

直接積分法과 確率論的 有限要素法을 利用한 構造物의 確率論的 動的解析

Developing A Stochastic Dynamic Analysis Technique for Structures Using Direct Integration Methods

李 政 宰
Lee, Jeong Jae

Summary

The expanding technique of the Stochastic Finite Element Method(SFEM) is proposed in this paper for adapting direct integration methods in stochastic dynamic analysis of structures. Grafting the direct integration methods and the SFEM together, one can deal with nonlinear structures and nonstationary process problems without any restriction. The stochastic central difference and stochastic Houbolt methods are introduced to show the expanding technique, and their adaptabilities are discussed. Results computed by the proposed method(the Stochastic Finite Element Method in Dynamics : SFEMD) for two degree-of-freedom system are compared with those obtained by Monte Carlo Simulation.

I. 緒 論

構造物의 確率論的 解析에 있어서 가장 중요한 不確實性의 하나는 荷重, 材料, 構造物의 거동등이 시간적으로 변화하는 動荷重 현상이다.

초기의 信賴性 解析은 주로 이상적인 荷重의 조합방법을 찾는 데 목적을 두어 많은 성과를 거두었다. 일례로 Turkstra는 構造物의 수명기간동안 작용하는 모든 荷重을 개별화 한 후 임의의 荷重의 최대치와 그의 荷重의 평균값을

동시에 작용시켜 그중 최대 荷重이 되는 경우를 設計에 반영하는 방안을 제안한 바 있다. 그러나 動的解析 자체에의 접근은 오랜동안 소외된 실정이다.

최근에 들어 構造物의 動的解析에 대한 確率論的 접근방안에 관하여 많은 연구들이 행해지고 있으며⁵⁾ 연구의 방향도 급속히 변화하고 있음을 알 수 있다. 고전적 解析의 하나로 Ditlevson⁴⁾은 복수의 정규분포의 定常過程 荷重이 작용하는 뼈대 構造物에 대하여, 荷重이 시간에 관하여 독립적으로 발생할 수 있다고 가정하고,

그 분포의 평균과 분산으로 構造物의 信賴度를 구하고 있으며, Schueller⁶⁾ 등은 Power Spectral Method를 이용하여 地震荷重을 받는 構造物의 應答(Response)에 대한 공분산 행렬을 구하였고, To⁷⁾는 多自由度體가 動荷重을 받을 때의 거동의 분산을 直接積分法에 의해 구하려고 하였으며, 최근에 Zhu⁸⁾ 등은 確率論的 有限要素法을 확장하여 Mode 중첩법에 확률을 도입하는 방안을 발표 하였다. 이밖에 Pradlwarter와 Li⁵⁾는 확률론에 의한 動的解析 방법이 기본적으로 갖추어야 할 기준으로 (1) 確定論과 確率論의 解析이 동시에 가능할 것, (2) 非定常過程과 非線形解析에 이용할 수 있을 것, (3) 몬테칼로 모사에 비추어 현저한 利點이 있고, 具現이 용이할 것을 제안하였다. 이들은 현재까지 개발된 Fokker-Planck 방정식, Stochastic Averaging 방법, Moment 방정식 및 Linearization 방법을 이용한 최근의 연구성과들도 이 조건을 모두 만족시키지는 못하고 있다고 하였다.

본 연구에서는 첫째, 確率論的 動的解析에 直接積分法과 有限要素法을 이용할 수 있도록 SFEM을 확장한 방법을 개발하고, 둘째로, 제안된 방법을 검토 고찰하며, 마지막으로 그 장단점을 논의하고자 한다.

II. 直接積分法과 確率論的 有限要素法

線形 動的解析 문제는 有限要素式(1)로 표시할 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R} \dots\dots\dots(1)$$

- 여기서, **M** : 構造物의 質量行列
- C** : 材料의 減衰行列
- K** : 構造物의 剛度行列
- R** : 荷重 벡터
- u** : 變位 벡터
- t** : 時間

식(1)은 2계 선형 연립방정식으로, 이 방정

식의 해법은 크게 直接積分法과 Mode 중첩법으로 구분된다. 실제에 있어서 어떤 방법을 선택하는 가는 문제의 성격에 따라 달라지며, 일반적으로 Mode 重疊法은 非線形解析에 直接積分法은 收斂性에 제한이 있을 수 있다고 알려져 있다.¹⁾

