韓國經營科學會誌
第19卷 第3號
1994年 12月

베이지안 기법을 이용한 주관적 가중선형효용모형

김기윤* · 나관식**

The Subjectively Weighted Linear Utility Model using Bayesian Approach†

Ki Yoon Kim* · Kwan Sik Na**

Abstract

In this study, we develope a revised model as well as application of decision problem under ambiguity based on the subjectively weighted linear utility medel. Bayes' rule is used when there are ambiguous probabilities on a decision problem and test information is available. A procedure for assessing the ambiguity aversion function is also presented.

Decision problem of chemical corporation is used for an illustration of the application of the subjectively weighted linear utility model using Bayesian approach. We present the optimal decision using newly developed model. We also perform the sensitivity analysis to assure ourselves about the conclusion we obtained on degree of ambiguity aversion and to characterize parameter of subjectively weighted linear utility model.

1. 서 론

확률이론이 처음 개발되었을 때 모든 의사결정의 기준은 기대값(expected value) 극대화였다. 그 후 확률보다는 주관적 가치, 정신적 가치, 또는 심리적 만족이라는 의미를 통합한 효용(utility)이라는 개념을 도입한 이론이, Bernoulli와 그에 영향을 받은 경제학자들과 심리학자들에 의해서 개발되었다. 이는 초기의 서수효용에서, 수학적 공리이론에 의해 이론적 근거를 마련한 기수효용으로 이행되면서 눈부

* 광운대학교 경영학과 교수
** 경민전문대학 사무자동화과 전임강사

신 발전을 하였다. 여기에 가장 큰 공헌을 한 사람은 von Neumann과 Morgenstern[41] 이며, 그후 Savage[37]가 주관적 기대효용이론(subjective expected utility)으로 더욱 발전시켰다. 하지만 효용이론은 이전성(transitivity) 공리의 위반 예를 제시한 Allais의 역설[1]과, 선택의 불확실성이란 어떤 확률의 개념 만으로는 나타낼 수 없다는 것을 제시한 Ellsberg의 역설[7], 구매시의 선호와 판매시의 가격이 서로 모순되는 선호도치(preference reversal)현상(Lichtenstein과 Slovic)[29], 동일한 문제가 구문(context)적 상황에 따라 다르게 인식된다는 구문효과(Tversky와 Kahneman, Kahn과 Sarin,) 등을 설명하지는 못했다[25][24].

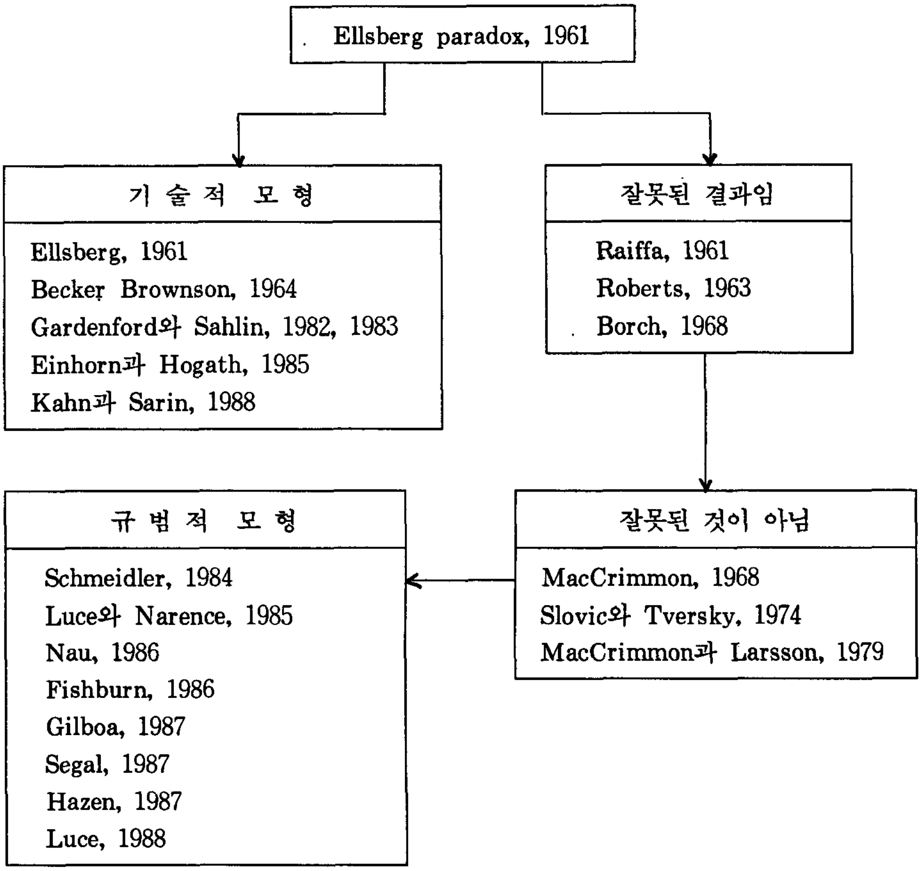
본 논문은 모호한 상황 하에서의 의사결정 모형에 관해 연구하려 한다. 여기서 모호성(ambiguity)이란 사건의 발생확률이 전혀 알려져 있지않은 무지(ignorance)와, 명확하게 알려져 있는 위험(risk)한 상황의 중간적인 상황을 뜻하는 것으로서, 2차 불확실성, 불확실성에 대한 불확실성 또는 정보의 부족상황등으로 정의된다. 본 연구에서는 이를, 어떤 사건의 발생확률에 대한 정보가 부족하여 명확한 확률값을 할당할 수 없는 상황으로 정의 하였다.

