

〈論 文〉

# 2개의 원형구멍이 있는 4변고정, 등방성 정사각형 판의 자유진동해석

## Free Vibration Analysis of 4 Edges Clamped, Isotropic Square Plates with 2 Collinear Circular Holes

이 영 신\* · 이 윤 복\*\*

Lee Young-Shin and Lee Youn-Bok

〈1993년 10월 6일 접수 ; 1994년 6월 27일 심사완료〉

### ABSTRACT

This work presents the experimental and finite element analysis results for the free vibration of 4 edges clamped, isotropic square plates with 2 collinear circular holes. Natural frequencies of finite element analysis are obtained for the complete square plate, the square plates with a central circular hole and the square plates with 2 collinear circular holes. And natural frequencies are experimentally measured for the complete square plate, the square plate with a central circular hole ( $d=150$  mm) and the square plates with 2 collinear circular holes. Agreement between experimental and FEM results is excellent. Mode shapes in special case are presented. The conclusions of the study are as follows. There is little variation of nondimensional frequency parameters for the first six mode when the aspect ratio of circular hole is less than 1/6 in the isotropic square plates with 2 collinear circular holes. And the first nondimensional frequency parameter doesn't vary as the aspect ratio of circular hole increase.

#### 기 호 설 명

$a$  : 판의 길이  
 $a_1$  : 시편의 총길이  
 $d$  : 원형구멍의 직경  
 $D$  : 굽힘 강성  
 $d/a$  : 원형구멍 형상비  
 $E$  : 탄성계수  
 $f$  : 고유진동수  
 $h$  : 판의 두께  
 $h/a$  : 판의 두께비  
 $[K]$  : 전체좌표계의 강성행렬  
 $l$  : 셀요소의 최대길이  
 $l/h$  : 셀요소의 두께비  
 $[M]$  : 전체좌표계의 질량행렬  
 $s, r, t$  : 국부좌표계

$W$  : 판의 처짐  
 $x, y, z$  : 요소좌표계  
 $X, Y, Z$  : 전체 좌표계  
 $\nabla^2$  : 라플라스 연산자  
 $\nabla^4$  : 이중조화 미분연산자  
 $\lambda^2$  : 무차원 진동수 매개변수  
 $\rho$  : 밀도  
 $\nu$  : 프와송비  
 $\omega$  : 고유 원 진동수

### 1. 서 론

많은 공학자들은 기계구조물의 기본요소로 사용되는 사각형판의 정적, 동적해석<sup>(1)</sup>을 수행해 왔다. 그러나 기계구조물의 형상이 점점 복잡화됨에 따라 초기에 가장 단순한 경우의 해를 구하고, 그후 실제적이고 복잡한 설계에 있어서 단순한 해를 기초로 하여 발전시키는 공학적 접근방법이 필요하게 되었다.

\*정회원, 충남대학교 공과대학 기계공학과

\*\*정회원, 국방과학연구소

실제 설계에서는 불연속부가 존재하는 구조물을 대상으로 하기 때문에 개구부(cutout)를 지닌 판의 정적 및 동적거동 이해가 매우 중요하다. 개구부를 지닌 판은 자동차, 항공기, 우주선, 건축 구조물, 수송차량, 선박 및 토목 구조물 등에 구조적 요소로 광범위하게 사용되고 있다. 개구부는 장비결합부, 창문, 환기구멍, 정비용 구멍과 같은 기능적 요구, 구조물의 중량감소, 다른 부품으로의 접근 용이성 및 방진설계를 위해 적용되고 있다.

원형구멍이 있는 판의 동적해석에 대한 외국의 연구동향은 다음과 같다.

1952년 Kumai<sup>(2)</sup>는 1개의 구멍이 있는 고정지지 정사각형판을 최소자승점 매칭법으로 고유진동수와 절선형태를 구하였으며, 1958년 Takahashi<sup>(3)</sup>는 1개의 원형구멍이 있는 고정지지 사각형판에 대하여 보의 처짐함수와 레일리-리프즈법으로 무차원진동수 매개변수를 구하였다. 1961년 Joga Rao와 Pickett<sup>(4)</sup>는 대수다항식과 이중조화 특이함수를 사용하여 레일리-리프즈법으로 1개의 원형구멍이 있는 단순지지 정사각형판의 무차원진동수 매개변수를 구하였으며, 1968년 Anderson 등<sup>(5)</sup>은 1개의 원형구멍이 있는 고정지지 정사각형판을 유한요소 해석으로 1차 및 4차의 무차원 진동수 매개변수를 구하였다. 1975년 Hegarty와 Ariman<sup>(6)</sup>은 중앙에 1개의 원형구멍이 있는 고정지지 및 단순지지 정사각형판의 자유진동 문제를 최소자승법 매칭법으로 연구하였으며, 1987년 Laura 등<sup>(7)</sup>은 특성다항식의 처짐함수를 사용한 이론 해석과 실험을 통하여 중앙에 1개의 원형구멍이 있고 경계조건이 탄성구속인 사각형판의 2차 및 4차 모드의 진동해석을 수행하였다. 1993년 Liew<sup>(8)</sup>는 1개의 원형구멍이 있는 정사각형판에 대하여 경계조건이 내부 및 외부가 고정지지 되었을때 1차부터 5차 모드까지 자유진동해석을 레일리-리프즈법과 라그랑지 승수법으로 연구하였다.

또한 국내의 연구동향을 살펴보면 다음과 같다. 1984년 이대희<sup>(9)</sup>는 1개의 원형구멍이 있는 정사각형판에 대하여 유한요소법으로 좌굴해석을 하였으며, 1985년 임장근과 김태완<sup>(10)</sup>은 원형구멍이 있는 무한평판에 대하여 하중조건에 따른 응력집중계수 최소화로부터 구멍형상의 최적화를 수행하였다. 1987년 김극천 등<sup>(11)</sup>은 단순지지 보강판에 원형구멍이 있는 경우 유한요소 해석과 충격가진 실험으로 고유진동수와 모드형상을 구하였으며, 1989년 임정식과 이영신<sup>(12)</sup>은 집중하중을 받는 4점 단순지지 사각형 다공판의 하중분포계수를 중첩법으로 수행하였다.

이와 같은 국내외 연구동향을 고찰하여 보면 현재 까지도 원형구멍이 있는 사각형판의 동적문제에 대한 해석 및 실험결과가 부족한 실정이며, 특히 2개의 원형구멍이 있는 사각형판의 동적해석은 전무한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 같은 직경의 2개의 원형구멍이 있는 4변 고정지지된 등방성 정사각형판의 자유진동특성에 대하여 유한요소 해석방법과 충격가진 실험방법을 통해 규명하였으며, 원형구멍 형상비의 변화에 따른 1차에서 6차까지의 무차원진동수 매개변수와 특정한 경우의 모드형상을 제시하였다.