有限要素法을 信賴性解析에 이용하도록 확장된 確率論的 有限要素法은, 구하고자 하는 變位와 應力을 設計變量의 不確實性에 따라 변화되는 不確實量으로 간주하고, 그 평균과 분산을 구하여 확률적으로 안전상태를 검토하는 방법으로서, 信賴性解析의 가장 강력한 手段이 되고 있다.³⁾

1. 直接積分法

直接積分法은 數值解析중의 Step-by-step 방법의 하나로서 事前에 어떠한 형태의 변환도 하지 않는 것을 의미한다. 直接積分法은 식(1)을 임의의 시간 t에 관하여 解析하는 대신, 미소 시간구간 Δt동안 관성력과 감쇠력이 작용하는 靜荷重 상태로 간주하므로, 기본적으로 靜荷重의 解析과 같이 비선형 문제에 대한 제한이 없게되며, 매 시간구간에 계산이 완료되므로 非定常 過程에 대한 제한 역시 있을 수 없다.¹⁾ 또 Δt 시간이후의 미지수, 즉 가속도, 속도 및 변위는 어떤 원칙에 의해 계산되며, 이때의 계산 과정에 따라 효율과 정확도가 결정된다. 直接積分法은 陰函數法과 陽函數法으로 구분하는데 만약 t 시간의 結果로 t+Δt 시간의 미지수를 예측하는 경우 이를 陽函數法이라 하고, 陰函數法은 t+Δt 시간의 평형식을 수립하여 문제를 해결한다. 식(2)와 (3)은 식(1)에 대한 陽函數法과 陰函數法의 예로서 각각 中央差分法과 Houbolt 법의 시간에 대한 전개식이다.

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)^{t+\Delta t}\mathbf{u} = \mathbf{R} - \left(\frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)^t\mathbf{u} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)^{t-\Delta t}\mathbf{u} \dots\dots\dots(2)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{11}{6\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)^{t+\Delta t} \mathbf{u} = \\ & {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} + \left(\frac{5}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} \right)^t \mathbf{u} \\ & - \left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{C} \right)^{t-\Delta t} \mathbf{u} \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{3\Delta t} \mathbf{C} \right)^{t-2\Delta t} \mathbf{u} \dots\dots (3) \end{aligned}$$

2. 確率論的 有限要素法

靜荷重 狀態의 有限要素方程式에서 전체 構造物의 變位와 要素의 應力을 구하는 식은 다음과 같다.

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{R} \dots\dots\dots(4)$$

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e + \mathbf{R}^e \dots\dots\dots(5)$$

여기서, **K**: 構造物의 剛度 行列

u: 構造物의 變位

R: 構造物에 作用하는 荷重벡터

e: 要素(6DOF)

만약 **K**와 **u**가 設計變量 **X**와 관련되어 있다면 變量 **X**는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 + \delta \mathbf{X} \dots\dots\dots(6)$$

여기서, **X**⁰ = 平均(확정된 값)

δX = 不確實量

이 設計變量 **X**에 의해 결정되는 값 **u**와 **P**는 각각 다음과 같이 Taylor 급수로 전개되며,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^0 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_i} \delta X_i \\ &+ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial X_i \partial X_j} \delta X_i \delta X_j + \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}^0 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X_i} \delta X_i \\ &+ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial X_i \partial X_j} \delta X_i \delta X_j + \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

Handa와 Andersson²⁾은 식(7) (8)의 2차항 이상의 값은 아주 적으므로 그 設計變量의 분

산이 20% 내외인 경우 무시 할 수 있다고 하였다. 따라서 식 (7)로부터 1차항 까지만을 취한 경우의 **u**는 식 (9)와 같게 된다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_i} \delta X_i \dots\dots\dots (9)$$

식 (9)를 이용하여 **u**의 평균과 공분산 행렬을 구하면

$$\mu \mathbf{u} = \mathbf{E}[\mathbf{u}] = \mathbf{u}^0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 \mathbf{u} &= \mathbf{E}[(\mathbf{u} - \mu \mathbf{u})^T (\mathbf{u} - \mu \mathbf{u})] \\ &= \mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_i} \delta X_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_i} \delta X_i \right) \right] \\ &= \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=1}^m \delta X_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^m \delta X_i \right) \right] \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T (\sigma^2 \mathbf{X}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