Ellsberg[7]의 연구 이후에 이러한 모호성 하에서의 의사결정에 관해서 많은 연구들이 계속되고 있으며, 특히 모형에 관한 연구로는 Einhorn-Hogarth 모형과 Kahn-Sarin 모형, 주관적 가중선형효용모형등이 가장 주목을 받고 있다. 이 중 주관적 가중선형효용모형은 공리화된 규범적 모형으로서, 모호성 하에서의 의사결정자의 행위를 가장 적절하게 반영해 주는 모형으로 평가 받고있다. 이는 주관적 기대효용모형을 확장시킨 것으로서, Hazen[17]이 발표 한 이래로 많은 주목을 받아 왔다. 이의 실용화는 의사결정분야 뿐만 아니라, 인공지능(artificial intellegence) 시스템에서 불확실성을 처리하는 유용한 기법이 될 수 있지만, 모형이 실제 의사결정 문제에 적용될 수 있도록 구체화 되지 못했고, 적용 사례도 발표되지 않아서 실제 적용에 많은 어려움이 따르고 있다.

따라서 본 논문의 연구목적은 다음과 같다. 첫째, 베이스 정리를 이용하여 주관적 가중선형효용모형을 구체화 하고자 한다. 둘째, 이 구체화된 모형을 화공회사의 의사결정 사례에 적용시켜서 분석하고자 한다. 세째, 감도분석에 의해 주관적 가중선형효용모형의 모수의 특성을 파악하고자 한다.

2. 기존연구

확률의 모호성이 의사결정에 미치는 영향에 관한 논의는 Ellsberg[7]의 "Ellsberg paradox"가 최초이다. 그는 모호성을 한 개인이 의사결정을 수행하는데 있어서, 특정한 사건의 발생확률 예측이 막연하거나 자신이 없어, 확률 부여에 대한 확신이 아주 낮은 상태라고 정의했다. 또한, 주어진 정보가 매우 모호한 경우에는 합리적인 의사결정자들이 주관적 기대효용이론(subjective expected utility theory)의 공리에 일치하지 않는 선택행위를 한다는 역설을 제시했다. 이 이후로 모호성 하에서의 의사결정모형에 관한 연구는, 크게 기술적 모형(descriptive model)과 규범적 모형(normative model)으로 분류되어서, 각각 독자적인 형태로 발전되고 있다. 이를 연대순으로 정리해 보면 다음 [그림 1]과 같다.



[그림 1] 모호성 모형에 관한 연구 연대표

주관적 기대효용 이론의 기본적 공리인 확실성 원칙(sure-thing principle)은, 만약 두 대체안이 어떤 상태에 대해 동일한 결과를 보인다면, 대체안의 선호는 이 결과에 독립이어야 한다는 것인데, Ellsberg는 이의 위반 예를 증명하였다[7]. 초기의 학자(Raiffa, Borch)들은 이 증명이 잘못된 것이라고 주장하였지만[34][3], 계속되는 연구들(MacCrimmon, Slovic 과 Tversky, MacCrimmon 과 Larsson)을 통해서 잘못된 것이 아닌 것으로 밝혀졌다[31][41][32]. 따라서, 주관적 기대효용모형의 공리는 규범적이며, 의사결정자의 선택행위를 설명할 수 있다고 믿어지던 것이, 모호한 상황(ambiguity situation)에서는 성립하지 않는 것으로 판명 되었다.

기술적 모형은 Ellsberg[7]에서 부터 유래하여서, Becker와 Brownson[2] 등이 발표한 모형이 있으며, 80년대 초반에 Gardenford와 Sahlin[11][12] 이 다소 발전시켰다. 이들 초기 모형들은 기존의 기대효용모형이 모호한 상황하에서의 의사결정 행위를 설명해 주지 못했으므로, 주된 목적이 이에 대한 설명에 있었다.

따라서 실용모형으로서의 큰 주목은 받지 못했으나, 80년대 중반 이후에 Einhorn-Hogath 모형[5], Kahn-Sarin 모형[24]이 발표 되면서 체계적인 모형 형태를 갖추게 되었다. Einhorn-Hogath 모형은 사람들이 확률을 평가하기 위해서 고정 및 조정과정 (anchoring and adjustment process)을 거친다는 가정에 기초한다. 하지만 이 모형은 단지 Ellsberg 역설과 구문효과(context effect)를 설명해 줄 수 있을 뿐, 두개의 모수인 θ와 β를 측정해서 실제 상황에 적용 시키는 데는 한계점을 지니고 있다. 그후 발표된 Kahn-Sarin 모형은 특정한 사건에 대한 결과 가중치를 그 효용에 부여하는 단순한 논리에 의해, 주관적 기대효용모형에서 유도되었다. 이 모형은, 모호성의 양에 관한 정보가 주어진다면 모형의 구체적인 형태가 결정되고, 반복된 실험으로 모수를 일관성 있게 측정할 수 있다. 그러나 이들 모형 또한 행위를 설명해 주는 기술적 모형이므로, 현실적인 상황에서 사례를 분석하는 데 있어서는 한계점을 지니고 있다.

모호성에 관한 규범적 모형들은 먼저 Schmeidler[39]를 들 수 있고, 이를 Gilboa[13]등이 발전 시켰는데 이들은 비 가산 확률에 기초한다. Luce와 Narens[30]는 어떤 사건 A가 그의 여집합에 비해 선호된다, 선호되지 않는다, 무차별하다의 세가지 발생가능 값 중 하나를 취하는 가산확률 모형을 개발했으며, 그후에 Luce가 수정모형을 제시하였다. 하지만 이는 공리화 되지 못했다. Fishburn[9]은 모호성 회피뿐만 아니라 Allais의 역설까지 수용하는, 부분적으로 공리화된 모형을 제시했다.