## 2. 유한요소 해석

### 2.1 지배방정식

감쇠가 없는 판의 동적특성에 대한 지배방정식은 다음과 같다<sup>(13,14)</sup>.

$$\nabla^4 W + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

여기서,

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} : \text{이중조화 미분연산자}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} : \text{판의 굽힘강성}$$

$E$  : 판의 탄성계수

$h$  : 판의 두께

$\nu$  : 포와송비

$t$  : 시간

$W$  : 판의 처짐

이다. 식 (1)은 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\nabla^4 W - \lambda_i^4 W = 0 \quad (2)$$

$$\lambda_i^2 = \omega_i a^2 \sqrt{(\rho h / D)} \quad (3)$$

여기서,

$\lambda_i^2$  :  $i$ 번째 모드의 무차원진동수 매개변수

$a$  : 판의 길이

$\rho$  : 판의 밀도

$\omega_i = 2\pi f_i$  :  $i$ 번째 모드의 고유원진동수

이다. 식 (3)을 변환하면

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} = \frac{\lambda_i^2 h}{4\sqrt{3}\pi a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (4)$$

여기서,

$$\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} : \text{판의 내평면 파동속도}^{(15)}$$

이다. 원형구멍이 있는 사각형판의 고유진동수를 해석적으로 구하기 위해서는 판내부의 자유경계조건과 판외부의 고정지지 경계조건을 만족하는 처짐함수의 가정이 필요하나 내부와 외부의 기하학적 형상차이로 용이하지 않다. 따라서 본 연구의 이론적 해석방법은 유한요소법으로 결정하여 Swanson Analysis Systems사의 ANSYS 소프트웨어를 사용하였다.

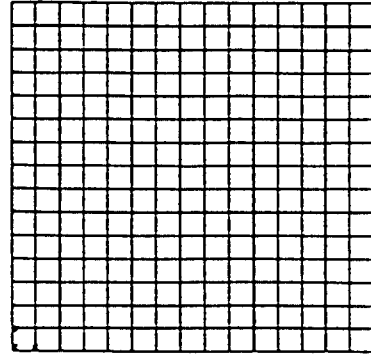
유한요소 해석과정에서의 가정으로 판은 곡률이 없고 두께가 일정하며 판의 두께비가 1/20보다 충분히 작다. 또한 판의 처짐은 두께에 비해 충분히 작으며 회전 관성력과 감쇠효과를 무시한다. 유한요소 강성방정식은 가상일의 원리를 기초로 하고 있으며, 좌표변환결과로 나타나는 질량행렬과 강성행렬이 일정하다. 경계조건은 4변 고정지지로 하여 각단에서의 처짐과 기울기가 0이다. 또한 해석상의 재료는 등방성인 Al 5083 H113이다.

### 2.2 모델링

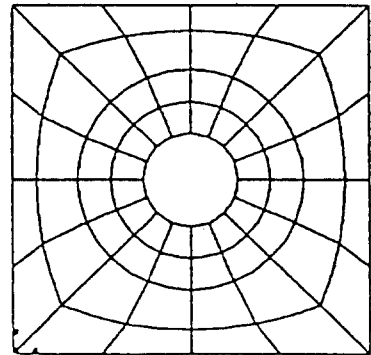
유한요소 모델은 원형구멍이 없는 정사각형평판, 중앙에 1개의 원형구멍이 있는 정사각형판 및 같은 직경의 2개 원형구멍이 있는 정사각형판의 3종류이다. 유한요소로 분할된 모델은 Fig. 1에 나타나 있다. 여기서 원형구멍이 없는 경우에는 정사각형 유한요소로 균일하게 분할하였으며, 원형구멍이 있는 경우에는 원형구멍의 주위를 동심원과 곡률반경이 큰 폐곡선으로 크게 분할하고 다시 방사선형으로 나

누었다. 따라서 원형구멍 주위는 많은 갯수의 작은 요소로 분할하였으며 전체적인 모델링된 상태가 자연스러움을 보이고 있다.

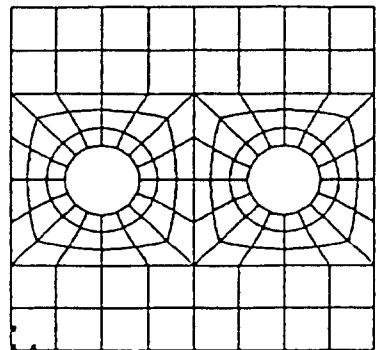
Table 1은 판의 종류에 따라 모델링된 유한요소 수, 절점수, 총 자유도수 및 마스터자유도(master degree of freedom) 수를 나타내고 있다. 여기서 마스터자유도는 유한요소 강성방정식의 질량행렬 및 강성행렬을 특정한 주대각선항의 소거방법으로 변환시키는 것을 의미한다<sup>(16,17)</sup>.



(1) Complete square plate



(2) Square plate with a central circular hole



(3) Square plate with 2 collinear circular holes

Table 1 Finite element modeling data

Type of plate	No. of element	No. of node	Total degree of freedom	Master degree of freedom	Thickness to length ratio of shell element (l/h)
Complete square plate	225	705	4230	120	4.17
Square plates with a central circular hole	64	224	1344	120	15.63
Square plates with 2 collinear circular holes	128	379	2274	120	7.81

Fig. 1 Finite element model

2.3 유한요소

해석에 사용된 유한요소는 Fig. 2와 같이 요소당 8개의 절점을 지닌 등계수(isoparametric) 셸요소인 STIF93이다. 이 요소는 한 절점당 6개의 자유도를 지니고 있으며, 요소좌표계에서 3차원의 병진운동과 회전운동으로 나타난다. 등계수요소는 요소의 기하학적 형상을 정의하는데 필요한 절점수와 영역변수를 정의하는데 필요한 절점수가 같으므로 영역변수와 요소의 기하학적 형상을 정의하는 형상함수가 같다. 따라서 이 요소는 국부좌표계, 요소좌표계 및 전체 좌표계 사이의 좌표변환에 사용되는 Jacobian 행렬을 용이하게 구할 수 있다.

따라서 유한요소구성 방정식으로부터 모드별 고유치 및 고유벡터를 계산하고 이에 따라 고유진동수 및 모드형상을 구한다. 또한 식 (3)으로부터 고유진동수를 변환하여 무차원진동수 매개변수를 산출한다. 여기서 무차원진동수 매개변수는 판의 내외부에 1개 이상의 자유단이 있는 경계조건, 판의 형상비, 원형구멍 형상비 및 재료의 Poisson비에 대한 함수이다<sup>(18)</sup>. 이러한 유한요소 해석방법으로부터 원형구멍 형상비에 따른 1차부터 6차까지의 무차원진동수 매개변수와 특정한 경우의 모드형상을 구하였다.

3. 실험

3.1 시편

실험적으로 고유진동수를 측정하기 위한 시편은 원형구멍이 없는 정사각형평판, 중앙에 1개의 원형구멍이 있는 정사각형판 및 같은 직경의 2개 원형구멍이 있는 정사각형판의 3종류로 하였다. Fig. 3은

실험에 사용된 대표적인 시편의 형상을 나타내고 있다.

