經營科學 第11卷 第1號
1994年 3月

칸반 시스템의 추계적 비교

김성철*

Stochastic Ordering of Kanban Systems with Serial Stages

Sung Chul Kim*

ABSTRACT

Stochastic manufacturing systems are generally formulated as performance models of discrete event systems. In this paper, logical models(as opposed to performance models) of kanban systems are presented which are deterministic and untimed but not stochastic and timed. As a result, the first and second order properties of kanban systems are showed which can be fruitfully applied to the analysis and design of kanban systems.

1. 서 론

다양한 제조 시스템은 시스템의 상태가 이산적으로 일어나는 사상(event)에 의하여 변화되는 동적 시스템(DEDS : Discrete Event Dynamic System)으로 모형화될 수 있다. 본 논문에서는 이러한 제조 시스템 중의 하나인 칸반 시스템(kanban system)을 통하여 이러한 DEDS의 모형화 및 최적화에 도움이 될 수 있는 질적이며 구조적인 특성을 제시하므로써 이러한 시스템의 설계에 도움을 줄 수 있는 문제를 다루고자 한다. 다루고자하는 칸반 시스템의 설계에 관련되는 모수(parameter)는 크게 두 가지로 대별될 수 있다. 하나는 동일한 구조를 갖는 시스템에 있어서 확률적 모수의 설계에 따른 시스템의 수행도와 관련된 문제로써 각 단계에서의 작업 소요 시간이 확률적 작업 소요 시간을 가질때 이러한 확률적 작업 소요 시간이 주어진 시스템의 수행도에 미치는 영향에 관한 문제로 생각될 수 있다. 다음에 고려할 수 있는 모수로는 주어진 칸반 시스템의 구조적 요소의 설계에 관한 문제로써 이에 관한 문제로서는 칸반 시스템에 있어서 각 단계에서의 서버의 수나 칸반의 수가 시스템의 수행도에 미치는 영향에 대한 문제로 언급될 수 있다.

이러한 추계적 시스템의 분석에 관한 문제는 일반적으로 매우 어려운 문제로 알려져 있다. 그럼에도 불구하고 주어진 설계상의 기본적인 요소

* 덕성여자대학교 경영학과

에 있어서 서로 다른 모수를 갖는 두개의 칸반 시스템의 수행도를 직접 계산하지 않고도 서로 비교할 수 있다면 이는 시스템의 설계에 매우 유효한 결과를 가져 올 수 있다. 다시 말하여 주어진 두개의 칸반 시스템에 있어서 시스템의 수행도를 계량적으로 산정하지 않고도 하나의 시스템이 다른 시스템보다도 수행도가 높다고 보일 수 있다면 하나의 시스템이 다른 시스템보다도 추계적으로 효율적이라고 할 수 있다. 본 논문에서는 주어진 칸반 시스템을 Generalized Semi Markov Process(GSMP : Glynn 1989)로 모형화하여 이러한 추계적 비교에 대한 정성적 구조적 특성을 제시하므로써 실제적인 여러 제조 시스템의 설계의 효율성에 기여할 수 있는 새로운 이론적 접근 방법을 예시 하고자 한다.

다루려고 하는 칸반 시스템은 일반적인 분포의 작업 소요 시간을 갖는 하나의 서버로 구성된 M개의 생산 단계 혹은 작업장으로 구성되어 있으며 본 논문에서는 특히 확정적 경로 변환(deterministic routing)을 갖는 칸반 시스템이 관심의 대상이 된다. 확정적 경로 변환이란 하나의 사상의 발생에 의한 상태의 변이가 일정한 경우를 의미하며 이는 각 단계가 순차적으로 배열된 일괄생산 형태의 칸반 시스템에 적용 될 수 있다. 단계 i, $i=1,\cdots,M$,에서는 K_i개의 칸반을 가지고 작업을 기다리는 작업물이나 작업을 완료한 작업물의 수를 제한하며 단계 i에서 작업을 완료한 작업물은 단계 i+1로 진입하게 된다. 단계 1에 투입되는 작업물은 항상 존재하며 단계 M에서 작업이 완료된 작업물은 무한한 능력의 완제품 저장소에 의하여 결코 봉쇄되지 않는다. 또한 단계 M에서 작업이 완료된 작업물에 대한 수요는 무한정 한 것으로 가정(Spearman과 Zazanis 1992) 한다. 이러한 수요의 무한성은 일반적으로 현실성이 부여된 가정으로 실제적인 수요의 도착과정(stationary demand process)에 시스템 내의 피드백 과정이 결합된 것으로 항상 수요가 존재한다는 가정이다. 여기에서 수요의 완충 역활은 대일정계획(Master Production Schedule)에 의하여 수행되며 주어진 기한내에 일정한 수요량 즉 생산량 등이 배정되어 실제 수요의 초과분은 할인등의 계획된 판매(push sales)에 의하거나 재고 등으로 처리되는 것을 가정 한다. 칸반 시스템에 대한 자세한 기술은 다양한 문헌을 참조하기로 하고 여기에서는 생략하기로 한다.