Smeidler[39]는 von Neumann과 Morgenstern의 독립성 공리형태를 수용했고, 그것을 만약 대체안 f, g에 있어서 f $\succ$ g 라면, $\alpha f + (1-\alpha)h \succ \alpha g + (1-\alpha)h$을 따르는 F에 대한 $\succ$ 에 적용했다. 여기서 f, g, h 는 쌍의 공단조(pairwise comonotone)이며, 단조성 또는 지배공리(monotonicity or dominance axiom)를 가정했다. 이 모형은 Savage의 확실성 원칙의 위반을 허용 하므로 Ellsberg 역설을 수용한다.

Gilboa(1985)는 Smeidler와 비슷한 비가산 확률의 공리화된 모형을 제시 하였지만, Luce와 Narens[30] 모형의 대체안 공식은 사용하지 않았다. 그 대신 그의 모형은 사건 $A \subseteq S$가 발생하면 x를 얻고, 그렇지 않으면 y를 얻는 도박에 기초한다. 이 모형 역시 공리화된 모형은 아니지만 Ellsberg 역설은 수용하고 있다.

Fishburn[9]은 왜대칭 쌍선형(skew symmetric bilinear)의 논리에 의해 측정된 대체안들을 비교하는 함수와, 모호성에 대한 태도를 반영하기 위해서 측정된 가치함수를 통하여 모형을 구축하였다. 이 모형은 Ellsberg 역설에 부합될 뿐만 아니라, 이전성 공리의 위반, 선호도치, von Neumann과 Morgenstern의 독립성 가정위반 예 들도 모두 수용 하지만, 모호성 회피를 설명하지 못한다는 단점이 있다.

이에 반해, Hazen의 주관적 가중선형효용모형(subjectively weihgted linear utility)은 공리화된 규범적 모형으로서, 주관적 기대효용이론에 의해 설명되지 않은 역설들을 수용할 뿐만 아니라, 행위의 공리를 따르는 합리적인 의사결정자가 어떻게 행동하느냐를 제시하는 모형이다[17]. 이 모형은 Chew와 MacCrimmon에 의해 고안된, 위험 하에서의 의사결정에 대한 가중선형효용모형으로부터 발전하였다. 주관적 가중선형효용모형에 있어서 선택 대체안들은 불확실한 상황들이며, f는 발생가능 상황의 표본공간인 Θ의 유일한 부분집합에 있어서,

각 대체안의 발생확률 에 불확실한 상황을 반영하는 결과 $f(\theta)$를 할당하는 함수이다. 어떤 대체안의 결과가 $f(\theta)=p$ 라면 이것은 순수 위험 대체안(pure risk lottery) 이다. A^*를 집합 $A(A\subset\Theta)$의 척도함수(indicator function)라고 하면, 어떤 불확실한 상황 f는, Θ의 부분집합 $A_1,\cdots A_n$ 과 순수 위험 대체안 $p_1,\cdots p_n$에 대해서 $f=\sum_i p_i A^*_i$로 나타낼 수 있다. 따라서 이 f에 대한 효용은 다음과 같다.

$$u(f) = \frac{\sum_i \pi(A_i)\ \varphi(\alpha_i)\ \alpha_i}{\sum_i \pi(A_i)\ \varphi(\alpha_i)} \qquad (1)$$

여기서 $\pi=\Theta$에 대한 확률 측정치로서 θ의 주관적 확률

α_i=효용함수 u에서 순수위험 대체안 p의 기대효용 $u(p_i)$

φ=양의 가치함수

이것이 주관적 가중선형효용모형의 기본 공식이다(부록 참고). 이 식 (1)이 가중 선형효용모형과 다른점은 φ의 존재인데, 만약 φ가 상수라면 $u(f)=\sum_i \pi(A_i)\alpha_i$가 되어서 기대효용을 나타내지만, 상수가 아니라면 이 가치함수를 통해 모호성 효과를 반영 할 수 있게 된다. 이러한 주관적 가중선형효용 모형의 기본적 아이디어는 첫째, 대부분의 의사결정자들은 모호한 사건보다는 확률이 알려진 위험한 사건에 투자하려는 모호성 회피자(ambiguity averter)이고 둘째, 선호의 강도(intensity of preference)는 결과의 효용(the utility of the consequence)에 비례한다는 것이다. 이에 기초하여 Hazen [17]은 A와 그의 여집합(complement)인 B의 두 사건으로, 사건 A의 모호 확률을 다음과 같이 나타냈다.

$$P(A) = \frac{\pi(A)\varphi(\alpha)}{\pi(A)\varphi(\alpha)+\pi(B)\varphi(\beta)} \qquad (2)$$

여기서 $\pi(A)$=사건 A의 주관적 확률추정치

$\alpha=u(p)$

$\beta=u(q)$

$p,\ q \in P$로서 사건 A와 B의 결과

$u=P$에 대한 선형효용함수

φ=양의 가치함수

이제 주관적확률 $\pi(\ )$과 가치함수 $\varphi(\ )$만 추정되면 주관적 가중선형효용모형은 실제 사례에 적용 가능하므로, 본 논문의 다음장에서는 베이스 정리와 모호성 회피함수를 이용하여 이들을 추정함으로써 모형을 구체화 하고자 한다.