시편의 크기는 얇은 판의 두께비와 고정지지용 지그를 고려하여 판의 두께를 4.8mm로 하였고, 길이가 300mm, 판내부의 원형구멍 직경을 5~150mm 범위로 하였다. 그리고 4변의 고정지지를 위한 볼트 체결부위를 적용하여 시편의 총길이를 400mm로 하였으며 시편의 갯수는 모두 15개이다. 시편의 재질

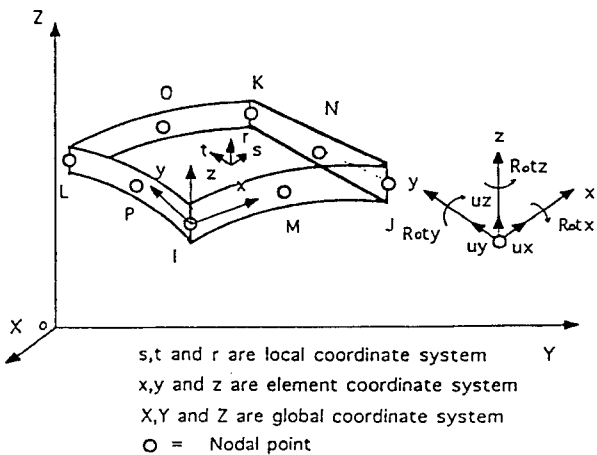
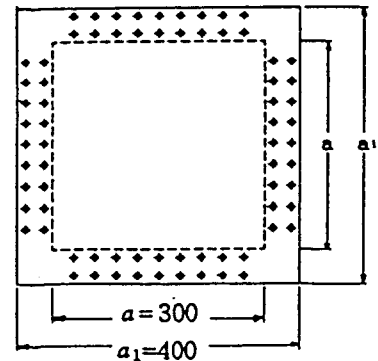
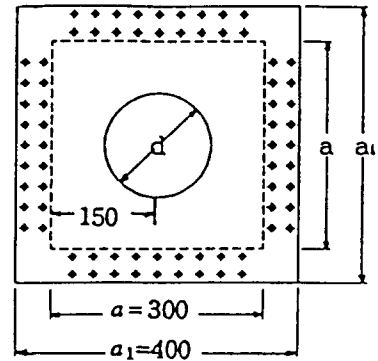


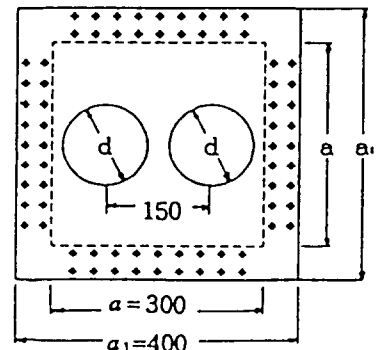
Fig. 2 Isoparametric shell element



(1) Complete square plate



(2) Square plate with a central circular hole



(3) Square plate with 2 collinear circular holes

Fig. 3 Typical configuration of specimens (unit : mm)

은 등방성 Al 5083 H113이다.

### 3.2 실험장치

실험장치는 고정지지용 지그와 진동분석장치로 구성되어 있다. 시편을 4변 고정지지하기 위한 지그는 Fig. 4와 같이 지지판(가로×세로×높이; 400 mm×400 mm×20 mm)와 블록(가로×세로×높이; 300 mm×50 mm×70 mm) 4개 및 고정판(가로×세로×높이; 300 mm×50 mm×20 mm) 4개로 되어 있다. 블록의 밑면에는 8개의 암나사가 가공되어 지지판에 고정될 수 있도록 하였으며, 윗면에는 시편을 고정시키도록 한변에 18개의 암나사가 가공되어 있다.

또한 지그의 질량이 70 kg이고 시편의 최대 질량이 1.85 kg이므로 지그에 의한 진동영향은 무시하였다.

진동분석장치는 주파수분석기, 충격해머, 신호증

폭기, 가속도계, 플로터로 되어 있다. 실험에 사용된 주파수분석기는 ONO SOKKI사의 CF-920 F. F. T. ANALYSIS SYSTEM으로 허용주파수 분석범위가 1Hz-100kHz이다. 입력신호로서 충격가진을 주기 위하여 PCB사의 086B03 SN1893 하중센서가 장착된 충격해머를 사용하였고, 판의 진동 응답신호를 측정하기 위하여 PCB사의 303A03 SN 10287 가속도계를 적용하였다. 여기서 가속도계의 질량은 약 3g으로 시편의 질량 887g~1185g에 비해 아주 작으므로 부가질량에 따른 동적특성의 변화를 무시하였다<sup>(19,20)</sup>.

입출력신호의 증폭은 ONO SOKKI사의 PS-002B와 PCB사의 Model 480D06 증폭기로 하였으며, 실험결과의 가시화를 위하여 ONO SOKKI사의 CX-337 플로터를 사용하였다.

Fig. 5는 실험준비가 완료된 상태를 나타내고 있다.

### 3.3 실험방법

실험방법은 구조물에서 좋은 주파수 응답을 얻기 위한 가장 단순하고 쉬운 방법인 충격가진 실험으로 하였다. 이 방법의 유용성은 충격에너지가 모든 주파수 범위에서 연속적으로 분포하므로 관심있는 주파수 범위내에 있는 모든 고유진동수에 가진된다는 사실이다<sup>(21)</sup>.

실험상의 고유진동수는 충격가진력에 응답하는 시편의 가속도를 주파수 분석하여 구한다. 충격가진력이 입력신호가 되고 시편의 응답 가속도가 출력신호로 되어 주파수 분석된 전달함수의 피크점이 각 모드별 고유진동수이다. 본 실험에서는 경계조건을 결정하기 위하여 볼트 체결위치와 체결볼트의 갯수를 변화시키면서 실험하였다. 그 결과 시편의 한변에 18개씩 볼트를 체결한 경우와 5개씩 체결한 경우에 고유진동수의 변화가 거의 없었다. 따라서 시편의 한변에 5개씩의 볼트를 체결하여 4변 고정지지의 경계조건으로 실시하였다.

충격가진 실험시 가속도계 및 충격해머 가진 위치는 유한요소해석의 모드형상 결과로부터 절선의 형태를 파악한 후 각 모드별 절선을 제외한 위치로 정하였다. 입출력 신호의 잡음을 줄이기 위하여 4회의 충격가진 신호를 선형적으로 평균하였다. 주파수 분석범위는 일반적으로 차량의 진동파손이 고차모드에서 발생한다는 점에서 유한요소 해석의 결과로부터 1차에서 6차까지의 고유진동수 범위인 2 kHz 이하로 결정하였다.