이러한 추계적 칸반 시스템은 시스템의 상태가 이산적으로 일어나는 사상 즉 각 단계에서의 확률적 작업 소요 시간에 의한 작업 완료에 의하여 변화되는 동적 시스템으로 이의 기본적인 구조는 GSMP로 모형화되어 다음과 같이 설명될 수 있다. 단계 i, $i=1,\cdots,M$,에서 사상 $\mathcal{L}_i$를 단계 i에서의 작업 완료를, $\tau_i(n)$, $\varphi_i(n)$, 그리고 $\theta_i(t)$를 각각 단계 i에서의 n, $n=1,2,3,\cdots$, 번째 작업물의 작업 소요 시간, 작업 완료 시점, 그리고 기간 $[0,t]$에 있어서 작업 완료 횟수를 나타낸다고 하면 언급된 GSMP는 사상(작업 완료)$\mathcal{L}_i$에 해당되는 작업물의 작업 소요 시간 $\tau_i=\{\tau_i(n)\}$을 주어진 작업물의 작업 완료 시점 $\varphi_i=\{\varphi_i(n)\}$과 작업 완료 횟수 $\theta_i=\{\theta_i(n)\}$으로의 사상(mapping)을 의미한다.

주어진 GSMP는 크게 두 범주의 모형화에 의하여 분석될 수 있다. 하나는 확정적(deterministic)이며 시간의 요소와 관련이 안된(untimed) 시스템이 질적이며 구조적인 형태에 관심이 부여된 논리적(logical) 모형과 이에 비하여 소요 시간 등의 확률적 요소를 모형에 포함하여 시스템의 수행도의 양적인 측면에 관심을 갖는 지금까지 일반적으로 제조 시스템의 연구에 적용되어 오던 수행도에 관련된(performance) 모형들로 대별될 수 있다(Ho 1989). 그러므로 칸반 시스템의 분석은 GSMP의 확정적 구조적 요소와 시스

템의 주요 투입 요소인 확률적 요소(작업 소요 시간등)를 분리 고려할 수 있게 함으로써 시스템의 분석을 쉽게한다. Glasserman과 Yao(1992a, b)는 GSMP의 설계에 관련된 모수들이 이러한 사상(mapping)에 있어서 수행도의 질적 구조적인 측면에 미치는 논리적 모형을 제시하였다. 본 논문에서는 위의 결과에 기초하여 칸반 시스템의 논리적 모형에 의한 시스템의 설계 모수들이 수행도에 미치는 질적 특정을 제시하고자 한다. 고려되는 설계에 관련된 모수들은 각 단계에서 작업물들의 작업 소요 시간, 각 단계에서의 서버의 수 그리고 칸반의 수이며 이러한 모수들이 서로 다른 두계의 시스템을 서로 비교 가능케 하는 일계 특성으로써 단조성(monotonicity), 최적화에 필수적인 이계 특성으로써 convexity 등을 확률적 요소의 직접적인 고려 없이 예시하고자 한다.

2. GSMP(Generalized Semi-Markov Process)

GSMP는 확률적 소요 시간을 갖는 사상(서비스 완료)들의 발생을 통하여 하나의 상태에서 다른 상태로 전이 되어 가는 과정으로 설명 될 수 있다. 각각의 상태에는 주어진 상태에서 고려 될 수 있는 사상들이 있고 그중 어느 하나의 사상의 발생은 현재의 상태에서 다른 상태로의 전이를 유발 한다. 각각의 사상에는 주어진 사상의 발생 시점을 결정하는 소요 시간이 있고 하나의 사상의 발생 후 새로운 상태에서도 전 상태에서 고려될 수 있었던 사상들은 잔여 소요 시간이 계속되어 고려 될 수 있는 사상에 포함 된다. 그러므로 하나의 상태에서 새로 고려 될 수 있는 사상에는 새로운 소요 시간이 결정되고 전 상태에서 고려 되었던 사상들은 소요 시간을 마칠때까지 계속 고려되며 새로운 상태에서 새로이 고려 가능한 사상들이 존재할 수 있다. 더욱 일반적인 경우에는 하나의 사상의 발생이 다른 사상들의 잔여 시간에 영향을 줄 수 있으나(Glynn과 Iglehart 1988) 본 논문에서는 이러한 경우는 고려하지 않는다.

