 수 있을 뿐이다.

Fig. 4에는 입력의 크기가 1 N, 20 N인 경우에 대해서 각각 kurtosis와 sig함수를 주파수에 따라 계산하여 도시하였다. 두 가지 그림은 비선형 강성의 경

우와 마찬가지로 계의 선형 고유진동수(1.233 Hz)의 약 1/3되는 주파수에서 비선형성이 강조되며 주파수가 감소 또는 증가함에 따라 그 경향이 약해진다는 것을 알 수 있다. 입력의 크기가 1 N인 경우에는 두 가지 함수 모두 계의 거동이 선형범위에 있다는 것을 알 수 있다. 입력의 진폭이 20 N인 경우, kurtosis로 판단할 때는 0.1~1.75 Hz에서 비선형 거동을 나타내는데 반해, sig함수로 볼 때는 전 영역에서 4% 미만의 값을 보이고 있다. 하지만 그 경향만은 유사함을 알 수 있다.

식 (10)의 선형항과 비선형 감쇠항이 나타내는 상대적인 크기를 0.6 Hz의 주파수에서 입력의 진폭을 변화시켜가며 계산한 결과를 보면 입력의 진폭이 20 N인 경우 비선형항의 상대적인 크기는 6.5% 정도였으며 이에 대한 sig함수는 3.5% 정도였다. 앞 절의 강성 비선형성과 마찬가지로 감쇠의 비선형성에 대해서도 kurtosis가 sig함수보다 비선형성에 의한 왜곡에 더 민감함을 알 수 있다.

Fig. 5에는 감쇠에 대한 비선형계가 비선형 거동을 보이는 입력진폭과 주파수의 영역을 kurtosis와 sig함수를 이용하여 각각 결정하여 도시하였다. 어렵게 보이는 영역이 비선형 거동이 나타나는 영역인데 sig함수의 경우에는 그 크기에 따라 등고선 형태로 그 정도를 나타냈다. 두 가지 그림에서 공통적으로 나

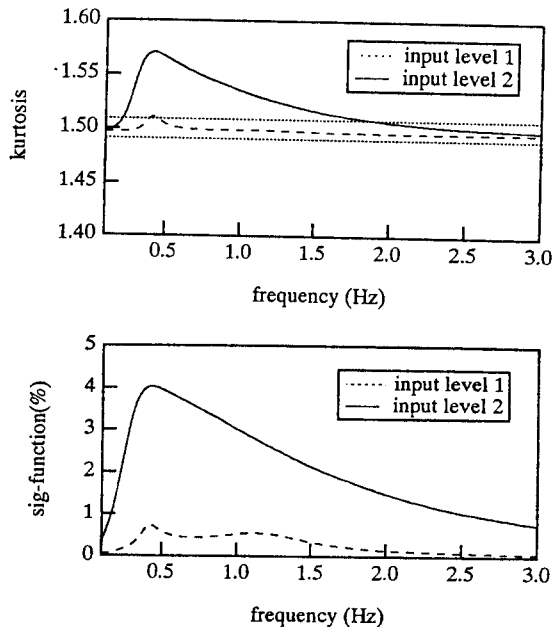
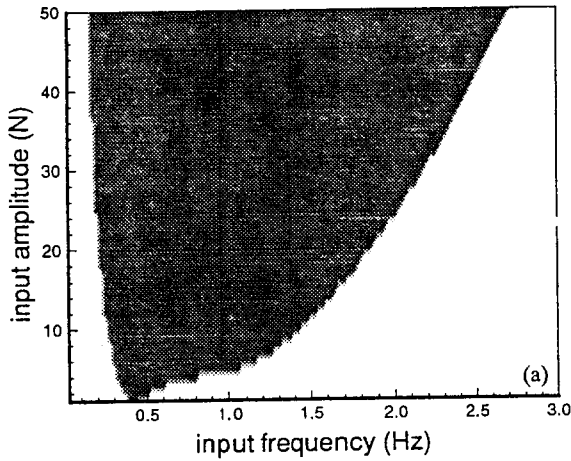
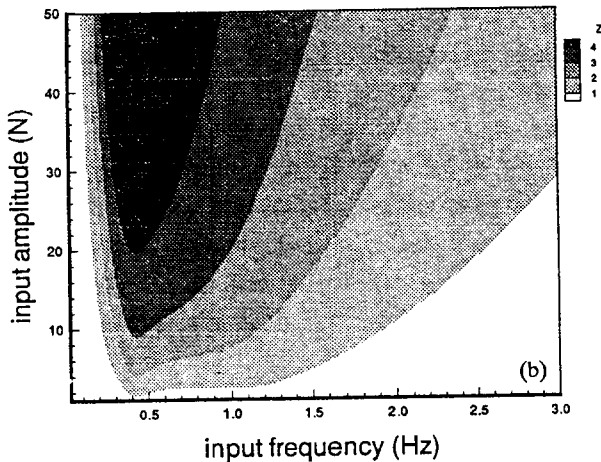