주파수 분석기는 선택된 주파수 범위로부터 자동

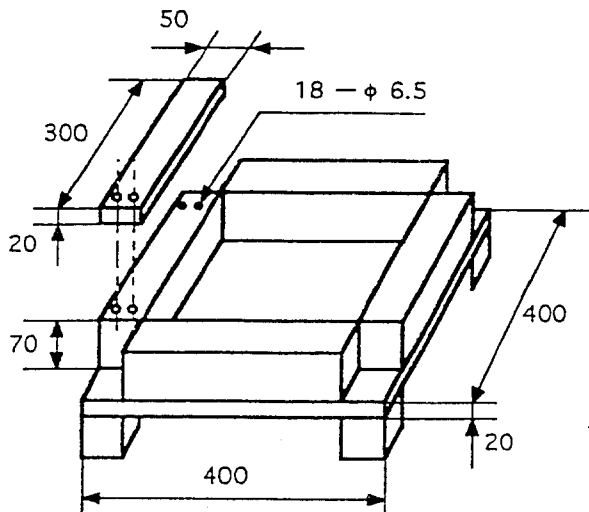


Fig. 4 A jig form used for experiment (unit : mm)

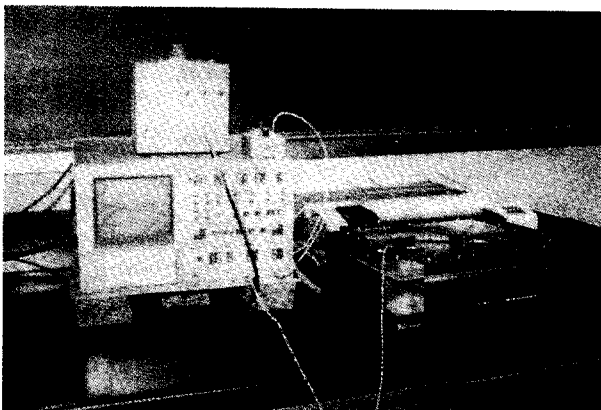


Fig. 5 Experimental set-up

적으로 입출력 신호를 0.2초 동안에 1024개의 이산 데이터를 분석하므로 주파수 분해능이 5 Hz로 설정된다. 따라서 주파수 분석결과로 측정된 고유진동수의 오차범위는  $\pm 2.5$  Hz 이다.

이러한 방법으로 고정지지된 시편에 충격가진을 주어 주파수 분석된 전달함수로부터 1차에서 6차까지의 고유진동수를 구하였다.

#### 4. 결과 및 고찰

##### 4.1 유한요소 해석결과

유한요소 해석은 판의 형상에 대하여 원형구멍이 없는 정사각형평판, 중앙에 1개의 원형구멍이 있는 정사각형판 및 같은 직경의 2개 원형구멍이 있는 정사각형판의 3종류로 하였다. 판의 재질은 Al 5083 H113으로 하였다.

판의 형상에 따라서 원형구멍 직경의 변화에 대한 1차에서 6차까지의 고유진동수를 구하였으며 특정한

**Table 2** Natural frequencies of finite element analysis for square plates with a central circular hole (Al 5083 H113)

Diameter of circular hole $d$ (mm)	Natural frequency in vibration mode (Hz)					
	f1	f2	f3	f4	f5	f6
0	478.3	974.3	974.7	1436.7	1746.5	1755.4
5	469.2	975.8	975.8	1465.6	1741.3	1758.6
10	468.7	975.2	975.2	1463.6	1737.7	1751.5
20	467.4	973.7	973.8	1456.8	1727.5	1729.9
30	466.3	970.4	970.4	1428.2	1716.2	1718.9
40	466.2	963.0	963.0	1439.5	1704.2	1735.7
50	468.6	952.1	952.1	1428.5	1691.1	1766.9
60	473.8	937.0	937.1	1416.4	1676.7	1817.2
70	482.3	919.1	919.2	1402.7	1660.1	1885.5
80	494.7	900.6	900.7	1387.1	1640.3	1970.1
90	511.2	883.6	883.2	1369.6	1615.4	2077.8
100	532.0	870.5	870.5	1350.2	1587.1	2130.6
110	589.0	865.1	865.2	1329.3	1566.1	2112.0
120	591.5	866.4	866.5	1309.6	1544.9	2094.9
130	631.0	876.8	876.9	1292.9	1531.6	2074.9
140	678.6	897.6	897.6	1281.5	1529.9	2055.1
150	735.8	929.9	929.9	1277.4	1542.9	2041.9

경우의 모드형상을 제시하였다.

그 결과로 첫째, 중앙에 1개 원형 구멍이 있는 정사각형판의 유한요소 해석결과는 Table 2와 Fig. 6에 나타나 있다.

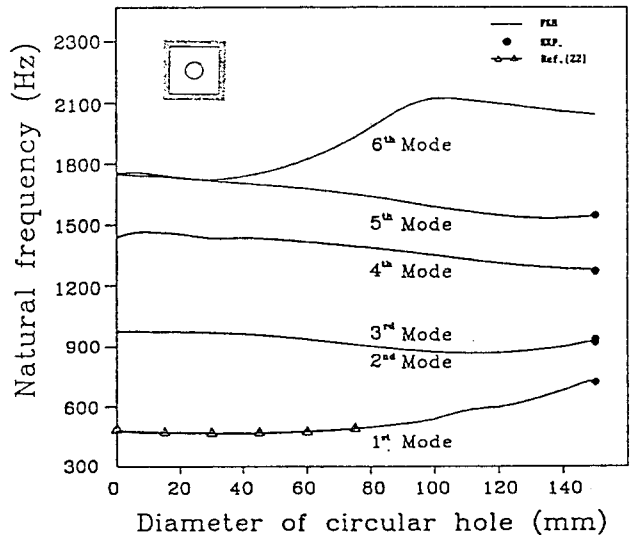
1차 고유진동수는 원형구멍 직경이 0~40 mm의 영역에서 감소하고 50~150 mm의 영역에서 증가하고 있다.

이러한 경향은 Kumai<sup>(2)</sup>, Anderson<sup>(5)</sup> 및 Hegarty<sup>(6)</sup>의 결과와 잘 일치하고 있다.

2차 및 3차 고유진동수는 판의 기하학적 대칭성으로 인하여 동일하게 나타나고 있으며 고유진동수의 크기는 원형구멍 직경 0~20 mm 영역에서 거의 변화가 없고 30~120 mm 영역에서 점차 감소하다가 그 이후에 증가함을 보이고 있다.

4차 고유진동수는 원형구멍 직경 0~20 mm 영역에서 조금 증가하다가 그 이후에 점차 감소한다. 5차 및 6차 고유진동수는 원형구멍 직경 0~30 mm 영역에서 고유진동수의 크기가 거의 유사하게 나타나며, 그 이후에 분기가 되어 5차 고유진동수는 점차로 감소하고 6차 고유진동수는 급격히 증가하다가 원형구멍직경 120 mm 이후에 조금 감소하는 경향을 보이고 있어서 확실한 진동모드를 구별할 수 있다. 여기서 6차모드의 실험결과를 나타내지 않은 이유는 모든 실험의 주파수 분해능을 5 Hz로 일치시키기 위하여 2 kHz 이하로 측정하였으며 그때의 6차 모드의 값이 2 kHz 이상이기 때문이다.