GSMP의 구조적 요소는 Generalized Semi Markov Scheme(GSMS)으로 특징지어질 수 있다. 주어진 칸반 시스템에 있어서 단계 i, $i=1,\cdots,M$,에 대하여 a_i를 작업을 기다리는 작업물의 수, b_i를 작업이 완료된 작업물의 수라고 하면 이의 확정적 경로 변환의 GSMS는 $\mathcal{G}=(\mathcal{S},A,\varepsilon,\phi,s)$으로 특징 지어 질 수 있다. 여기에서 $\mathcal{S}$는 상태 공간으로서 $\mathcal{S}=\{(a_i)_{i=1}^{M}, (b_i)_{i=1}^{M} \mid a_1+b_1=1,\ a_i+b_i\leq K_i,\ i=2,\cdots,M-1,\ a_M\leq K_M,\ b_M=0\}$이며 A는 모든 단계에서의 작업 완료를 나타내는 사상의 집합 즉 $A=\{e_1,\cdots,e_M\}$이며 $\varepsilon(s)\subseteq A$, $s\in\mathcal{S}$, 는 특정 상태 s에서 고려될 수 있는 사상의 집합으로 $\varepsilon(s)=[\{e_i\cdot 1(a_i>0)\}_{i=0}^{M}]$으로 표시될 수 있다. $\phi(s, e_i)$는 주어진 상태s에서 사상 e_i가 일어 날 경우 도달되는 상태로서 $e_i\in\varepsilon(s)$이다. 그리고 s_0는 주어진 칸반 시스템의 초기 상태를 나타 낸다. 주어진 GSMS에 작업 소요 시간 $\tau=\{\tau_i(n),\ e_i\in A,$ $2,3,\cdots\}$가 주어지면 주어진 칸반 시스템은 GSMP로 모형화 될 수 있다.

설명을 돕기 위하여 초기상태 $s_0=\{(1,\cdots,0),(0,\cdots,0)\}$이라고 하면 이는 첫번째 작업물이 단계 1에서 작업을 시작하는 시점이되고 $\varepsilon(s)=e_1$이 된다. 그러므로 $t=0$에서 첫번째 작업이 시작되어 $\tau_1(1)$ 후에 첫번째 사상 즉 작업이 완료되고 상태는 $\phi(s_0, e_1)=\{(1,1,\cdots,0),\ (0,\cdots,0)\}$이 된다. 이제 $\varepsilon(\phi(s_0, e_1))=(e_1,e_2)$가 되고 만약 $\tau_1(2)\leq\tau_2(1)$이면 $t=\tau_1(1)+\tau_1(2)$에 두번째 사상 즉 단계 1에서 두번째 작업물의 작업이 완료되게 되고 $\tau_2(1)-$

$\tau_1(1)$후에 사상$\mathcal{L}_2$는 발생하게 된다. $K_2>1$인 경우에는 $\phi(s_0,\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2)=\{(1,2,\cdots,0),(0,0,\cdots,0)\}$이 되고 $K_2=1$인 경우에는 $\phi(s_0,\mathcal{L}_1\mathcal{L}_1)=\{(0,1,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0)\}$이 된다. 또한 $\tau_1(2)>\tau_2(1)$이면 $\phi(s_0,\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2)=\{(1,0,1,0\cdots,0),(0,\cdots,0)\}$이 되며 사상 $\mathcal{L}_1$은 $\tau_1(2)-\tau_2(1)$후에 일어나게 된다. 시간의 흐름에 따른 이러한 사상의 전개에 따라 시스템의 상태는 전이되어 간다. 보다 일반적이고 체계적인 GSMP의 상태변이, 사상 발생 회수, 발생 시점에 대한 정식화는 Glasserman(1992)에 기술되어 있다.

3. 확률적 요소에 의한 단조성

주어진 칸반 시스템에 있어서 확률적 요소로서는 작업 소요 시간이 있으며 본 절에서는 확률적 작업 소요 시간에 대한 수행도의 단조성을 설정하고자 한다. 만약 $\mathcal{L}^i$를 i번째 일어나는 사상(작업 완료)이라고 하고 $\sigma=\mathcal{L}^0\mathcal{L}^1\mathcal{L}^2\cdots\mathcal{L}^{k-1}$을 하나의 실행 가능한 일련의 사상(작업 완료)들의 순서(string : '실행순서'라고 지칭)라고 하면 초기 상태 s_0로 부터 일련의 상태 $s_1,s_2,\cdots,s_k$가 주어지며 $\mathcal{L}^i\in\varepsilon(s_i)$, $i=1,\cdots,k-1$,로서 $p(s_1;s_0,\mathcal{L}^0)p(s_2;s_1,\mathcal{L}^1)\cdots p(s_k;s_{k-1},\mathcal{L}^{k-1})=1$이 성립 된다. 여기에서 $p(s_{i+1};s_i,\mathcal{L}^i)$는 i번째 상태 s_i에서 i번째 작업 $\mathcal{L}^i$가 완료 되므로서 도달 되는 상태가 s_{i+1}일 확률을 의미하며 확정적 경로 변환에서 이는 0 또는 1이 된다. 이러한 하나의 실행순서 σ에 있어서 $N_i(\sigma)$는 특정한 사상 $\mathcal{L}_i$의 발생 횟수를 의미하며 $N(\sigma)=(N_1(\sigma),\cdots,N_M(\sigma))$를 의미 한다.

칸반 시스템의 확률적 작업 소요 시간과 수행도와의 관계를 설정 하기 위하여는 다음과 같은 GSMS의 특성들이 관심의 대상이 된다.