3. 베이지안 기법을 이용한 주관적 가중선형효용모형

Hazen[17]이 발표한 주관적 가중선형효용모형은 가중선형효용모형을 발전시킨 것으로서 주된 모형만 제시 하였을 뿐이므로, 본 장에서는 사전 정보가 이용가능한 경우에, 이를 근거로 하여 사후확률을 추정하는 전통적 확률추론기법인 베이스 정리를 이용하여 모호확률을 추론할 수 있도록 모형을 구체화 하고자 한다. 이때 고려 대상이 되는 의사결정은 선택 가지수가 두가지 이며, 사건이 서로 독립이고 사전 정보가 부족한 모호 상황을 가정하므로, 이를 적절히 반영 할 수 있는 베타분포를 모호확률 추정에 이용 하였다. 또한 효용의 평가 측정은 의사결정자가 상수 모호성 회피자인 것으로 가정하여 지수효용함수를 이용하였다.

먼저 모호확률 추정에 있어서, 만약 연속확

률 변수이고 사건의 발생가지수가 둘 이상인 경우라면 모호확률을 나타내는 식(2)는 다음과 같이 된다.

$$p(\theta)=\frac{\pi(\theta)\varphi(u_\theta)}{\int_0^1 \pi(\theta)\varphi(u_\theta)d\theta} \tag{3}$$

우선 두개의 사건을 갖는 모호성 대체안을 고려해 보자. 사건은 E_1, E_2이고 결과의 효용은 각각 u_1, u_2 이며 E_1의 발생확률은 θ이다. 이 때 사람들은 θ에 대해서 모호하다고 느끼며, θ의 주관적 확률분포를 $\pi(\theta)$로 할당한다. 여기서 사건의 발생가지수가 둘 이며, 관찰치가 많아 질수록 모호성이 감소하여 위험한 상황하에서의 의사결정으로 근사(approximation) 하므로, $\pi(\theta)$를 모수 α, β를 갖는 베타분포로 가정한다. 이제 관찰치 $x_1,\cdots,x_n$을 얻었고, $i=1,\cdots,n$에 대해서 E_i가 발생하였다면, $x_i = 1$ 이고, E_2가 발생하였다면, $x_i = 0$ 이라고 놓자. 그러면 x_i는 모수 θ를 갖는 베르누이 확률변수가 된다. 베이스 정리에 의해 θ의 사후 주관적 확률분포를 먼저 얻은 다음에 모호확률모형을 이용하여 θ에 대한 사후 모호확률분포를 구할 수 있다. θ의 사전 주관적 확률분포가 모수 α, β를 갖는 베타분포이므로 $\pi(\theta) = K\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$이다. 여기서 K는 θ를 포함하지 않는 요소이다. θ가 주어진 조건하에서 어떤 관찰치에 대한 확률변수 X의 조건부확률을 $f(x|\theta)$로 나타내고, 이것이 베르누이 분포를 따른다면 $f(x|\theta) = x(1-\theta)^{1-x}$이 된다. 그러면 x가 주어진 조건하에서의 θ의 사후확률분포는 베타분포가 된다.

$$\pi(\theta|x) = K_1\pi(\theta)f(x|\theta) \tag{4}$$

모수 θ가 주어진 조건하에서의 $x_1,\cdots,x_n$에 대한 조건부 결합확률밀도함수 $f_n(x|\theta)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_n(x_1,\cdots,x_n|\theta) &= f(x_1|\theta),\cdots,f(x_n|\theta) \\ &= \theta^y(1-\theta)^{n-y} \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $y=x_1,\cdots,x_n$이고, 관찰치 $x_1,\cdots,x_n$이 주어진 조건하에서 θ에 대한 사후확률분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi'(\theta) &= \pi(\theta \mid x_1,\cdots,x_n) \\ &= \pi(\theta)f_n(x_1,\cdots,x_n \mid \theta) \\ &= \{k\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\}\{\theta^y(1-\theta)^{n-y}\} \\ &= k\theta^{\alpha+y-1}(1-\theta)^{\beta+n-y-1} \end{aligned} \tag{6}$$

따라서 사후 주관적 확률분포는 모수 $\alpha'=\alpha+y$, $\beta'=\beta+n-y$를 갖는 베타분포이다. 의사결정자는 평균확률이 극단적으로 작은 경우가 아니라면 모호성 회피의 성향을 가지므로, 가치함수는 e^{-u}의 지수형태로 가정하는 것이 합리적이다. 이때 의사결정자가 의사결정 상황이나 시간의 변화에 대해 일관성 있는 회피 성향을 나타낸다고 가정하면, $u' = c$가 된다. 그러면 θ에 대한 사후모호확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P'(\theta) &= \frac{\pi'(\theta)e^{-cu}}{\int \pi'(\theta)e^{-cu}d\theta} \\ &= \frac{\pi'(\theta)e^{-t}}{\int \pi'(\theta)e^{-t}d\theta} \end{aligned} \tag{7}$$

이 식(7)에 의해 사전 정보가 있는경우 사후 모호확률을 추정할 수 있으며, 나아가서 모호성에 대한 의사결정자의 태도를 반영하는 모호성 회피함수의 모수 한계값을 도출해 보면 다음과 같다.