와 같으므로 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ 를 구하는 문제로 요약된다. 식 (9)와 (11)에서의 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ 는 식(4)의 임의 設計變量 **X**_i로 미분하여 얻을 수 있다. 즉,

$$\frac{\partial (\mathbf{Ku})}{\partial X_i} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_i}$$

또는

$$\mathbf{K} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_i} \right\} - \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \right] \mathbf{u} \dots\dots (12)$$

만약 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_i}$, $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i}$, $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_i}$ 를 알 수 있다면, 이 變量에 관련된 應力의 편미분값은 식(13)과 같으며, 應力의 평균값은 확정론에 의해 구한값과 같고, 그 공분산 행렬은 식(11)을 구한 방법과 같은 방법으로 식(13)의 $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X_i}$ 를 이용하여 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X_i} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_i} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_i} \dots\dots\dots (13)$$

$$\sigma^2 \mathbf{P} = \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X_i} \right)^T (\sigma^2 \mathbf{X}_i) \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X_i} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

III. 確率論의 動的 有限要素法 (SFEMD)

1. SPEMD의 誘導

전항의 식(1) 및 (11)을 참고하면 운동방정식이 設計變量 X_i 에 관련된 경우, 變位の 공분산은 그 變量에 의한 變位の 편미분을 구하여 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial X_i} (M\ddot{u}C'u + K'u) = \frac{\partial^i R}{\partial X_i} \dots\dots (15)$$

또는

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial X_i} \ddot{u} + M \frac{\partial \ddot{u}}{\partial X_i} + \frac{\partial C}{\partial X_i} 'u + C \frac{\partial 'u}{\partial X_i} \\ + \frac{\partial K}{\partial X_i} 'u + K \frac{\partial 'u}{\partial X_i} = \frac{\partial R}{\partial X_i} \dots\dots (16) \end{aligned}$$

식(16)은 直接積分法을 도입하여 그 해를 얻을 수 있으며, 본 연구에서는 中央差分法과 Houbolt 법을 예로 그 과정을 보이고자 한다.

2. 中央差分法

中央差分法의 경우 變位の 시간에 대한 1, 2계 도함수인 \ddot{u} , \dot{u} 는 다음과 같이 u 로 표현된다.¹⁾

$$\ddot{u} = \frac{1}{\Delta t^2} \{ {}^{t-\Delta t}u - 2'u + {}^{t+\Delta t}u \} \dots\dots (17)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{2\Delta t} \{ -{}^{t-\Delta t}u + {}^{t+\Delta t}u \} \dots\dots (18)$$

식 (17) (18)을 設計變量 X_i 에 의하여 미분하면 식 (19) (20)을 얻는다.

$$\frac{\partial \ddot{u}}{\partial X_i} = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\frac{\partial {}^{t-\Delta t}u}{\partial X_i} - 2 \frac{\partial 'u}{\partial X_i} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}u}{\partial X_i} \right) \dots\dots (19)$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial X_i} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{\partial {}^{t-\Delta t}u}{\partial X_i} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}u}{\partial X_i} \right) \dots (20)$$

식 (17) (18) (19) (20)을 식 (16)에 대입하고 정리하면 식 (21)이 된다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right) \frac{\partial {}^{t+\Delta t}u}{\partial X_i} = \frac{\partial^i R}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i} 'u \\ - \frac{1}{\Delta t^2} \frac{\partial M}{\partial X_i} \{ {}^{t-\Delta t}u - 2'u + {}^{t+\Delta t}u \} \\ - \frac{1}{\Delta t^2} M \frac{\partial {}^{t-\Delta t}u}{\partial X_i} + \frac{1}{2\Delta t} \frac{C}{\partial X_i} \frac{\partial {}^{t-\Delta t}u}{\partial X_i} \\ - \frac{1}{2\Delta t} \frac{\partial C}{\partial X_i} \{ -{}^{t-\Delta t}u + {}^{t+\Delta t}u \} \\ + \left(\frac{2}{\Delta t^2} M - K \right) \frac{\partial 'u}{\partial X_i} \dots\dots (21) \end{aligned}$$