비중단성(noninterruption) : 모든 상태 $s\in\mathcal{S}$에 대하여

$$\mathcal{L}_i,\ \mathcal{L}_j\in\varepsilon(s),\ \mathcal{L}_i\neq\mathcal{L}_j\Rightarrow\mathcal{L}_j\in\varepsilon(\phi\ (s,\mathcal{L}_i))\tag{3.1}$$

또는

$$\mathcal{L}_i\in\varepsilon(s),\ p(s';s,\mathcal{L}_i)>0\Rightarrow\varepsilon(s)-\{\mathcal{L}_i\}\subseteq\varepsilon(s').\tag{3.2}$$

이는 임의의 상태에서 실행 가능한 사상들은 그중 하나의 사상의 발생에 의하여 다른 사상의 발생에 영향을 받지 않는다. 즉 하나의 단계에서의 작업 완료가 진행중인 다른 단계의 작업 수행에 아무 영향을 주지 않음을 의미 한다.

대체성(permutability) : 모든 실행 순서 σ_1, σ_2에 대하여

$$N(\sigma_1)=N(\sigma_2)\Rightarrow\varepsilon(\phi\ (s,\sigma_1))=\varepsilon(\phi\ (s,\sigma_2))\tag{3.3}$$

이는 실행 가능한 일련의 사상들은 주어진 순서에 관계없이 도달 되는 상태에서 고려될 수 있는 사상들의 모임이 일정함을 의미한다. 즉 주어진 상태에서 일련의 단계들에서의 작업 완료에 의하여 도달되는 상태들은 각 단계에서의 작업 완료의 횟수가 같으면 그들의 순서에 상관 없이 동일하다.

언급된 비중단성과 대체성은 다음의 단조성으로 대체 될 수 있다.

단조성(monotonicity) : 만약 실행 순서 σ_1과 σ_2가 상태 s에서 실행 가능하고 각 요소에 있어서 $N(\sigma_1)\leq N(\sigma_2)$인 경우에

$$\varepsilon(\phi\ (s,\ \sigma_1))\backslash A_{12}\subseteq\varepsilon(\phi\ (s,\ \sigma_2))\tag{3.4}$$

이면 주어진 GSMS는 단조성을 만족 시킨다고 한다. 여기에서 $A_{12}=\{\alpha_i:N_i(\sigma_1)<N_i(\sigma_2)\}$를 의미한다. 그러므로 주어진 상태하의 두 개의 실행 순서 σ_1과 σ_2에 있어서 실행 순서 σ_1후에 도달되는 상태에서 고려 가능한 사상들 중에서 실행 순서

σ_2와 발생 횟수가 같은 사상들이 주어진 상태에서 σ_2후에 도달되는 상태에서 고려될 수 있는 사상들의 모임에 포함되면 단조성은 만족 된다고 할 수 있다. 이러한 단조성은 antimatroid, characteristic function, score space, 그리고 rank function을 이용한 개념(Björner 1985)으로 연장 될 수 있다.

이러한 단조성을 증명하기 위하여는 특히 다음의 교환 조건이 관심의 대상이 된다.

교환조건 (commuting condition) :

$$\{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j\} \subseteq \varepsilon(\boldsymbol{s}) \Rightarrow \phi\ (\boldsymbol{s}, \mathcal{L}_i\mathcal{L}_j) = \phi\ (\boldsymbol{s}, \mathcal{L}_j\mathcal{L}_i) \quad (3.5)$$

이면 주어진 GSMS는 교환 조건을 만족 시킨다고 한다. 이는 주어진 하나의 상태로 부터 동일한 수의 사상들의 발생에 의하여 도달되는 상태는 발생되는 사상의 순서와 무관하다는 조건, 즉

$$N(\sigma_1) = N(\sigma_2) \Rightarrow \phi\ (\boldsymbol{s}, \sigma_1) = \phi\ (\boldsymbol{s}, \sigma_2) \quad (3.6)$$

으로 설명 될 수 있다. 이는 주어진 상태에서 일련의 작업 완료에 의하여 도달 되는 상태는 각 단계에서의 작업 완료의 횟수가 동일한 경우에는 그들의 발생 순서와 상관 없이 동일한 상태에 이름을 의미 한다. 이러한 교환조건이 만족 되면 주어진 GSMS는 단조성을 만족 시키며 단조성이 만족 되면은 주어진 GSMP으로 모형화 된 칸반 시스템에 있어서 사상 발생 시점들은 작업 소요 시간에 대하여 다음을 만족 시킨다.

정리 1 : 주어진 칸반 시스템에 있어서 작업 완료 시점, $\varphi_i(n)$, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3\cdots$은 작업 소요 시간, $\tau_i(n)$, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3\cdots$에 대하여 추계적으로 증가 함수이다. 이는 어느 단계에서의 작업 소요 시간이 증가하면 작업 완료 시점은 증가하고 결과적으로 주어진 N개의 작업물을 단계 M에서 완료하는 시점은 증가하게 된다. 여기에서 증가는 비감소를 의미하는 엄격하지 않는 의미를 갖는다.