Fig. 4 Comparison of capabilities of kurtosis and sig-function to detect quadratic damping nonlinearity (input level 1 ; 1 N, input level 2 ; 20 N)



(a) By kurtosis (white-linear region, gray-nonlinear region)



(b) By sig-function

Fig. 5 Determination of region of frequency and input amplitude where the system containing quadratic damping generates nonlinear responses

Table 3 Relative magnitudes of linear terms and a quadratic damping nonlinear term for sinusoidal inputs of frequency 0.6 Hz at several amplitudes (%)

Input amplitude	Linear term			Nonlinear term
	$m\ddot{y}$	$c\dot{y}$	ky	$c_N\dot{y} \dot{y} $
1 N	14.9	8.78	76.3	0.026
5 N	16.2	8.59	74.6	0.61
20 N	27.0	6.89	59.6	6.50

타나는 특성으로는, 앞 절의 강성 비선형성의 경우와 마찬가지로 선형 고유진동수의 약 1/3 되는 주파수에서 가장 먼저 비선형 영역으로 진입한다는 것이다. 특기할 사항은 주파수가 0.2 Hz 이하의 범위에서는 비선형왜곡이 전혀 발생하지 않고 있다는 것이다. 이에 대한 이유는 비선형성이 속도와 관련되어 나타나므로 속도가 0에 가까운 저주파수 영역에서 그 효과가 거의 나타나지 않기 때문이라고 사료된다.

4.3 쿨롱 마찰력(Coulomb friction)

앞에서 고찰해 본 두 가지 비선형성과는 달리 쿨롱 마찰력은, 질량의 크기에 따라 일정한 값을 갖고 거동의 진폭에 상관없이 속도의 방향에 의해서만 그 작용 방향이 결정된다는 차이가 있다. 따라서 입력의 증가에 따라 거동의 진폭이 커지면 마찰력에 의한 상대적인 중요도는 오히려 줄어들게 되며, 입력의 진폭이 줄어들수록 비선형성은 강조된다.

Fig. 6에는 입력의 크기가 50 N, 5 N인 경우에 대해서 각각 kurtosis와 sig함수를 계산하여 도시하였다. 두 가지 그림은 앞의 두 가지 비선형성의 경우와 마찬가지로 계의 선형 고유진동수(1.233 Hz)의 약 1/3되는 주파수와 그 이하의 범위에서 비선형성이 강조됨을 알 수 있다. 선형 고유진동수 이상의

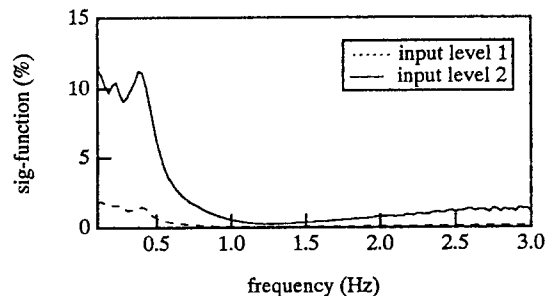
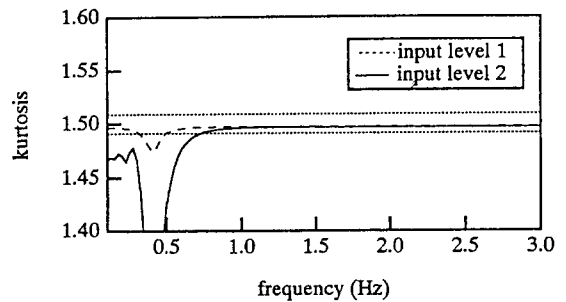
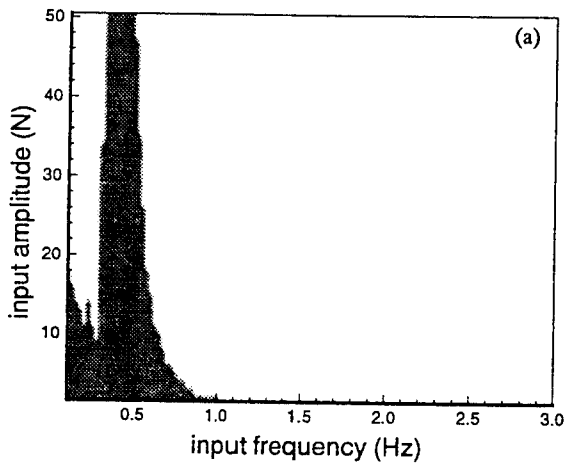