둘째, 같은 직경의 2개 원형구멍이 있는 정사각형



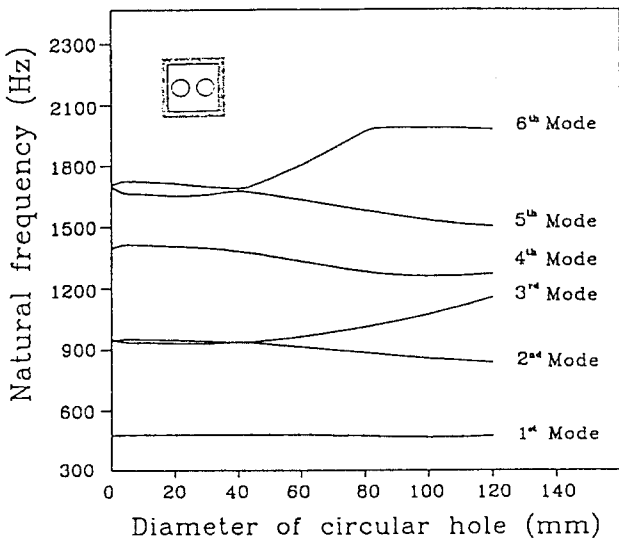
**Fig. 6** Natural frequencies of finite element analysis for square plates with a central circular hole (Al 5083 H113,  $a=300$  mm,  $h=4.8$  mm)

판의 유한요소해석결과는 Table 3과 Fig. 7에 나타나 있다.

1차 고유진동수는 원형구멍 직경 변화에 따라 거

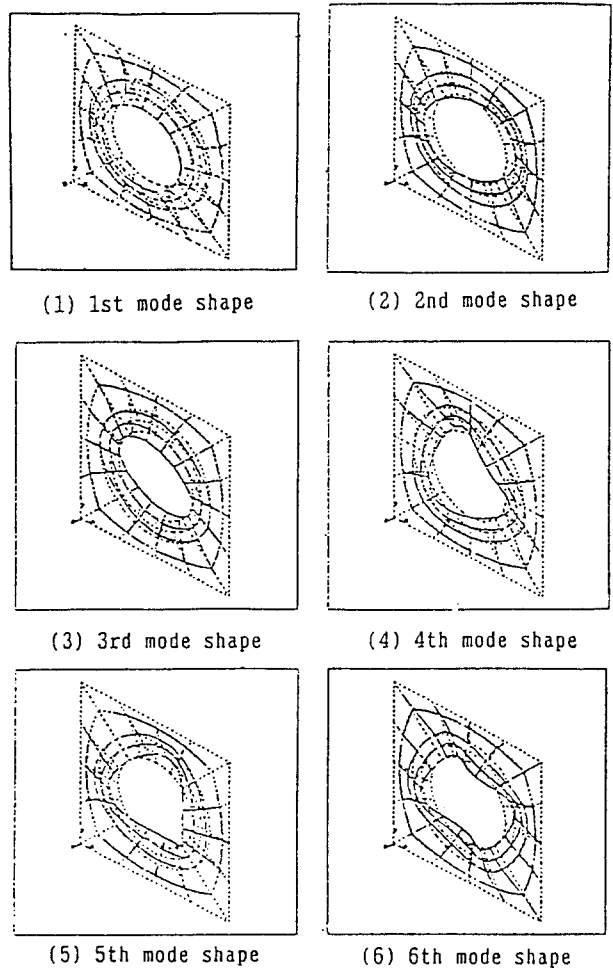
**Table 3** Natural frequencies of finite element analysis for square plates with 2 collinear circular holes (Al 5083 H113)

Diameter of circular hole $d$ (mm)	Natural frequency in vibration mode (Hz)					
	f1	f2	f3	f4	f5	f6
0	478.3	974.3	974.7	1436.7	1746.5	1755.4
5	478.4	962.7	979.6	1454.6	1712.7	1776.2
10	478.4	960.7	978.6	1453.0	1708.0	1773.4
20	478.5	956.2	975.3	1447.4	1699.2	1763.5
30	478.9	954.3	970.1	1437.7	1702.7	1749.7
40	479.4	958.7	962.5	1421.2	1723.4	1735.7
50	479.5	951.8	970.3	1397.2	1705.4	1780.3
60	478.5	938.6	987.6	1368.1	1679.4	1850.5
70	476.1	923.5	1009.3	1338.6	1652.2	1934.4
80	472.7	907.7	1034.7	1313.4	1625.1	2022.1
90	469.1	892.6	1063.2	1296.1	1598.6	2042.6
100	466.9	878.9	1096.3	1288.5	1573.4	2039.4
110	467.7	867.0	1135.2	1290.1	1551.9	2035.9
120	473.4	857.1	1180.6	1299.6	1537.6	2028.6



**Fig. 7** Natural frequencies of finite element analysis for square plates with 2 collinear circular holes (Al 5083 H113,  $a=300$  mm,  $h=4.8$  mm)

의 변화가 없다. 이러한 현상은 2개의 원형구멍 직경의 증가에 따른 판의 질량감소로 나타나는 고유진동수 증가효과, 판의 변형률에너지 변화로 인한 고유진동수 감소효과<sup>(22)</sup> 및 원형구멍 위치가 판의 중앙에서 고정지지단쪽으로 75 mm 편심됨으로써 나타나는 고유진동수 증가효과가 중첩되어 일어난다고 판단된다. 2차 및 3차 고유진동수는 원형구멍 직경 0~50 mm 영역에서 고유진동수의 크기가 거의 유사하게 나타나며 그 이후에 분기가 발생하여 2차 고유진동수는 감소하고 3차 고유진동수는 증가하여 확실한 진동모드를 구별할 수 있다. 이는 원형구멍 직경이 커짐에 따라 판의 기하학적 비대칭성의 영향이 나타난 결과로 판단된다. 4차 고유진동수는 원형구멍 직경의 증가에 따라 점차 감소하는 경향을 보이고 있다. 5차 및 6차 고유진동수는 원형구멍 직경



**Fig. 8** Mode shapes of finite element analysis for square plates with a central circular hole (Al 5083 H113,  $a=300$  mm,  $h=4.8$  mm,  $d=150$ mm)

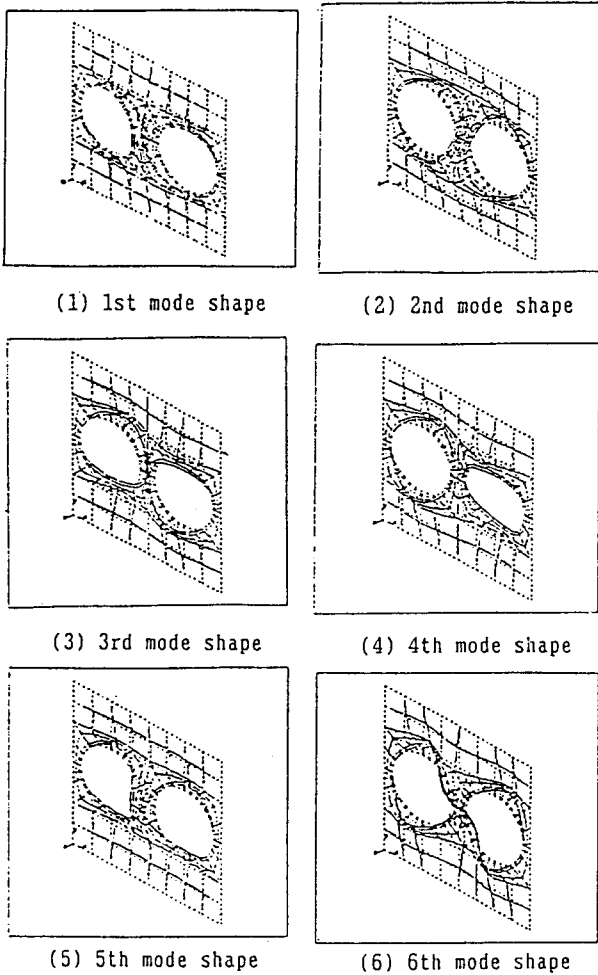


Fig. 9 Mode shapes of finite element analysis for square plates with 2 collinear circular holes (Al 5083 H113,  $a=300$  mm,  $h=4.8$  mm,  $d=120$ mm)