식 (21)을 이용하여 t 시간의 結果로 $t + \Delta t$ 시간의 편미분값 $\frac{\partial {}^{t+\Delta t}u}{\partial X_i}$ 을 얻을 수 있는데, 이 中央差分法을 이용하기 위한 초기값 0u , $\frac{\partial {}^0u}{\partial X}$ 은 경계값으로 주어지고, ${}^{-\Delta t}u$, $\frac{\partial {}^{-\Delta t}u}{\partial X}$ 는 식 (24) (25)로 결정된다. 즉, $t=0$ 인 경우 식 (17) (18)은 각각 (22) (23)이 되고,

$${}^0\ddot{u} = \frac{1}{\Delta t^2} \{ {}^{-\Delta t}u - 2{}^0u + {}^{\Delta t}u \} \dots\dots (22)$$

$${}^0\dot{u} = \frac{1}{2\Delta t} \{ -{}^{-\Delta t}u + {}^{\Delta t}u \} \dots\dots (23)$$

이를 연립하여 풀면 ${}^{-\Delta t}u$ 는 식 (24)가 되며,

$${}^{-\Delta t}u = {}^0u - \Delta t {}^0\dot{u} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0\ddot{u} \dots\dots (24)$$

이를 設計變量 X 로 미분하여 $\frac{\partial {}^{-\Delta t}u}{\partial X}$ 를 얻는다.

$$\frac{\partial {}^{-\Delta t}u}{\partial X_i} = \frac{\partial {}^0u}{\partial X_i} - \Delta t \frac{\partial {}^0\dot{u}}{\partial X_i} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial {}^0\ddot{u}}{\partial X_i} \dots\dots (25)$$

이 中央差分이 수렴하기 위해서는 시간간격 Δt 가 일정범위내에 있어야 하며 그 범위는 다음과 같다.¹⁾

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \dots \dots \dots (26)$$

여기서, T_n : 최소 고유 진동수

3. Houbolt法

Houbolt 방법은 陰函數法의 하나로 수렴을 위한 제한은 없지만 초기조건이 없이는 계산을 시작할 수 없다. 본 연구에서는 中央差分法에 의해 초기조건을 산정하였다. Houbolt 적분법에 의하면 \ddot{u} , \dot{u} 는 각각 다음과 같이 u 로 변환된다.¹⁾

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u} = \frac{1}{\Delta t^2} (2{}^{t+\Delta t}u - 5{}^t u + 4{}^{t-\Delta t}u - {}^{t-2\Delta t}u) \dots \dots \dots (27)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = \frac{1}{6\Delta t} (11{}^{t+\Delta t}u - 18{}^t u + 9{}^{t-\Delta t}u - 2{}^{t-2\Delta t}u) \dots \dots \dots (28)$$

또 陰函數法에 의한 운동방정식은 식 (29)와 같으므로

$$M{}^{t+\Delta t}\ddot{u} + C{}^{t+\Delta t}\dot{u} + K{}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}R \dots \dots \dots (29)$$

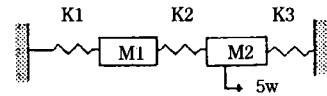
식 (29)에 식 (27) (28)을 대입하여 전술한 식 (3)을 얻는다. 중앙차분법과 마찬가지로 방정식으로 식 (3) (27) (28)을 設計變量 X_i 로 각각 미분하여 정리하면 식 (30)이 되며, 이로부터 $t+\Delta t$ 에서의 變位의 X_i 에 대한 편미분값 $\frac{\partial {}^{t+\Delta t}u}{\partial X_i}$ 을 구할 수 있고, 식 (11) (14) (30)을 이용하여 動荷重을 받는 구조물의 $t+\Delta t$ 시간에서의 變位와 應力의 공분산을 구할 수 있다.

$$\left(\frac{2}{\Delta t^2} M + \frac{11}{6\Delta t} C + K \right) \frac{\partial {}^{t+\Delta t}u}{\partial X_i} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}R}{\partial X_i} + \frac{1}{\Delta t^2} + \left(5 \frac{\partial {}^t u}{\partial X_i} - 4 \frac{\partial {}^{t-\Delta t}u}{\partial X_i} + \frac{\partial {}^{t-2\Delta t}u}{\partial X_i} \right) M + \frac{1}{\Delta t} + \left(3 \frac{\partial {}^t u}{\partial X_i} - \frac{3}{2} \frac{\partial {}^{t-\Delta t}u}{\partial X_i} + \frac{1}{3} \frac{\partial {}^{t-2\Delta t}u}{\partial X_i} \right) C$$

$$- \frac{1}{\Delta t^2} (2{}^{t+\Delta t}u - 5{}^t u + 4{}^{t-\Delta t}u - {}^{t-2\Delta t}u) \frac{\partial M}{\partial X_i} - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{11}{6} {}^{t+\Delta t}u - 3{}^t u + \frac{3}{2} {}^{t-\Delta t}u - \frac{1}{3} {}^{t-2\Delta t}u \right) \frac{\partial C}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i} {}^{t+\Delta t}u \dots \dots \dots (30)$$