Fig. 6 Comparison of capabilities of kurtosis and sig-function to detect Coulomb friction nonlinearity (input level 1 ; 50 N, input level 2 ; 5 N)

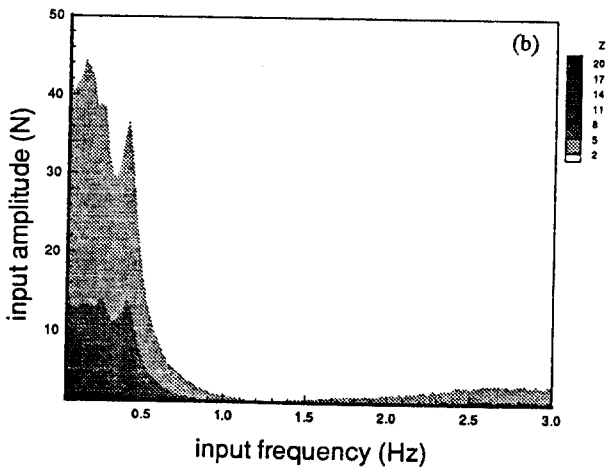
주파수에서는 비선형 왜곡이 거의 발생하지 않는다. 이에 대한 이유로는, 앞의 두 가지 비선형성의 경우도 마찬가지로이겠지만 1자유도의 진동계에서는 선형 고유진동수 이상에서 관성항의 기여가 커지고 상대적으로 복원력항들(마찰력항 포함)의 기여가 상대적으로 줄어들기 때문이다. 특성 곡선들이 떨림현상을 보이는 이유는 신호의 적분시에 속도의 방향에 따라 마찰력이 급변하므로 수렴조건을 충분히 만족시키지 못하는데서 오는 현상으로 생각된다. 0.4 Hz 부근에서는 입력의 크기가 50 N에 이르러도, kurtosis로 볼 때, 여전히 거동에 비선형성이 실려있음을 알 수 있다. 이에 반해 sig함수는 2%미만의 값을 보이고

있어서 계의 거동을 선형으로 간주하고 있다. 입력의 진폭이 5 N인 경우는 kurtosis가 0~0.75 Hz, sig함수가 0~0.6 Hz에서 거동의 비선형성을 지시하고 있다. 입력주파수 0.6 Hz, 진폭 5 N인 경우에 비선형항의 상대적인 크기를 계산한 Table 4를 보면, 쿨롱 마찰력은 상대적으로 6% 정도를 나타내고 있으며 sig함수도 이와 비슷한 값을 보이고 있어 쿨롱 마찰력의 경우에는 kurtosis와 sig함수의 성능이 비슷함을 알 수 있었다.

Fig. 7에는 주어진 비선형계가 비선형 거동을 보이는 입력진폭과 주파수의 영역을 kurtosis와 sig함수를 이용하여 각각 결정하여 도시하였다. 비선형 영역이 앞의 두 가지 비선형성의 경우와 반대로 나타나고 있음을 볼 수 있다. 두 가지 그림 모두 선형 고유진동수 이하의 주파수에서 가장 먼저 비선형 영역으로 진입하고 있으며, 특기할 사항은 전술한 바와 같이 주파수가 1 Hz 이상의 범위에서는 비선형 왜곡이 거의 발생하지 않고 있다는 것이다.