증명 : 위의 단조성을 증명하기 위하여는 주어진 칸반 시스템에 있어서 교환 조건이 만족 됨을 증명하면 된다. 만약 칸반 시스템의 상태 $\boldsymbol{s} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$에서 단계 i에서 작업 완료 $\mathcal{L}_i$가 일어나므로서 전이 되는 상태 $\phi\ (\boldsymbol{s}, \mathcal{L}_i) = \{\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'\}$는 다음과 같이 유도 될 수 있다.

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - e_i + 1 \cdot \{\boldsymbol{a}_{i+1} + \boldsymbol{b}_{i+1} < K_{i+1}\} \cdot \{e_{i+1} + \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} e_{j+1}$$
$$\textstyle\Pi_{r=j}^{i-1}\ 1 \cdot (\boldsymbol{b}_r > 0)\} \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} + 1 \cdot \{\boldsymbol{a}_{i+1} + \boldsymbol{b}_{i+1} = K_{i+1}\}\ e_i - 1 \cdot \{\boldsymbol{a}_{i+1} + \boldsymbol{b}_{i+1} <$$
$$K_{i+1}\}\ \{\textstyle\sum_{j=1}^{i-1} e_j\ \Pi_{r=1}^{i-1}\ 1(\boldsymbol{b}_r > 0)\} \quad (3.8)$$

여기에서 e_i는 단위 베터를 의미하며 1( )은 지정(indicator) 함수를 의미 한다. 즉 단계 i에서 작업 완료 $\mathcal{L}_i$가 일어나면 $\boldsymbol{a}_i$가 하나 감소한다. 다음 단계 i+1에서 여분의 칸반이 존재하면 $\boldsymbol{a}_{i+1}$이 하나 증가하고 단계 i에서 하나의 여분의 칸반이 증가하며 만약 단계 i에 여분의 칸반이 없어 단계 $i-1$, $i-2$, …등에서 $\boldsymbol{b}_{i-1}$, $\boldsymbol{b}_{i-2}$,…>0인 경우에는 단계 i, $i-1$, …등에서 $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_{i-1}$,…등이 하나씩 증가하게 되고 $\boldsymbol{b}_{i-1}$, $\boldsymbol{b}_{i-2}$…등은 하나씩 감소하게 된다. 또한 단계 i+1에 여분의 칸반이 존재하지 않는 경우에는 즉 $\boldsymbol{a}_{i+1} + \boldsymbol{b}_{i+1} = K_{i+1}$이며 $\boldsymbol{a}_i$가 하나 감소하는 반면 $\boldsymbol{b}_i$가 하나 증가하게 되어 $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - e_i$, $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} + e_i$가 된다. 그러므로 $\boldsymbol{b}_{i-1} = 0$인 경우와 $\boldsymbol{b}_{i-1}$ $\boldsymbol{b}_{i-2} \cdots \boldsymbol{b}_{i-r} > 0$인 경우에 대하여 각각 $\boldsymbol{a}_{i+1} + \boldsymbol{b}_{i+1} < K_{i+1}$인 경우와 $\boldsymbol{a}_{i+1} + \boldsymbol{b}_{i+1} = K_{i+1}$인 경우를 독립적으로 고려하므로서 쉽게 $\phi\ (\boldsymbol{s}, \mathcal{L}_i\ \mathcal{L}_j) = \phi\ (\boldsymbol{s}, \mathcal{L}_j\ \mathcal{L}_i)$임을 보일 수 있다.

설명을 돕기위하여 만약 단계 i에서 작업 소요 시간이 모수(location parameter) ω_i에 의하여

$\mathcal{F}_i(\cdot, \omega_i)$의 분포를 갖는다고 하면 ω_i의 함수로서 표시되는 작업소요시간 $\tau_i(\omega_i)$는 $(0,1]$에서 정의되는 일양 분포를 갖는 하나의 확률 변수 U에 의하여 발생되며

$$\tau_i(u,\omega_i) \triangleq \mathcal{F}_i^{-1}(u,\omega_i)$$
$$=\inf\{\tau_i : \mathcal{F}_i(\tau_i,\omega_i) > u\} \tag{3.9}$$

를 만족시킨다. 그러므로 주어진 u에 대하여

$$\tau_i(u,\omega_i+h) \triangleq \mathcal{F}_i^{-1}\{\mathcal{F}_i(\tau_i(u,\omega_i),\omega_i),\ \omega_i+h\} \tag{3.10}$$

로서 $\omega_i < \omega_i'$이면 $\tau_i(\omega_i) < \tau_i(\omega_i')$로서 위의 정리가 적용 될 수 있다. 정리 1은 복수의 서버로 구성된 일괄 생산 형태의 칸반 시스템에도 쉽게 연장 가능 하나 단계 1의 서버의 수는 하나이어야 한다.