효용단위로 측정되는 국부적 모호성 함수(local ambiguity function)는 다음 식(8)과 같이 정의 되며[18], a(u)는 작은 불확실성에 대해서 모호성 프레미엄에 비례한다.

$$\alpha(u) = \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{d[\log\varphi(u))]}{du} \tag{8}$$

만약 a(u)가 모든 u 에 대해서 양이면 의사결정자는 모호성 회피형이고, 음이면 모호성 추구형이고, 0이면 모호성 중립이다. 이러한 의사결정자의 모호성에 대한 태도를 규명하려는 최근의 실증적 연구들(Gardenfors & Sahlin, Einhorn & Hogarth, Kahn & Sarin, Hogath & Einhorn)[11][6][24][22]을 살펴보면, Ellsberg가 관찰한 현상과 같이 모호성 회피의 정도가 이득의 평균확률에 따라 증가하는 경향이 있음이 확인되었다. 즉, 피실험자들은 아주 작은 확률에 대해서만 모호성을 추구하려는 경향이 있고, 중간 확률에 대해서는 모호성을 회피하려는 경향이 있으며, 큰 확률에서는 보다 더 모호성을 회피하려는 경향이 있다. 따라서 모호성 모형은 확률이 아주 작은 특별한 경우가 아니라면, 본질적으로 모호성 회피의 성향을 가져야 한다. 그러므로 $\varphi()$함수는 앞에서와 같이 지수형태로 가정하는 것이 합리적이다.

여기서 a(u)가 양(positive) 이라고 가정하자. $\varphi(u)$가 항상 양이므로, a(u)의 정의에 의해서 $\varphi'(u)$는 음이다. 이것은$\varphi(u)$가 감소함수임을 의미한다. $\varphi(u)$가 u에 따라 감소하는 경우에 의사결정자는 모호성회피형이다. $\varphi(u)$가 양의 값을 갖는 감소함수이므로, 다음과 같이 지수함수로 나타낼 수 있다.

$$\varphi(u)=e^{-\phi(u)} \tag{9}$$

여기서 $\phi(u)$를 모호성 회피함수(ambiguity aversion function)라고 한다.

$a(u)=-\varphi'(u)/\varphi(u)$이므로, 위 식을 대입하면 a(u)는 다음과 같이 된다.

$$a(u)=-\frac{e^{-\phi(u)}(-\phi'(u))}{e^{-\phi(u)}}=\phi'(u) \tag{10}$$

모호성 회피함수인 $\phi(u)$에 대한 제약조건을 구하기 위해서 다음과 같은 모호한 대체안을 고려해보자.

$$u \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$$

효용 u를 u_1에 대해서 편미분하면 다음과 같이 계산된다.

$$u=\frac{\pi_1\varphi(u_1)u_1+\pi_2\varphi(u_2)u_2}{\pi_1\varphi_1(u_1)+\pi_2\varphi(u_2)} \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial u_1}=\frac{(\pi_1\varphi(u_1)+\pi_2\varphi(u_2))+(\pi_1\varphi(u_1)+\pi_1u_1\varphi'(u_1))-(\pi_1\varphi(u_1)u_1+\pi_2\varphi(u_2)u_2)\pi_1\varphi'(u_1)}{(\pi_1\varphi(u_1)+\pi_2\varphi(u_2))^2}$$

$$=\frac{\pi_1\,\pi_2(\varphi(u_1)+u_1\varphi'(u_1)-u_2\varphi'(u_1))\varphi(u_2)+\pi_1^2\,\varphi^2(u_1)}{(\pi_1\,\varphi(u_1)+\pi_2\,\varphi(u_2))^2} \tag{12}$$

$\partial u/\partial u_1>0$이여야 하므로, 분자 값이 양이 되어야 한다. 모든 π_1, $\pi_2>0$이고, $\pi_1+\pi_2=1$이므로, 다음과 같은 조건식이 유도된다.

$$\varphi(u_1)+u_1\,\varphi'(u_1)-u_2\,\varphi'(u_1)\geq 0 \tag{13}$$

$$\varphi(u_1)\geq(u_2-u_1)\,\varphi'(u_1) \tag{14}$$

여기서, $u_1\leq u_2$인 경우에는 $\varphi(u_1)\geq(u_2-u_1)\ \varphi'(u_1)$는 항상 $\varphi'(u_1)$가 u에 감소함수일 때 성립된다. 또한, $u_1>u_2$인 경우에, $\varphi(u_1)\geq(u_2-u_1)\varphi'(u_1)$는 단지 $-\varphi'(u_1)/\varphi(u_1)\leq 1/(u_1-u_2)$일 때 성립된다. 여기서 $-\varphi'(u_1)/\varphi(u_1)=a(u)=\varphi'(u)$이다.

모든 발생가능 결과에 대한 효용이 u_1, u_2,⋯, u_n이고, 주관적 확률은 π_1, π_2,⋯,π_n인 모호성 대

체안에 있어서, 모호성 회피함수가 모든 u에 대해 다음 조건을 만족한다면, 확실성등가의 효용은 $u_1, u_2, \cdots, u_n$이 증가함에 따라 증가한다.

$$\phi'(u) \le \frac{1}{u-u_{min}} \tag{15}$$

여기서, u_{min}은 효용함수의 최소효용치이다.

모호성 회피형 의사결정자인 경우에, $\varphi(u)$는 모든 가능한 u에 대해서 양의 값을 갖고, 감소함수가 된다. 그러므로 모호성회피함수 $\phi(u)$에 대한 필요조건은 다음과 같다.

$$\phi'(u) > 0 \tag{16}$$

$$\phi'(u) \le 1/(u_1-u_2) \tag{17}$$

여기서 $u_{min}=0$, $\Delta u = u_{max} - u_{min}$이라고 놓고, 모호성 회피 효용함수들의 모수 한계값을 도출할 수 있다.