(a) By kurtosis (white-linear region, gray-nonlinear region)



(b) By sig-function

Fig. 7 Determination of region of frequency and input amplitude where the system containing Coulomb friction generates nonlinear responses

4.4 결과의 검토

본 연구에서 제시한 4차 모멘트(kurtosis)를 이용하여 3가지의 비선형성을 탐색해 본 결과 다음과 같은 경향을 볼 수 있었다. 첫째는, kurtosis는 비선형항의 상대적인 크기가 전체의 1% 정도만 되도 비선형성의 존재를 지시할 수 있을 정도로 비선형 왜곡에 민감하다는 것이다. 둘째는, 세 가지 비선형성 모두 선형 고유진동수의 1/3 정도의 주파수에서 비선형성이 특히 강조된다는 사실이다. 이는 3차 배수 성분이 선형고유진동수와 일치할 때 그 진폭이 증가하여 비선형성이 강조되는 현상이다. 이에 대한 이유로는 세 가지 비선형성이 공통적으로 원점에 대해

Table 4 Relative magnitudes of linear terms and a Coulomb friction nonlinear term for sinusoidal inputs of frequency 0.6 Hz at several amplitudes (%)

Input amplitude	Linear term			Nonlinear term
	$m\ddot{y}$	$c\dot{y}$	ky	$F_{\text{sign}}[y]$
1 N	15.9	7.06	59.2	17.9
5 N	14.6	8.22	71.2	5.97
50 N	14.9	8.71	75.7	0.69

인 함수(odd function)의 특성을 갖기 때문이라고 생각된다. 이는 여러 종류의 비선형성의 응답을 관찰해 볼 때, 비선형 함수가 대칭인(symmetric) 경우에 3차 배수 성분이, 비대칭인(unsymmetric) 경우에 2차와 3차 배수 성분이 각각 강조된다는 사실로부터 간접적으로 유추할 수 있다⁽¹²⁾.

시뮬레이션 수행결과에서 짝고 넘어가야 할 또 하나의 사항으로는, 4차 모멘트의 값이 어떤 경우에 1.5보다 크고, 어떤 경우에 1.5보다 작게 되는가에 대한 원인고찰이다. 본 연구에서 다룬 3가지의 비선형은 모두 3차 배수성분이 뚜렷한 특성을 보이고 있었다. 이 때, 입력의 주파수가 변화하면서, 4차 모멘트의 값은 기본 주파수와 3차 배수 성분 사이의 위상에 따라 1.5보다 커지기도 하고 작아지기도 한다. 이와같은 현상은 두개의 주파수성분을 갖는 정현파 신호를 만들어 두 성분 사이의 위상을 변화시켜 보면 쉽게 확인할 수 있다.

먼저 감쇠 비선형성의 경우를 보면 전 주파수에서 1.5보다 큰 값을 보이는데 이와같은 현상은 기본 주파수 성분과 배수 성분 사이의 위상차가, 기본 주파수 성분을 기준으로 할 때, 180° 에 가까운 경우인데, 이 때는 비선형 효과가 신호의 평균치 부근에서 강조되며 따라서 확률밀도함수의 중앙부근이 높아지게 되고 4차 모멘트는 반대로 1.5보다 작은 값을 보이는데, 이는 두 주파수 성분 사이의 위상이 0° 에 가까운 경우이다. 이 때, 비선형성은 기본 주파수 성분의 최대 진폭 부근에서 증폭되며 확률 밀도함수의 형상이 더 평탄하게 되서 1.5보다 커지게 되는 것이다. 강성의 비선형성의 경우는 주파수에 따라 두 신호 사이의 위상이 연속적으로 변하고 있어서, 위의 두 가지 비선형성의 경우와 구별되는 특성을 보이고 있다. 두 주파수 성분 사이의 위상차는 이득(gain)과 밀접하게 관련되는 특성인데⁽¹⁹⁾, 이에 대해서는 참고문헌 (12)와 (19)에 자세히 기술되어 있으며 여기서는 설명을 생략하였다.

5. 결론 및 토론

본 연구에서는, 정현파 입력을 비선형계에 가할 때 입, 출력 간의 비례관계가 성립하지 않는 특성을 이용하여 계의 거동에 나타나는 비선형성을 탐색하는, 실용적인 방법을 제안하였다. 신호의 특성함수의 하나인 4차 모멘트(kurtosis)를 이용하는 이 방법은, 작은 양의 비선형 왜곡에 특히 민감하여 실제로 비선형성의 정도가 그리 크지 않은 기계계의 비선형

성 탐색에도 유용하게 사용될 수 있었으며, 비선형계의 주파수 관련 특성도 간단히 예측해 볼 수 있었다.