50 mm 이후에서 분기되어 5차 고유진동수는 감소하고 6차 고유진동수는 급격히 증가하다가 원형구멍직경 90 mm 이후에 감소하는 경향을 보이고 있다.

셋째, 판의 재료가 Al 5083 H113이고 중앙에 직경이 150 mm인 1개 원형구멍이 있는 정사각형판과 직경이 120 mm인 2개의 원형구멍이 있는 정사각형판에 대한 모드형상은 Fig. 8와 Fig. 9에 나타나 있다. 이로부터 진동모드에 따라서 판 내부의 처짐이 0이 되는 절선형태를 파악할 수 있다.

#### 4.2 실험결과

원형구멍이 없는 정사각형평판 및 같은 직경의 2개 원형구멍이 있는 정사각형판에 대해서 충격가진 실험을 통하여 1차에서 6차까지의 고유진동수를 측정하였으며 그 결과는 Table 4와 Fig. 10에 나타나

Table 4 Experimental natural frequencies for specimens (Al 5083 H113)

Type of plate	Diameter of circular hole $d$ (mm)	Natural frequency in vibration mode (Hz)					
		f1	f2	f3	f4	f5	f6
Complete square plate	0	470	950	950	1400	1690	1690
Square plate with a central circular hole	150	720	920	935	1270	1545	-
Square plate with 2 collinear circular holes	5	470	955	955	1400	1695	1720
	10	475	955	955	1400	1700	1715
	20	470	945	945	1405	1695	1710
	30	470	940	950	1395	1680	1700
	40	475	935	955	1380	1675	1720
	50	475	925	965	1365	1670	1755
	60	470	915	975	1340	1630	1805
	70	475	905	1000	1310	1610	1875
	80	470	885	1025	1285	1580	1935
	90	455	860	1040	1260	1545	1970
	100	470	865	1095	1275	1545	1990
	110	465	845	1115	1260	1515	1975
120	470	835	1160	1275	1510	1970	

있다.

원형구멍이 없는 정사각형평판의 실험치는 Leissa,<sup>(23)</sup> Young<sup>(24)</sup> 및 Bolotin<sup>(25)</sup>의 이론치와 비교하여 Table 5에 정리하였다. 이로부터 1차부터 6차까지의 실험치와 이미 발표된 이론치의 오차는 5% 미만으로 잘 일치하고 있으며 실험방법의 타당성을 알 수 있었다.

전반적으로 실험치가 이론치보다 낮게 나타나고 있는데 이는 일반적으로 레일리-리쯔법에 기초를 둔 이론치가 엄밀해의 상한계 (upper bound)로 평가되는 점과 실험적 방법에서 고정지지 방법의 정밀도 문제, 볼트 체결력에 의한 내평면 응력의 불균일성<sup>(7)</sup>, 그리고 주파수분석의 분해능에 기인한다고 판단된



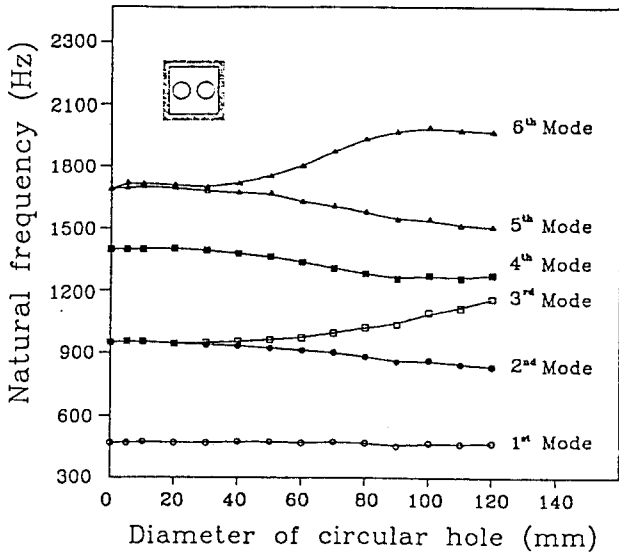


Fig. 10 Experimental natural frequencies for square plates with 2 collinear circular holes (Al 5083 H113,  $a=300$  mm,  $h=4.8$  mm)

Table 5 Comparison of natural frequencies with references for complete square plate (Al 5083 H113)

Author	Natural frequency in vibration mode (Hz)					
	f1	f2	f3	f4	f5	f6
Young <sup>(24)</sup>	479.7	978.6	978.6	1443.6	1754.8	1762.9
Bolotin <sup>(25)</sup>	467.9	971.8	971.8	1432.6	1754.6	1754.6
Leissa <sup>(23)</sup>	479.8	978.6	978.6	1443.2	1754.8	1762.8
Finite element analysis	478.3	974.3	974.7	1436.7	1746.5	1755.4
Experimental results	470.0	950.0	950.0	1400.0	1690.0	1690.0

다.

또한 중앙에 직경이 150 mm인 1개의 원형구멍을 지닌 정사각형판의 실험치는 Fig. 6에 나타나 있으며 Anderson<sup>(6)</sup>과 Laura<sup>(7)</sup>의 해석치와 비교하여 Table 6에 정리하였다.

1차 고유진동수는 실험치가 720 Hz이고 Anderson의 해석결과가 771 Hz로 제시되었으며 전반적인 경향은 정사각형평판의 경우와 마찬가지로 실험치가 이미 발표된 해석결과보다 낮게 나타나고 있다.

그리고, 같은 직경의 2개 원형구멍이 있는 정사각형판의 경우는 다음과 같다.