상수 모호성 회피인 경우는 다음과 같다.

$$\varphi(u) = e^{-cu} \tag{18}$$

$$\varphi'(c) = \frac{ce^{-cu}}{e^{-cu}} \tag{19}$$

식(16)에 의해 $c>0$이어야 하고 식(17)에 의해, $c \le 1/(u-u_{min})$이어야 한다. $u=u_{max}$인 경우는, $c \le 1/(u_{max}-u_{min}) = 1/\Delta u$이다. 따라서, $\varphi = e^{-cu}$ 함수 족에 있어서는 다음과 같은 제약식이 만족되어야 한다.

$$0 \le c \le 1/\Delta u \tag{20}$$

4. 사례연구

4.1 의사결정 문제

피혁 가공용 특수화학 약품을 제조하고 있는 D산업은, 자사에서 생산되는 피혁마무리 도장용 약품이, 품질 등급에 따라 고급과 일반으로 분류되어 판매됨에 따라, 주어진 여건 하에서 가능한 한 고급품 생산비율을 높히기 위해 관련 연구를 수행 중이다. 등급별 Kg당 판매가격은 2,300원, 2,000원이다. 이때의 판매이익은 고급품이 130원/Kg이며, 일반품이 80원/Kg이다. 이에 따라 이회사의 기술연구소에서는, 동일한 공정을 거치는 완제품이 이처럼 차별화되는 원인이 주 원료인 고형분의 농도에 따라 결정된다는 사실을 밝혀 냈다. 즉 고형분의 농도가 적합하면 고급품이 되나, 기준치보다 낮다면 일반품이 된다. 이를 해결하기 위하여 농도가 낮은 원료에 첨가제를 사용하면 농도가 거의 적정 수준을 유지하게 되어 단위당 판매이익이 20원/Kg 높은 중급품이 된다. 따라서 이 경우에 첨가제의 단위 리터당 원가인 10원/Kg을 공제하면, 단위당 판매이익은 90원/Kg이 된다. 반대로 농도가 적합한 원료에 첨가제를 사용한다면, 완제품의 품질에는 영향을 미치지 않아서, 단위당 판매이익에는 변화가 없으나, 첨가제 원가인 10원/Kg이 추가되므로 최종 단위당 판매이익은 120원/Kg이 된다.

첨가제는 기본적으로 원료의 농도를 정확하게 판정하여서 사용 하여야 한다. 이를 위해서는 건당 200,000원이 소요되는 외부 전문연구소에 의뢰하거나, 고가의 장비를 구입하여야한다. 하지만 D산업은, 회사의 규모면에서 이들 두가지 대체안이 모두 현실성이 없다고 판단되

는데 무리가 없는 값(.3) 이였고, 의사결정 상황의 변화에 대해서도 안정적인 값을 보였으므로 일관성 있고, 합리적인 값이었다고 할 수 있다.

단계 6. 이제 마지막으로 대체안들을 평가해야 한다. 먼저 간이 검사가 실시 되었을 때의 최적 2단계 의사결정 도출을 위해서 각 대체안 들의 효용을 구한다.

$$u(k, i) = \frac{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \pi(\theta_1)\ \pi(\theta_{11})\ \pi(\theta_{12})\ u_\theta\ (k, i)\ e^{-cu\theta(k, i)}\ d\theta_1\ d\theta_{11}\ d\theta_{12}}{\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \pi(\theta_1)\ \pi(\theta_{11})\ \pi(\theta_{12})\ e^{-cu\theta(k, i)}\ d\theta_1\ d\theta_{11}\ d\theta_{12}} \tag{22}$$

여기서 $\pi(\theta_1)$, $\pi(\theta_{11})$, $\pi(\theta_{12})$는 모수 $\alpha_1=5$, $\beta_1=15$; $\alpha_2=4$, $\beta_2=1$; $\alpha_3=2$, $\beta_3=13$인 베타 분포를 따른다. 이 식(22)에 의하여 각 의사결정 결과의 효용을 구한다. 즉, 주어진 간이검사 결과인 t_k하에서 u(k, 1)과 u(k, 2)를 비교한다. 계산의 편의상 컴퓨터로 효용계산프로그램을 개발하여, 이를 이용한 계산결과를 살펴보면 다음과 같다. 먼저 검사 생략시 첨가제를 사용하지 않았을 경우(d1)의 효용은 9.187이고, 첨가제를 사용 했을 경우(d2)의 효용은 9.727이다. 따라서 간이검사를 생략 한다면 첨가제를 사용하는 것(d2)이 보다 선호되는 의사결정이다. 다음으로, 간이검사를 시행하여서 농도적합 판정이 나왔을 때(t1), 첨가제를 사용하지 않았을 경우(d1)의 효용은 11.060이고, 첨가제를 사용 하였을 경우(d2)의 효용은 10.896이다. 따라서 간이 검사를 시행하여서 농도적합 판정(t1)이 나왔다면 첨가제를 사용하지 않는 것(d1)이 보다 바람직한 의사결정이다. 간이시험 결과 농도 미달의 판정(t2)이 나왔을 때, 첨가제를 사용하지 않은 경우(d1)의 효용은 8.353이고, 같은 방법으로 첨가제를 사용하였을 경우(d2)의 효용은 9.727이었다. 따라서 간이시험 결과가 농도미달(t2)이라면 첨가제를 사용하는 것(d2)이 보다 바람직한 의사결정이다.