IV. 應用例 및 考察

본 연구를 통하여 유도된 SFEMD를 그림 (1)의 非減衰, 段階荷重, 多自由度系를 이용하여 몬테칼로 모사와 비교하였다.



$$k_1 = 4EI, \quad k_2 = k_3 = 2EI$$

$$\gamma \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5w \end{Bmatrix}$$

Fig. 1. No Damp, Step Load, MDOF System

1. 應用例 1

設系變量이 표 (1)과 같은 그림 (1)의 경우에 대하여 Houbolt법과 몬테칼로 모사를 이용하여 표 (2)의 結果를 얻었다.

Table-1. Material Data of Example 1

Design Variables	Mean	Standard Dev.
γ : Density of Materials	1.0	10%
E: Young's Modulus	1.0	10
I: Moment of Inertia	1.0	10
w: Load Intensity	2.0	45

2. 應用例 2

그림 (1)의 각 設系變量을 표 (3)과 같이

Table-2. Results of Example 1

Time Step	u_1				u_2			
	Mean		Variance		Mean		Variance	
	STEMD	MCS	STEMD	MCS	STEMD	MCS	STEMD	MCS
5	0.3372	0.3676	0.1006	0.1097	2.5937	2.6900	0.6432	0.7224
10	0.7990	0.8536	0.0837	0.0961	2.8135	2.9208	0.6744	0.7414
15	0.9804	1.0231	0.0834	0.0862	2.9806	3.0694	0.6684	0.7014
20	1.0106	1.0339	0.0755	0.0751	3.0105	3.0783	0.6455	0.6689
30	1.0011	1.0216	0.0697	0.0737	3.0011	3.0659	0.6290	0.6646

SFEMD : SFEM for Dynamic Analysis

MCS : Monte Carlo Simulation

The results of MCS have employed 4000 trials for every time step.

편차를 크게하여 비교하였다. 그 결과는 표 (4)와 같으며, 그림 (2) 내지 (5)에 변위 u_1 의 평균과 분산의 시간별 변화를 STEMD와 몬테칼로 모사로 구하여 圖示하였다.

Table-3. Material Data of Example 2

Design Variables	Mean	Standard Dev.
γ : Density of Materials	1.0	22%
E : Young's Modulus	1.0	22
I : Moment of Inertia	1.0	22
w : Load Intensity	2.0	77

3. 結果 考察

본 연구에서 유도된 SFEMD는 몬테칼로 모사(시산회수 4000-10000회)의 결과와 잘 일치하였다. 그림 (2) (3)은 응용례 1의 변위 u_1 에 대한 평균과 분산을, 그림 (4) (5)는 응용례 2의 변위 u_1 의 평균과 분산을 나타낸 것이며, 그림 (6) (7)은 응용례 2에 대한 Time Step 6과 11에서의 변위에 관한 Histogram으로서 두 방법이 잘 일치하고 있음을 보여 준다. 또 SFEMD는 재료에 관한 변량의 경우 표준편차 25% 내외까지 이용할 수 있었으며, 하중측의 경우 전혀 제한을 받지 않고 사용할 수 있었다. 응용례의 계산결과 몬테칼로 모사의 경우 시산

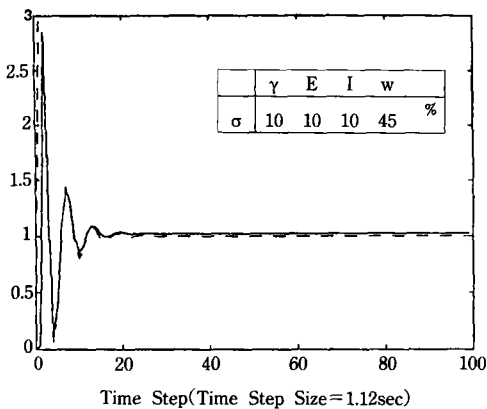


Fig. 2. Mean Displacement of u_1 (-- : SFEMD - : MCS)