1차 고유진동수는 원형구멍 직경의 증가에 따라

Table 6 Comparison of natural frequencies with references for square plates having a central circular hole (Al 5083 H113,  $d=150$  mm)

Author	Natural frequency in vibration mode (Hz)					
	f1	f2	f3	f4	f5	f6
Anderson <sup>(6)</sup>	771.1	-	-	1657.0	-	-
Laura <sup>(7)</sup>	-	1110.5	-	1452.6	-	-
Finite element analysis	735.8	929.9	929.9	1277.4	1542.9	2041.9
Experimental results	720.0	920.0	935.0	1270.0	1545.0	-

거의 변화가 없다. 2차 및 3차 고유진동수는 원형구멍 직경이 50 mm 이상에서 분기되어 2차 고유진동수는 2차 함수 형태로 감소하고 3차 진동수는 2차 함수 형태로 증가하는 경향을 보이고 있다. 이 현상은 원형구멍 직경이 커짐에 따라 판의 기하학적 비대칭성의 영향이 강하게 나타난다고 판단되며 이로 부터 원형구멍 직경이 큰 영역에서 2차 및 3차 진동모드를 확실히 구분할 수 있다. 4차 고유진동수는 원형구멍직경의 증가에 따라 감소하는 경향을 보이고 있다. 5차 및 6차 고유진동수는 원형구멍 직경이 50 mm 이상에서 분기되어 5차 고유진동수는 점차 감소하고 있으며 6차 고유진동수는 급격히 증가하는 경향을 보이고 있다.

### 4.3 고찰

유한요소 해석 및 실험결과에서 나타난 원형구멍 직경에 따른 고유진동수는 원형구멍 형상비와 무차원진동수 매개변수로 무차원화하였다.

같은 직경의 2개 원형구멍이 있는 정사각형의 경우 원형구멍 형상비에 따른 1차에서 6차까지의 무차원진동수 매개변수가 Table 7, 8에 정리되어 있으며 변화의 경향은 모두 동일하게 나타내고 있다.

또한 Fig. 11은 Al 5083 H113의 경우 유한요소 해석치와 실험치를 비교하고 있으며 전반적으로 오차 범위는 4% 미만으로 잘 일치하고 있다. 실험치가 유한요소 해석치보다 낮게 나타나 있고 고차 모드로 갈수록 오차의 크기가 커지는 현상을 보이고 있다. 이는 모델링된 유한요소의 갯수 및 유한요소의 길이 대 두께비가 해석상 신뢰도 수준을 지니는 주파수영역의 상한치에 밀접한 관계로부터 기인한다고 판단된다<sup>(26)</sup>.

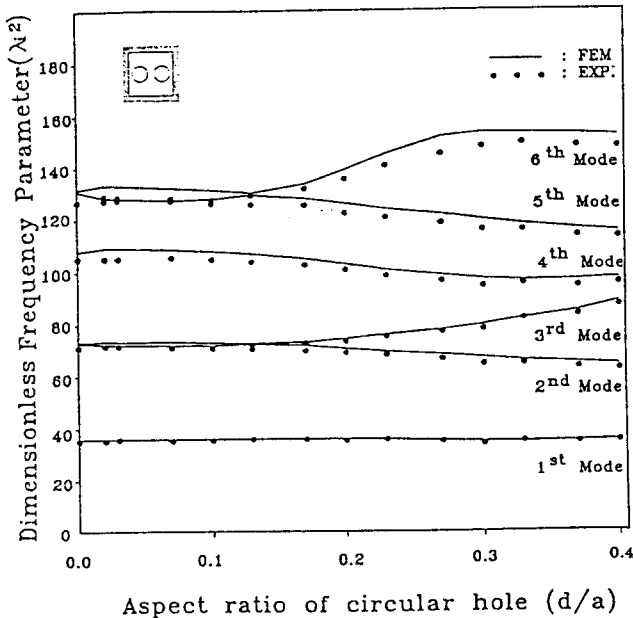
1차 무차원진동수 매개변수는 원형구멍 형상비에

**Table 7** Nondimensional frequency parameters of finite element analysis for square plates with 2 collinear circular holes (Al 5083 H113)

Aspect ratio of circular hole	Nondimensional frequency parameter in vibration mode					
	$\lambda_1^2$	$\lambda_2^2$	$\lambda_3^2$	$\lambda_4^2$	$\lambda_5^2$	$\lambda_6^2$
0.00	35.88	73.09	73.12	107.78	131.02	131.68
0.02	35.89	72.22	73.49	109.12	128.49	133.25
0.03	35.89	72.07	73.41	109.00	128.13	133.04
0.07	35.90	71.73	73.16	108.59	127.47	132.29
0.10	35.93	71.59	72.78	107.85	127.73	131.26
0.13	35.97	71.92	72.20	106.62	129.29	130.21
0.17	35.97	71.40	72.79	104.81	127.94	133.56
0.20	35.89	70.41	74.09	102.63	125.98	138.82
0.23	35.72	69.28	75.72	100.42	123.95	145.12
0.27	35.46	68.10	77.62	98.53	121.91	151.70
0.30	35.19	66.96	79.76	97.23	119.92	153.23
0.33	35.02	65.93	82.24	96.66	118.03	153.00
0.37	35.08	65.04	85.16	96.78	116.42	152.73
0.40	35.51	64.30	88.57	97.50	115.35	152.18

**Table 8** Experimental nondimensional frequency parameters for square plates with 2 collinear circular holes (Al 5083 H113)

Aspect ratio of circular hole	Nondimensional frequency parameter in vibration mode					
	$\lambda_1^2$	$\lambda_2^2$	$\lambda_3^2$	$\lambda_4^2$	$\lambda_5^2$	$\lambda_6^2$
0.00	35.26	71.27	71.27	105.03	126.78	126.78
0.02	35.26	71.64	71.64	105.03	127.16	129.03
0.03	35.63	71.64	71.64	105.03	127.53	128.66
0.07	35.26	70.89	70.89	105.40	127.16	128.28
0.10	35.26	70.52	71.27	104.65	126.03	127.53
0.13	35.63	69.39	71.64	103.53	125.66	129.03
0.17	35.63	69.39	72.39	102.40	125.28	131.66
0.20	35.26	68.64	73.14	100.53	122.28	135.41
0.23	35.63	67.89	75.02	98.27	120.78	140.66
0.27	35.26	66.39	76.89	96.40	118.53	145.16
0.30	34.13	64.52	78.02	94.52	115.90	147.79
0.33	35.26	64.89	82.15	95.65	115.90	149.29
0.37	34.88	63.39	83.65	94.52	113.65	148.16
0.40	35.26	62.64	87.02	95.65	113.28	147.79



**Fig. 11** Comparison between experiment and finite element analysis on nondimensional frequency parameters (Al 5083 H113,  $a=300$  mm,  $h=4.8$  mm)

따라 거의 변화가 없다. 2차 및 3차 무차원진동수 매개변수와 5차 및 6차 무차원진동수 매개변수는 원형구멍형상비 1/6 이상에서 분기되고 있다. 2차, 4차 및 5차 무차원진동수 매개변수는 분기된후 감소하는 경향을 보이고 있다. 3차 및 6차 무차원진동수 매개변수는 분기된 후 증가하는 경향을 보이고 있다.