1자유도계의 복원력항에 존재하는 3가지의 비선형성 탐색에 본 방법을 적용하고 기존의 방법인 sig함수와 비교해본 결과, 관찰된 장점은 다음과 같다. 첫째, kurtosis는 작은 양의 비선형 왜곡에도 민감하였으며, 둘째, 계가 비선형 거동을 보이는 가진력의 진폭과 주파수의 영역을 결정할 수 있어서 차후 비선형성의 규명을 위한 사전 정보를 제공할 수 있었으며, 셋째로, 계산과정이 매우 간단할 뿐만 아니라 신뢰구간이 정의되어 있어 그 적용이 매우 용이하다는 것이다.

그러나 이 방법은, 다른 여러 방법들과 마찬가지로 비선형성 존재를 위한 필요충분 조건을 동시에 제공하지 못하는 문제점이 있다. 즉, kurtosis가 1.5라도 신호는 정현파가 아닐 수 있기 때문이다. 그러나 본 연구에서 제시한 방법은 입력신호가 정현파라는 전제조건하에서 출력신호의 정현파 여부를 검사하기 때문에, 전혀 엉뚱한 신호를 정현파로 판단하는 가능성은 거의 배제될 것으로 사료된다. 또 하나의 생각할 수 있는 예외의 경우를 들면, 예를 들어, 1 Hz의 입력이 가해질 때 출력신호에 1 Hz의 성분이 거의 나타나지 않고 3 Hz 성분만 나타나는 경우가 있겠다. 이와 같은 현상은 계의 비선형성이 상당히 진전된 경우에 나타날 수 있는데, 이 문제도 출력신호와 입력신호의 주파수를 모니터링함으로써 쉽게 해결될 수 있는 문제라고 하겠다.

참 고 문 헌

- (1) Simon, M. and Tomlinson, G. R., 1984, "Use of the Hilbert Transform in Modal Analysis of Linear and Non-linear Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 96, No. 4, pp. 421~436.
- (2) Billings, S. A. and Voon, W. S. F., 1986, "Correlation Based Model Validity for Non-linear Models," *Int. J. Control*, Vol. 44, No. 1, pp. 235~244.
- (3) Mertens, M. et al., 1985, "Basic Rules of a Reliable Detection Method for Non-linear Dynamic Behavior," *Proc. 10th Int. Sem. on Modal Analysis*, K. J. Leuven, Pt IV.
- (4) Bendat, J. S., 1990, *Nonlinear System Analysis and Identification from Random Data*, John Wiley

- and Sons.
- (5) Lai, H. Y. and Hsieh, S. H., 1987, "Identification and Quantification of System Non-linearity through Response Data," 5th IMAC, pp. 1452 ~ 1459.
- (6) Kim, W. J. and Park, Y. S., 1993, "Nonlinearity Identification and Quantification Using an Inverse Fourier Transform," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 7, pp. 239~256.
- (7) Ewins, D. J., 1984, Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press.
- (8) Jang, H. -K., 1994, "Linear and Nonlinear ARMAX Modeling approach in Nonlinearity Identification," Ph. D. Dissertation, Dept. of Mechanical Eng., KAIST.
- (9) Braun, S. ed., 1986, Mechanical Signature Analysis-Theory and applications, Academic Press.
- (10) Chen, C. T., 1970, Linear System Theory and Design, Holt-Saunders.
- (11) Curtis, C. W., 1974, Linear Algebra: an introductory approach, 3rd ed., Allyn and Bacon.
- (12) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, Non-linear Oscillations, John Wiley & Sons.
- (13) Tomlinson, G. R., 1988, "Nonlinearity in Dynamical Systems," CISM Courses and Lectures, No. 296-Application of System Identification in Engineering, edited by Natke, H. G., Springer Verlag.
- (14) Mood, A. M. et al., 1974, Introduction to the Theory of Statistics, 3rd ed., McGraw Hill.
- (15) Fisher, R. A., 1929, "Moments and Product Moments of Sampling Distribution," Proceedings of London Mathematics Society, Series 2, Vol. 30, pp. 199~239.
- (16) Pearson, E. S., 1930, "A Further Development of Tests for Normality," Biometrika, Vol. 22, pp. 239~249.
- (17) Wishart, J., 1930, "The Derivation of Certain High Order Sampling Product Moments from a Normal Population," Biometrika, Vol. 22, pp. 224 ~ 238.
- (18) Harris, C. M., 1988, Shock and Vibration Handbook, 3rd ed., McGraw Hill.
- (19) Billings, S. A. and Tsang, K. M., 1989, "Spec-

tral Analysis for Non-linear Systems, Part II: Interpretation of Non-linear Frequency Response Functions," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 3, pp. 319~339.