일계 특성(first order property)으로서 위에 언급된 단조성과 함께 최적화 문제에서 매우 중요한 의미를 수반하는 이계 특성(second order property)으로서 convexity를 들 수있으며 이는 다음의 조건으로 설명 될 수 있다.

Convexity ; 실행 순서 σ_1, σ_2, 그리고 σ_3의 각 요소에 있어서

$$N(\sigma_3) \geq N(\sigma_1) \wedge N(\sigma_2) \Rightarrow [\varepsilon(\sigma_1) \cap \varepsilon(\sigma_2)] \backslash A \subseteq \varepsilon(\sigma_3) \tag{3.11}$$

를 만족 시키면 주어진 GSMS는 convexity를 만족 시킨다. 여기에서 사상의 집합 $A=\{\mathcal{L}_i : N_i(\sigma_3) > N_i(\sigma_1) \wedge N_i(\sigma_2)\}$를 의미한다. 이는 실행순서 σ_1과 σ_2의 각 요소의 발생횟수 중 적은 값에 대하여 σ_3와 발행횟수가 같은 사상과 $\varepsilon(\sigma_1) \cap \varepsilon(\sigma_2)$의 교집합이 $\varepsilon(\sigma_3)$에 포함되면 이는 convexity를 만족 시킴을 의미한다. 여기에서 만약 $\sigma_1 = \sigma_2$이면 주어진 convexity는 단조성으로 환원된다.

주어진 convexity의 조건은 다음의 두가지 조건으로 분리되어 표현될 수 있다.

1. 실행순서 σ_1, σ_2에 대하여 $N(\sigma_1\sigma) = N(\sigma_1) \vee N(\sigma_2)$인 σ가 존재한다.
2. 실행순서 σ_1, σ_2에 대하여 $N(\sigma) = N(\sigma_1) \wedge N(\sigma_2)$인 σ가 존재한다.

조건 1은 최대값에 대하여 닫혀있다(max-closed)하고 조건 2는 최소값에 대하여 닫혀있다(min-closed)고 지칭 될 수 있으며 실제적으로 조건 1은 단조성을 의미한다.

정리 2 : 주어진 칸반 시스템에 있어서 작업완료 시점 $\varphi_i(n)$, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3,\cdots$,은 작업소요시간 $\tau_i(n)$, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3,\cdots$,에 대하여 증가하는 convex함수이다.

증명 : 조건 1은 단조성을 의미하므로 필요한 증명은 조건 2에 한한다. 단계 i에서 주어진 작업물이 공정을 완료 하였으나 단계 i+1에 여분의 칸반이 없어서 작업물이 다음 단계로의 진입이 불가능 한 경우에도 서버는 단계 i에 여분의 칸반이 존재하지 않을때 까지 다음 작업물의 공정을 계속 수행 가능하다. 그러므로 특정한 단계에서의 작업 완료의 발생횟수는 다음의 부동식을 만족시킨다.

$$N_i(\sigma) \leq N_{i-1}(\sigma) \wedge [N_{i+1}(\sigma) + K_i + K_{i+1}],\ i=1,\cdots,M-1,$$
$$N_M(\sigma) \leq N_{M-1}(\sigma). \tag{3.12}$$

그러므로 $N(\sigma_1)$과 $N(\sigma_2)$가 위의 부등식을 만족 시키면 $N(\sigma_1) \wedge N(\sigma_2)$도 위의 부등식을 만족 시키며 그러므로 최소값에 대하여 닫혀 있다고 할수 있다.

주어진 칸반 시스템에서는 단계 1의 작업과정은 칸반 시스템에의 도착과정으로 설명될 수 있고 단계 2에 여분의 칸반이 없고 단계 1에 작업을 완료한 작업물의 수, $b_1=1$인 경우에는 단계 1의 서비스 과정은 작업의 수행을 멈추게 되어 시스템에의 도착 과정은 멈추게 된다. 그러나 만약 단계 1에 작업수행을 기다리는 작업물의 수를 제한하는 칸반과 별도의 시스템에의 도착과정이 존재하여 주어진 칸반이 모두 제한 되었을 경우에 도착하는 작업물이 봉쇄되어 잃어버리는 경우에는 위의 단조성은 성립되지 않는다.

4. 구조적 요소에 의한 단조성

칸반 시스템의 구조적 요소라 함은 서로 다른 구조의 GSMS을 갖는 경우를 의미하며 이는 어느 단계에서의 칸반의 수나 또는 서버의 수가 다른 경우로 설명될 수 있다. 이러한 두개의 칸반 시스템을 비교 하기 위하여는 하나의 GSMS이 다른 하나의 GSMS에 포함된다고 설명될 수 있는 sub-scheme의 개념을 도입하므로서 쉽게 비교될 수 있다. 하나의 GSMS1은 다음의 조건을 만족시키면 다른 하나의 GSMS2의 sub-scheme으로 언급될 수 있다.