이제 본 사례의 핵심적인 의사결정으로서, 분석 과정상 1단계 의사결정문제인 간이검사의 실시 여부에 관한 분석을 해야한다. 이를 위해서는 2단계 의사결정분석에서 적용된 것과 같은 절차를 이용한다. 즉, 간이검사 시행시와 생략시의 효용을 도출하여서 비교하는 것이다. 간이검사 생략시의 효용은 9.729이고, 간이검사의 효용은 9.805이었다. 따라서 간이검사를 시행하는 것이 생략하는 것 보다 바람직한 의사결정이다.

결론적으로, 본 사례에 있어서 의사결정자의 모호성 회피상수(c)가 .3이였으며, 이때 간이검사를 시행하는 것이 바람직하고, 간이검사 결과가 농도적합이라면 첨가제를 사용하지않고, 농도미달이라면 사용하는 것이 최적 의사결정이다.

4.3 감도분석

이제 위의 분석 결과가 모형의 모수변화에 따라 어떻게 변화하는지를 분석하기 위한 감도분석을 실시 하려한다. 본 모형에서 모수는 α, β와 c이지만 α, β는 사전확률로써 주어지는 정보이므로, 베타분포의 특성상 동일 확률일지라도 사례수가 증가하면, 효용도 증가한다. 따라서, 결국 이 문제에서 의사결정 결과에 영향을 미치는 모수는 모호성에 대한 의사결정자의 태

도를 반영하는, 모호성 회피상수 c의 변화에 따라서 효용 결과가 어떻게 달라지느냐를 살펴보기 위한 감도분석(sensitivity analysis)을 실시하여서, 모형의 특성을 분석하고 의사결정자로 하여금 보다 합리적인 의사결정을 할수 있도록 하고자 한다.

먼저 2단계 의사결정인, 각 의사결정 분기점에 있어서의 대체안들의 효용을 비교 한다. 모호성 회피상수의 변화에 따른, 간이검사 생략시 각 대체안의 효용은 [표 1]과 같다.

[표 1] 간이검사 생략시의 감도분석결과

모호성 회피 상수 c	검 사 생 략		판 정
	농 도 적 합		
	첨가제미사용	첨가제 사용	
.1	9.2290	9.7427	첨가제 사용
.2	9.2076	9.7348	〃
.3	9.1766	9.7271	〃
.4	9.1662	9.7195	〃
.5	9.1462	9.7120	〃
.6	9.1267	9.7044	〃
.7	9.1077	9.6973	〃
.8	9.0892	9.6901	〃
.9	9.0711	9.6830	〃
1.0	9.0534	9.6760	〃

위 결과에 의하면 간이검사 시행을 생략했을 경우는, 모호성 회피상수의 크기에 관계없이 첨가제를 사용하는 것이 보다 선호되는 대체안이다.

간이검사 시행시는 두가지 검사결과의 상황이 발생하며, 각 검사결과에 있어서 보다 바람직한 대체안을 선택해야한다. 이 결과는 다음 [표 2]와 같다.

간이검사 결과 농도미달 판정이 나왔다면, 모호성 회피상수의 크기에 관계없이 첨가제를 사용하는 것이 바람직한 것으로 나타났다. 반대로 검사결과가 농도 적합이라면 모호성 회피상수에 따라서 선호되는 의사결정이 달라진다. 즉, 모호성 회피상수가 약 .5 이하 라면 첨가제를 사용 하지 않는것이 바람직하고, .6 이상이라면 첨가제를 사용 하는것이 바람직한 의사결정이다.

2단계 의사결정 분석결과를 요약해보면, 간이검사 생략시와 검사시행결과가 농도미달이라면, 모호성 회피성향에 관계없이 첨가제를 사용하는 것이 바람직한 의사 결정이고, 간이검사를 시행하여서 그 결과가 농도적합이라면, 모호성 회피성향이 낮은 의사결정자($c \leq .5$)는 첨가제를 사용하지 않는 대체안을 선호하고, 높은 의사

[표 2] 간이검사 시행시의 감도분석결과

모호성 회파상수 c	간 이 검 사					
	농 도 적 합			농 도 미 달		
	첨가제 미사용	첨가제 사용	판 정	첨가제 미사용	첨가제 사용	판 정
.1	11.2250	10.9539	미사용	8.3726	9.7427	사용
.2	11.1441	10.9255	〃	8.3625	9.2223	〃
.3	11.0600	10.8963	〃	8.3530	9.2187	〃
.4	10.9732	10.8665	〃	8.3439	9.2152	〃
.5	10.8843	10.8360	〃	8.3353	9.2118	〃
.6	10.7937	10.8049	사용	8.3271	9.2085	〃
.7	10.7021	10.7734	〃	8.3193	9.2053	〃
.8	10.6101	10.7413	〃	8.3119	9.2022	〃
.9	10.5182	10.7089	〃	8.3048	9.1992	〃
1.0	10.4272	10.6762	〃	8.2980	9.1963	〃

결정자($c \geq .6$)는 첨가제를 사용하는 대체안을 선호한다.

이제 본 의사결정 사례의 1단계 의사결정문제인 간이검사의 실시여부에 관한 감도분석을 실시해야 한다. 이 두가지 대체안의 효용을 계산한 결과는 다음 [표 3]과 같다.