부 록

A. Kurtosis와 Sig함수의 성능 비교

정현파 가진 $U \cdot \sin(2\pi at)$ 에 대한 비선형계의 응답의 형태는 매우 다양하므로 일반적인 경우에 대하여 kurtosis와 sig함수의 비선형 왜곡에 대한 민감도를 비교한다는 것은 매우 어려운 일이라고 할 수 있다. 따라서, 여기서는 가장 일어나기 쉬운 상황에서 식 (A1)과 같이 가진 주파수 이외에 또하나의 주파수 성분이 실려있는 비선형 응답에 대하여 고찰하였다.

$$y(t) = A \sin(2\pi at + \phi_a) + B \sin(2\pi \beta t + \phi_\beta) \quad (A1)$$

여기서, 제2의 주파수 성분 β 는 가진 주파수 a 와 다르고 계의 비선형성에 의해 왜곡되어 발생하는 성분을 의미한다. A 와 ϕ_a 는 가진 주파수 성분에 대한 진폭과 위상이고 B 와 ϕ_β 는 각각 제2 주파수 성분에 해당하는 진폭과 위상이다. 이와 같이 표현된 응답에 대한 kurtosis와 sig함수는 각각 본문의 식 (4)와 (5)의 정의에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$kurtosis(a) = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \{A \sin(2\pi at + \phi_a) + B \sin(2\pi \beta t + \phi_\beta)\}^4 dt}{\left[\frac{1}{T} \int_0^T \{A \sin(2\pi at + \phi_a) + B \sin(2\pi \beta t + \phi_\beta)\}^2 dt \right]^2} \quad (A2)$$

$$sig\text{-function}(a) = \frac{\int_0^T \{B \sin(2\pi \beta t + \phi_\beta)\}^2 dt}{\int_0^T \{A \sin(2\pi at + \phi_a) + B \sin(2\pi \beta t + \phi_\beta)\}^2 dt} \quad (A3)$$

이 때, 전체 기록시간 T 가 해당 주파수의 주기 T_a ($=1/a$)보다 충분히 크다면 위상에 의한 효과는 무시되며,⁽⁹⁾ kurtosis와 sig함수는 다음과 같이 진폭 A 와 B 로만으로 표현된다.

$$kurtosis(a) = 1.5 \times \frac{(A^4 + 4A^2B^2 + B^4)}{(A^2 + B^2)^2} \quad (A4)$$

$$sig\text{-function}(a) = \frac{B^2}{A^2 + B^2} \quad (A5)$$

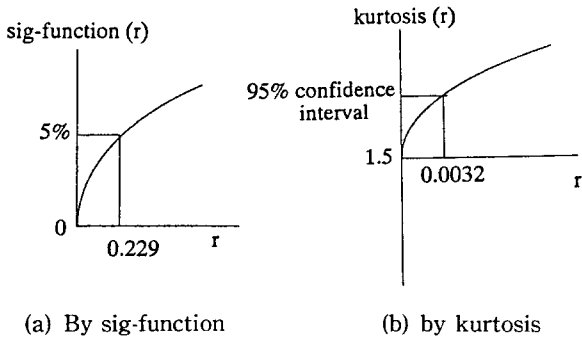


Fig. 8 Comparison of the thresholds for the judgement of existence of nonlinearity by the two variables

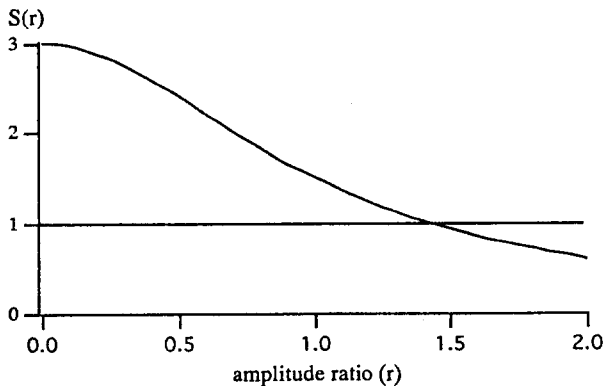


Fig. 9 Relative performance of kurtosis and sig-function in detecting nonlinear distortions

3차 배수성분(harmonics)이 나타나는 경우($\beta=3\alpha$)에 한하여, 식 (A4)의 분자는 $(A^4+4A^2B^2+B^4-\frac{4}{3}A^3B)$ 와 같이 표현된다.