1. $\mathcal{S}^1 \subseteq \mathcal{S}^2$ (4.1)
2. 모든 $s \in \mathcal{S}^1$에 대하여 $\varepsilon^1(s) \subseteq \varepsilon^2(s)$ (4.2)
3. 모든 s, $s' \in \mathcal{S}^1$과 모든 $\mathcal{L}_i \in \varepsilon^1(s)$에 대하여

   $p^1(s' : s, \mathcal{L}_i) = p^2(s' : s, \mathcal{L}_i)$. (4.3)

먼저 하나의 단계에서 칸반의 수가 주어진 칸반 시스템보다 많은 칸반 시스템과 기존의 칸반 시스템을 비교하기로 한다. 주어진 칸반 시스템을 칸반 시스템1, 칸반의 수가 많은 칸반 시스템을 칸반 시스템2라고 하면 두개의 GSMP에 있어서 $GSMS^1$은 $GSMS^2$의 sub-scheme으로 성립 될 수 있다. 설명을 돕기 위하여 가장 간단한 형태로서 칸반 시스템 2가 칸반 시스템 1보다 단계 j에서 칸반이 하나가 많다고 가정하면 칸반의 수는 K_j+1이 되며 단계 j에서 칸반 시스템 1은 $a_j+b_j \leq K_j$ 칸반 시스템 2는 $a_j+b_j \leq K_j+1$이며 다른 단계는 모두 동일하므로 조건 1이 성립된다. 또한 칸반 시스템 1이 단계 j에서 단계 j+1에 의하여 봉쇄되는 경우에도 칸반 시스템 2는 공정을 수행 할 수 있으며 다른 경우에는 같으므로 조건 2가 성립된다. 조건 3은 확률적 경로 변환의 경우에도 마찬가지이나 확정적 경로 변환에는 더욱 자명하다.

정리 3 : 칸반 시스템 2의 작업 완료 시점 $\varphi_i^2(n)$, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3,\cdots$는 칸반 시스템 1의 작업 완료 시점 $\varphi_i^1(n)$, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3,\cdots$보다 빠르다. 즉 동일한 작업 소요 시간 $\tau_i(n)$, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3,\cdots$에 대하여 칸반 시스템 2의 수행도가 칸반 시스템의 1의 수행도 보다 높다.

증명 : 만약 $\tau_i^1(n)$ $(\tau_i^2(n))$, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3$을 칸반 시스템 1(2)에서의 작업 소요 시간 이라고 하면 $\tau_i^1(n) \leq \tau_i^2(n)$일때 $\varphi_i^1(n)=\varphi_i^2(n)$인 $\tau_i^2(n)$이 존재 한다. 이는 칸반 시스템 1에서 단계 j에 의하여 단계 j-1의 공정 수행이 봉쇄되었을 때 칸반 시스템 2의 작업 소요 시간을 연장하여 칸반 시스템 1과 칸반 시스템 2의 작업 실행 순서와 발생 시간을 동일하게 구성하므로서 성립될 수 있다. 그러므로 정리 1에 의하여 동일한 작업 소요 시간에 대하여는 $\varphi_i^2(n) \leq \varphi_i^1(n)$, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3$이 성립 된다. 그러므로 칸반의 수가 다른 경우에도 전술된 단조성은 중요한 역할을 수행 한다.

서버의 수가 서로 다른 칸반 시스템을 서로 비

교하기 위하여서는 M차원의 벡터 $\gamma(s)$의 요소 $\gamma_i(s)$, i=1,…,M,를 주어진 상태 s의 단계 i에서 고려되는 사상의 수로서 작업이 수행중인 서버의 수를 의미한다고 하면 단계 i에서 n번째로 수행되는 작업물의 작업 소요 시간 $\tau_i(n)$은 $n \neq n'$에 대하여 $\tau_i(n')$와 동일 시점에 작업의 수행이 가능하다. 이러한 복수의 서버의 칸반 시스템에 있어서 단조성은 상태 s에서 고려 가능한 두개의 실행순서 σ_1과 σ_2가 그 요소에 있어서 $N(\sigma_1) \leq N(\sigma_2)$ 일때

$$\gamma(\phi\ (s,\sigma_1)) - [N(\sigma_2) - N(\sigma_1)] \leq \gamma(\phi\ (s,\sigma_2)) \quad (4.4)$$

로 표시 될 수 있다.

정리 4:복수의 서버로 구성된 하나의 칸반 시스템에 있어서 작업 완료 시점 $\varphi_i(n)$, i=1,…,M, n=1,2,3,…,은 작업 소요 시간 $\tau_i(n)$, i=1,…,M, n=1,2,3에 대하여 추계적으로 증가 한다.

정리 5:주어진 칸반 시스템은 서버의 수에 대하여 단조성이 성립 되며 이는 서버의 수가 많으면 작업 완료 시점이 빠름을 의미 한다.

정리 4와 정리 5의 증명은 근본적으로 정리 1과 정리 3의 증명과 같다.