이상과 같은 고찰에서 공학적 응용분야를 살펴보면 특정한 판의 각 모드별 무차원 진동수 매개변수 값으로부터 판의 설계시 작용되는 외부가진 진동수와 의 공진여부를 검토할 수 있으며, 형상비와 재질의 프와송비가 같고 판의 형상이 확대 및 축소될 경우 계산된 무차원진동수 매개변수에 따라 상사법칙이 적용되므로 고유진동수 예측이 가능하고<sup>(27)</sup>, 모드형상에서 변위가 0인 각 모드의 절선은 판내부에 단순지지와 같은 구속조건이 되므로 강성이 증가하여 판에 다른 구조요소를 장착할 때 위치결정에 적용할 수 있으며<sup>(28)</sup>, 또한 각 모드별 최대변위점(antinode)을 파악하므로써 진동제어문제에 적용될 수 있다는 사실을 알았다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 2개의 원형구멍이 있는 4변 고정지된 등방성 정사각형판의 자유진동을 해석하기 위하여 충격가진 실험과 유한요소 해석으로 원형구멍 형상비의 변화에 따른 1차에서 6차까지의 무차원진동수 매개변수와 특정한 경우의 모드형상을 구하였다. 자유진동해석의 타당성을 확인하기 위하여 구멍이 없는 정사각형판과 1개의 원형구멍이 있는 정사각형판의 무차원진동수 매개변수를 유한요소 해석과 충격가진 실험으로 구하였고, 이미 발표된 논문의 결과와 비교하였다.

본 논문의 결론은 다음과 같다.

- (1) 2개의 원형구멍이 있는 4변 고정지된 등방성 정사각형판에서 원형구멍 형상비가 1/6 이하일 때 1차에서 6차까지의 무차원진동수 매개변수 변화는 거의 없다.
- (2) 원형구멍 형상비가 증가함에 따라 1차 무차원진동수 매개변수는 거의 변화가 없다.
- (3) 원형구멍 형상비가 1/6 이상일 때 2차, 3차 및 5차, 6차 무차원진동수 매개변수는 분기된다.
- (4) 원형구멍 형상비가 증가함에 따라 2차, 4차 및 5차 무차원진동수 매개변수는 감소한다.
- (5) 원형구멍 형상비가 증가함에 따라 3차 및 6차 무차원진동수 매개변수는 증가한다.

## 참 고 문 헌

- (1) Leissa, A. W., 1969, "Vibration of Plates," NASA SP-160, U. S. Government Printing Office, Washington D. C., pp. 41~519.
- (2) Kumai, T., 1952, "Flexural Vibration of the Square Plates with a Centural Circular Hole," Proceedings of the Second Japan National Congress for Applied Mechanics, pp. 339~342.
- (3) Takahashi, S., 1958, "Vibration of Rectangular Plates with Circular Holes," Bulletin of JSME, Vol. 1, No. 4, pp. 380~385.
- (4) Joga Rao, C. V. and Pickett, G., 1961, "Vibration of Plates of Irregular Shapes and Plates with Holes," Journal of the Aeronautical Society of India, Vol. 13, No. 3, pp. 83~88.
- (5) Anderson, R. G., Irons, B. M. and Zienkiewicz, O. C., 1968, "Vibration and Stability of Plates using Finite Elements," International Journal of Solids and Structures, Vol. 4, No. 10, pp. 1031~1055.
- (6) Hegarty, R. F. and Ariman, T., 1975, "Elasto-Dynamic Analysis of Rectangular Plates with Circular Holes," International Journal of Solids and Structures, Vol. 11, Nos. 7/8, pp. 895~906.
- (7) Laura, P. A. A., Gutierrez, R. H. and Pombo, J. L., 1987, "Higher Frequencies of Transverse Vibrations of Rectangular Plates Elastically Restrained Against Rotation at the Edges and with a Central Free Hole," Journal of Sound and Vibration, Vol. 117, No. 1, pp. 202~206.
- (8) Liew, K. M., 1993, "Treatments of Over-Restrained Boundaries for Doubly Connected Plates of Arbitrary Shape in Vibration Analysis," International Journal of Solids and Structures, Vol. 30, No. 3, pp. 337~347.
- (9) 이대회, 1984, "유공판의 좌굴," 한양대학교 대학원 석사논문.
- (10) 임장근, 김태완, 1985, "유공판의 응력집중계수를 최소화하는 Hole 형상의 최적화," 대한기계학회논문집, 제9권, 제3호, pp. 295~300.
- (11) 김극천, 한성용, 정정훈, 1987, "유공 직사각형 보강판의 진동해석," 대한조선학회지, 제24권, 제3호, pp. 35~42.
- (12) 임정식, 이영신, 1989, "탄성지지를 받는 사각다공판의 하중분포 계수에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제13권, 제4호, pp. 563~571.
- (13) Gorman, D. J., 1982, "Free Vibration Analysis of Rectangular Plates," Elsevier North Holland, INC., pp. 1~16.
- (14) Blevins, R. D., 1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape," Van Nostrand Reinhold Company, pp. 233~236.
- (15) Johnson, W., 1972, "Impact Strength of Materials," Edward Arnold Limited, pp. 13~14.
- (16) Roark, R. J. and Young, W. C., 1975, "Formulas for Stress and Strain," McGraw-Hill Book Company, p. 607.
- (17) Kohnke, P. C., 1989, "ANSYS Engineering Analysis System: Theoretical Manual," Swanson Analysis Systems, INC., pp. 6.3.1~6.3.2.
- (18) Blevins, R. D., 1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape," Van Nostrand Rein-

- hold Company, p. 258.
- (19) Harris, C. M. and Crede, C. E., 1976, "Shock and Vibration Handbook," McGraw-Hill Book Company, pp. 12~17.
- (20) Dossing, O., 1990, "The Enigma of Dynamic Mass," Sound and Vibration, November, pp. 16~21.
- (21) Halvorson, W. G. and Brown, D. L., 1977, "Impulse Technique for Structural Frequency Response Testing," Sound and Vibration, November, pp. 8~21.
- (22) Hegarty, R. F., 1973, "Dynamic Analysis of Cracked Cylindrical Shells and Plates with Holes," Ph. D. Thesis, Notre Dame University, pp. 1~56.
- (23) Leissa, A. W., 1973, "The Free Vibration of Rectangular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, No. 3, pp. 257~293.
- (24) Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method," Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, March, pp. 448~453.
- (25) Vijayakumar, K. and Ramaiah, G. K., 1978, "Analysis of Vibration of Clamped Square Plates by the Rayleigh-Ritz Method with Asymptotic Solutions from a Modified Bolotin Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 56, No. 1, pp. 127~135.
- (26) Sohn, K., Okuma, M., Okada, M. and Nagamatsu, A., 1991, "Studies of Appropriate Finite Element Modelling for Vibration Analysis," Transactions of JSME(C), Vol. 57, No. 544, pp. 1~7.
- (27) Gustafson, P. N., Stokey, W. F. and Zorowski, C. F., 1953, "An Experimental Study of Natural Vibrations of Cantilevered Triangular Plates," Journal of the Aeronautical Science, May, pp. 331~337.
- (28) Kawakami, O., 1992, "Free Vibration of Square Plate with Multiple Fixed-Points on Edges," Transactions of JSME(C), Vol. 58, No. 553, pp. 1~6.