위 식 (A4), (A5)에서 비선형 성분에 의한 왜곡량은 진폭 B 로 나타낼 수 있는데, 이를 가진 주파수 성분의 진폭 A 와의 상대적인 양($r=B/A$)으로 정의하고 두 식을 진폭 A 로 정규화(normalize)하면 다음과 같이 정리된다.

$$kurtosis(a) = 1.5 \times \frac{(1+4r^2+r^4)}{(1+r^2)^2} \quad (A6)$$

$$sig\text{-function}(a) = \frac{r^2}{1+r^2} \quad (A7)$$

1000개의 데이터로 kurtosis를 계산할 때, 95% 유의수준에 대한 신뢰구간은 3.2절에서 언급한 바와 같이 1.5 ± 0.009 가 된다. 이 범위를 벗어나기 위한 상

대적인 왜곡량 r 은 Fig.8을 볼 때, 0.0032가 된다. 즉, 제2 주파수의 성분의 가진성분에 대한 상대적인 진폭이 0.0032(0.32%) 이상이 되면 계의 응답을 더 이상 정현파로 볼 수 없게 된다는 뜻이다. 그러나 sig함수의 경우를 보면, r 이 0.229가 되어 비로소 5%가 넘게 된다. 즉 왜곡 성분의 상대적인 크기가 가진 주파수 성분의 22.9%가 되어 sig함수의 값이 5%가 된다. 물론 sig함수를 이용하는 경우에 임계치를 낮추면 되겠지만 5%미만으로 선저했을 때, 잡음 등의 영향과 구분하기 힘든 문제점이 있다. 반면에 kurtosis는 3.1절에서 언급했듯이 잡음의 영향을 크게 받지 않는 장점이 있다. 아래의 Fig. 8에는 kurtosis와 sig 함수의 비선형성 판단을 위한 임계치를 도시하였다.

Kurtosis와 sig함수는 각각 상대적인 진폭비에 대해 정규화된 식으로 표현되었으므로 두 변수의 상대적인 비로 식 (A8)과 같이 비선형 왜곡량에 대한 상대적인 성능을 표현할 수 있다.

$$S(r) = \frac{kurtosis(a)}{sig\text{-function}(a)} = 1.5 \times \frac{1+4r^2+r^4}{r^2(1+r^2)} \quad (A8)$$

Fig. 9에서는 $S(r)$ 을 ($0 < r < 2$)의 범위에 대해 계산하여 도시하였다. 이 그림을 보면 비선형 왜곡량이 특히 작을 때 kurtosis의 상대적인 성능이 뛰어난 것을 알 수 있다. 그러나, $r > 1.5$ 의 범위에서는 kurtosis의 상대적인 성능이 sig함수에 뒤떨어짐을 보이고 있다. 여기서 $r=1.5$ 라고 한다면 배수 성분이 기본 가진 주파수 성분의 1.5배의 크기를 갖는 것을 의미한다. 이와 같은 상황은 비선형성의 정도가 상당히 큰 경우로서 우리가 일반적으로 대하는 물리적인 계에서는 일어나기 힘든 상황이라고 하겠다. 또, 실제로 일어난다고 하더라도 이 정도의 비선형성이라면 신호를 모니터링하거나 어떤 방법을 사용하더라도 비선형 존재여부의 규명이 수월할 것이다.

본 연구에서의 목적은 특정 주파수에서 입력의 진폭이 얼마 이상이 되어 계의 거동이 비선형 영역으로 들어가는 지를 알고자 하는 것이다. 따라서 비선형의 왜곡량이 작은 경우에 비선형여부를 판단하는 것이 특히 중요하며 이를 위해서 kurtosis는 매우 효과적인 도구가 된다는 것을 알 수 있다.