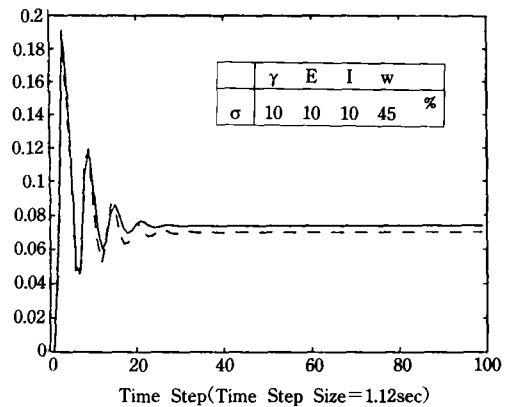


Fig. 3. Displacement Variance of u_2 (-- : SFEMD - : MCS)

Table-4. Results of Example 2

Time Step	u_1				u_2			
	Mean		Variance		Mean		Variance	
	STEMD	MCS	STEMD	MCS	STEMD	MCS	STEMD	MCS
5	0.3372	0.4498	0.3367	0.4135	2.5937	2.7458	2.2073	3.1593
10	0.7990	0.8972	0.2854	0.3058	2.8135	2.9298	2.3887	2.5271
15	0.9804	1.0086	0.3107	0.3100	2.9806	3.0100	2.4244	2.4415
20	1.0106	1.0009	0.2779	0.2471	3.0105	3.0006	2.3288	2.3127
30	1.0011	0.9992	0.2486	0.2556	3.0011	2.9985	2.2457	2.3267

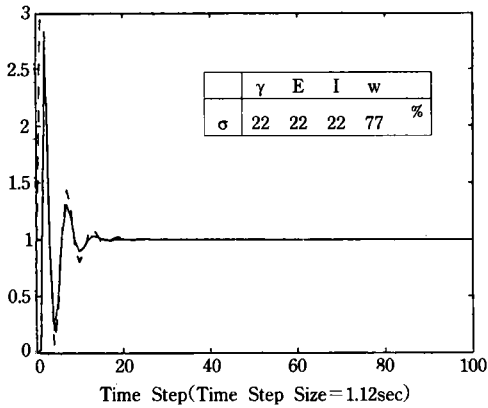


Fig. 4. Mean Displacement of u_1 (-- : SFEMD - : MCS)

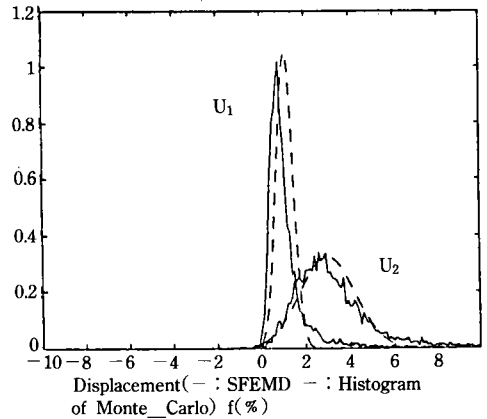


Fig. 6. Distribution of Displacements(STEP : 6)

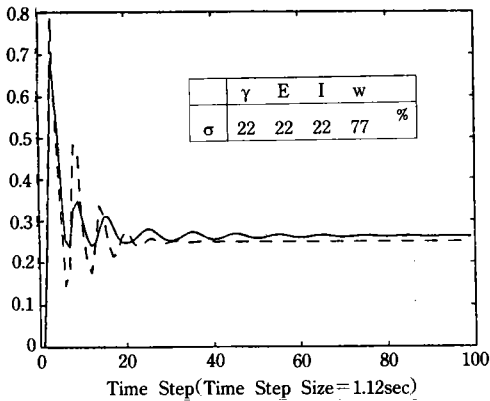


Fig. 5. Displacement Variance of u_1 (-- : SFEMD - : MCS)

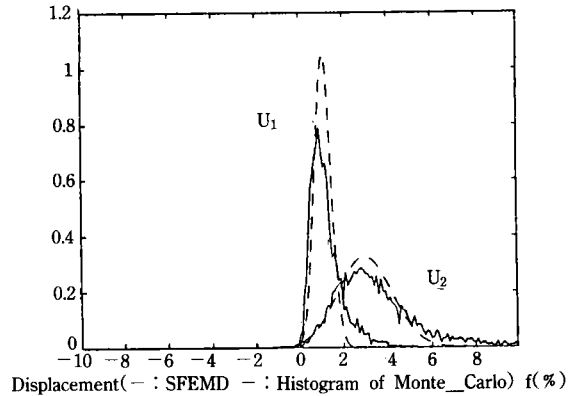


Fig. 7. Distribution of Displacements(STEP : 11)