5. 확률적 경로 변환의 경우

확정적 경로 변환은 하나의 사상의 발생에 의한 상태의 변이가 일정한 경우 즉 $\mathcal{L} \in \varepsilon(s)$에 대하여 $p(s';s,\mathcal{L})=0$ 또는 1인 경우임에 반하여 확률적 경로 변환은 하나의 사상의 발생에 의한 상태의 변이가 일정한 확률을 가지고 변이되어가는 경우로서 Jobshop 형태의 칸반 시스템에 적용될 수 있다. 예를 들어서 주어진 칸반 시스템이 폐쇄대기 네트웍(Closed Queueing Network : Gorden & Newell 1967) 형태로 모형화된 경우 상태 s에서 작업장(station) i, i=1,…,M,에서의 사상발생, 즉 작업 완료 $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}_i \in \varepsilon(s)$,에 의하여 작업을 완료한 작업물이 작업장 j, j=1,…,M,로 경로 변환을 하는 경우 도달되는 상태를 $b_j^i(s)$라고 하면 $\sum_{j=1}^{M} p(b_j^i\ (s)\ ;s,\ \mathcal{L}_i)=1$이 성립된다. 주어진 확률적 경로 변환은 $p(b_j^i(s)\ ;s,\mathcal{L}_i)=\gamma_{ij}$로 일정한 경우를 상태 독립적인 경로 변환(state-independent routing)이라 하고 여기에서 γ_{ij}, i,j=1,…,M,는 주어진 Jobshop 형태의 칸반 시스템에 있어서의 작업장 i에서 작업장 j로의 경로 변환 확률(routing probability)로 해석될 수 있다.

이러한 상태 독립적인 확률적 경로 변환의 칸반 시스템에 있어서 각 작업장은 제한된 작업물 저장소(limited buffer)를 갖고 있으며 전술된 단조성은 성립되지 않는다. 이는 $\gamma_{ij} > 0$, $\gamma_{kj} > 0$인 경우 작업장 i와 작업장 k에서 작업을 완료한 작업물은 모두 작업장 j로의 경로 변환이 가능하며 작업장 i에서의 작업 소요 시간의 감소는 작업장 k에서 작업장 j에 의한 더욱 빈번한 봉쇄 현상을 경험할 수 있으며 이는 작업장 k의 작업 완료를 지연 시킬수 있다. 또한 확률적 교환 조건, $(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_m) \subseteq \varepsilon(s)$, 그리고 모든 j, n=1,…,M에 대하여 $b_n^m(b_j^i\ (b_j^i(s)) = b_j^i\ (b_n^m(s))$이 성립되지 않음을 쉽게 증명할 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 칸반 시스템에 있어서 주요 설계 모수로써 확률적 작업 소요시간, 서버의 수, 그리고 칸반의 수가 시스템의 수행도에 미치는 영향을 논리적 모형에 의하여 제시하였다. 주어진

문제는 GSMP로 모형화되어 GSMS의 구조적 특성에 의하여 일계 특성으로서의 단조성과 이계 특성으로서의 convexity가 검토되었으며 확정적 경로 변환의 경우에는 위의 특성이 만족됨을 확률적 경로 변환의 경우에는 만족되지 않음을 보였다. 언급된 결과는 서로 다른 모수를 갖는 두개의 칸반 시스템의 수행도를 추계적으로 서로 비교 가능케 함으로써 시스템의 설계에 유용한 질적 구조적 측면을 제시한다.

참 고 문 헌

1. Björner, A., "On Matroids, Groups, and Exchange Languages," in L. Lovasz and A. Recski(ed.) ***Matroid Theory and Its Applications***, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 40, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 25-60.
2. Glasserman, P., "Structural Conditions for Perturbation Analysis Derivative Estimation : Finite-Time Performance Indices," *Oper. Res.*, *39*(1991), pp.724-738.
3. Glasserman, P. and D.D. Yao, "Monotonicity in Generalized Semi-Markov Processes," *Math. of oper. Res.*, *17*(1992), pp. 1-21.
4. Glasserman, P. and D.D. Yao, "Generalized Semi-Markov Processes : Antimatroid Stru-cture and Second-Order Properties," *Math. of Oper. Res.*, *17*(1992), pp.444-468.
5. Glynn, P.W., "A GSMP Formalism for Discrete Event Systems," *Proc. IEEE 77* (1989), pp.14-23.
6. Glynn, P.W. and D.L. Iglehart, "Simulation Methods for Queues : An Overview," *Queueing Systems*, 3(1988).
7. Gorden, W.J. and G.F. Newell, "Closed Queueing Networks with Exponential Servers," *Oper. Res.*, 15(1967), pp.252-267.
8. Ho, Y.C., "Special Issue on Discrete Event Systems," *Proc. IEEE 77*(1989). Spearman, M.L. and M.A. Zazanis, "Push and Pull Production Systems : Issues and Comparisons," *Opers. Res. 40*(1992).