회수에 따라 평균과 분산의 정확도가 변하였으나, SFEMD에 의한 해는 평균의 경우 정확하게

확정론의 값에 수렴하였고, 분산의 경우에도 정하중상태의 결과에 수렴하였다. 표 (5)에서

Table-5. Elapse Time of Example 1

SFEMD	MONTE CARLO(Trials)	
	4000	10000
0.22 ^{sec}	15.62 ^{sec}	38.86 ^{sec}

* Computer : HP-720 Workstation

Table-6. Probability of Displacements

Displacement	SFEMD		MCS	
	u ₁	u ₂	u ₁	u ₂
0.0	0.0000	0.0885	0.0085	0.0046
0.5	0.0290	0.1160	0.1876	0.0164
1.0	0.7150	0.1736	0.6229	0.0516
1.5	0.9980	0.2451	0.8283	0.1294
2.0	0.9990	0.3310	0.9062	0.2524
2.5	0.9999	0.4260	0.9418	0.3990
3.0	0.9999	0.5260	0.9616	0.5413
4.0	0.9999	0.7157	0.9807	0.7558
5.0	0.9999	0.8577	0.9891	0.8685
6.0	0.9999	0.9418	0.9934	0.9251

* MCS : 10000trials

알 수 있듯이 SFEMD는 몬테칼로 모사보다 대단히 능률적이었으며, 높은 정확도를 요구하거나 대단히 큰 자유도를 가진 문제의 경우 더욱 그 이점이 클 것으로 판단된다.

표 (6)은 응용례 2, Time Step 11에서의 변위의 발생확률을 SFEMD와 몬테칼로 모사를 이용하여 구한 것으로 SFEMD의 응용성을 보여주고 있다.

V. 結 論

확률론에 의한 構造物의 動的解析을 위하여 確率論的 有限要素法에 直接積分法을 도입하여 확장한 確率論的 動的有限要素法(Stochastic Finite Element Method in Dynamics)이 제안되었다. 제안된 방법(SFEMD)는 荷重, 材料 전반에 걸쳐 발생할 수 있는 모든 不確實性을 構造解析에 반영할 수 있고, 非定常過程(Nonstationary Process)이나 非線形解析에 제한 없이

사용할 수 있을 것으로 판단된다. SFEMD는 몬테칼로 모사에 비하여 능률적이고 정확하였으며 컴퓨터 프로그램의 구현이 용이하였다. SFEMD의 경우에서 설계변량의 편차가 없으면 확정론과 동일하므로 Pradlwarter⁵⁾ 등이 제안한 모든 조건을 충실히 만족시킬 수 있다. 이 방법을 이용하여 변위, 응력등의 분포와 확률을 용이하게 계산할 수 있으므로 動荷重을 받는 構造物의 信賴性解析에 유용하게 응용될 수 있을 것으로 판단 된다.

參 考 文 獻

1. K. J. Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs, NJ, 1982.
2. K. Handa & K. Andersson, Application of Finite Element Method in the Atochastical Analysis of Structures, Structureal Safety and Reliability, Elsevier Science Publishing Company, 1981, pp. 409-417.
3. Lee J. J., Reliability Analysis Modeling of Frame Structures based on Discretized Ideal Plastic Method, 1991, 서울大學校 博士學位 論文.
4. R. E. Melchers, Structural Reliability Analysis and Prediction, Jhon Willy & Son, NY, NY, 1987.
5. H. J. Pradlwarter & W. Li, On the Computation of the Stochastic Response of Highly Nonlinear Large MDOF-Systems Modeled by Finite Elements, Stochastic Structural Dynamics, Vo12, Springer-Verlag, 1990, pp. 121-138.
6. G. I. Schueller, Stochastic Dynamic Analysis of Linear Systems, Stochastic Methods in Structural Dynamics, Martinus Nighoff Publisher, 1987, pp. 81-92.

7. C. W. S. To, Direct Integration Operators and Their Stability for Random Response of Multi-Degree-Of-Freedom Systems, Computer and Structures, Vol30, No. 40, pp. 865-874.

8. W. Q. Zhu & W. Q. Wu, A Stochastic Finite Element Method for Real Eigenvalue Problems, Stochastic Structural Dynamics, Vol12, Springer-Verlag, 1990, pp. 337-351.