[표 3] 간이검사 시행여부에 대한 감도분석결과

모호성 회피상수	간이검사생략	간이검사시행	판 정
.1	9.7427	9.8325	간이검사시행
.2	9.7348	9.8187	〃
.3	9.7271	9.8050	〃
.4	9.7195	9.7917	〃
.5	9.7120	9.7785	〃
.6	9.7044	9.7046	〃
.7	9.6973	9.7046	〃
.8	9.6902	9.6901	간이검사생략
.9	9.6831	9.6830	〃
1.0	9.6761	9.6760	〃

위의 결과에서와 같이 모호성 회피성향이 상대적으로 높은(약 $c \geq .8$) 의사결정자는 간이검사를 생략하는 대체안을 선호하고, 반대로 상대적으로 낮은(약 $c \leq .7$) 의사결정자는 간이검사를 시행하는 대체안을 선호한다. 의사결정자는 최종적으로 이 감도분석 자료를 검토하여 보다 합리적인 의사결정을 내릴 수 있다.

5. 결 론

본 연구는 모호성하에서의 의사결정에 관한 연구로서, 가장 완벽하게 공리화된 규범적 모형인 주관적 가중선형효용모형을 구체화 시켜서 사례분석에 적용하였다. 이를 위해서, 먼저 사전 확률에 의해 사후확률의 추정을 가능케하는 베이스 정리를 이용하여 모호확률을 추정하였고, 확률분포는 발생가능 사건의 가지 수가 두가지인 경우에 관찰치가 증가함에 따라 정규분포에 근사(approximation)함으로써 모호성 효과를 적절하게 반영해 주는 베타 분포를 적용하였다. 또한, 실제 의사결정 문제를 적절하게 반영하는 의사결정나무(decision tree) 분석에 대한 모형의 적용 절차를 체계적으로 도출함으로써, 사례분석의 구체적인 실행 절차를 제시 하였고, 이를 사례분석에 적용하였다.

사례연구에서는 화공회사의 새로운 농도 검사법 채택 여부에 관한 의사결정인, 시험정보가 있는 경우의 모호성 하에서 의사결정문제에 주관적 가중선형효용모형을 적용하여 분석 함으로써, 합리적인 의사결정 전략을 도출하였다. 이때 의사결정자는 상수 모호성 회피성향을 보였으므로, 가중함수는 지수함수를 이용하였다. 분석결과 도출된 결론의 신뢰성을 보장하고 보다 합리적인 의사결정을 위한 추가정보를 제시해 주며, 나아가서 모형의 모수 특성을 파악하기 위해서 감도분석을 실시하였다. 본 사례분석결과 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 간이 검사를 시행하는 것이, 시행하지 않는 것보다 바람직하다.

둘째, 간이검사결과 농도 적합이라면 첨가제를 사용하지않고, 농도 미달이라면 사용하는것이 최적 의사결정이다.

세째, 모호성 하에서의 의사결정은 사건발생확률의 모호성 뿐만아니라, 의사결정자의 모호성에 대한 태도를 반영하는 모수 c에 의존한다.

이러한 연구결과는, 모호성 하에서의 의사결정분석에 유용 할 뿐만 아니라, 인공지능(AI) 연구에 있어서 신념망(belief network) 추론의 유용한 기법이 될 수 있다. 즉, 기존의 인공지능 시스템이 채택하고 있는 불확실성 처리 기법인, 외연적 접근법(extensional approach)의 단점을 극복할 수 있는 개념적 접근법(intentional approach)의 적용을 가능케 한다.

본 연구는 연구 설계와 진행에 있어서 다음과 같은 한계점이 존재한다.

첫째, 모호성에 대한 의사결정자의 태도를 상수모호성 회피인 경우만 고려하였다.

둘째, 발생가능사건수가 2가지인 경우에 적용가능 모형만 구체화 하였다.

세째, 사례 연구시에 모형의 적용을 위한 가정이 다소 많았다.

따라서 앞으로의 연구는 이러한 사항들을 보완하여, 모호성 하에서의 의사결정행위를 완벽하게 반영 할 수 있고, 나아가서 인공지능 시스템에서 불확실성을 보다 논리적으로 처리 할 수 있는 연구가 진행 되어야 하는 데, 이를 위한 구체적인 연구방향은 다음과 같다.

첫째, 모형의 타당성(validity)과 실행가능성을 검정하기 위한 실험실 실험을 수행한다.

둘째, 의사결정자의 모호성 회피함수가 상수가 아닌 경우에 적용될수 있는 주관적 가중선형효용모형을 구체화 한다.

세째, 발생가능 사건이 둘 이상인 경우에 적용 가능한 절차를 개발한다.

네째, 의사결정자의 모호성에 대한 태도가 사례나 시간에 따라 변화하는 경우의 의사결정 문제를 분석하는 모형을 개발한다.

다섯째, 보다 다양한 사례에 적용한다.

〈 부 록 〉

주관적 가중선형효용모형의 공리

공리 1. 각 A에 대해서 $\succsim_A$는 F_A에 대한 약한 서열(weak order) 을 나타낸다.

공리 2. 어떤 p, q (p, q$\in$P)에 대해서 p $\succ$ q 가 존재한다.

공리 3. 각 A에 대해서 $p \succsim q \Leftrightarrow p \succsim_A q$이 성립한다.

공리 4. $\alpha f+(1-\alpha)h \succ_A g \succ_A \beta f+(1-\beta)h$와 같이, f, g, h$\in F_A$이고 $f \succ_A g \succ_A h$이면 $\exists\ \alpha, \beta\in[0, 1]$이다.

공리 5. $p \succsim q \Leftrightarrow \alpha p+(1-\alpha)r \succsim \alpha q+(1-\alpha)r$

공리 6. $p \succ q \Rightarrow p \succ_{A\cup B} pA^*+qB^* \succ_{A\cup B} q$

공리 7. $p \sim q \Rightarrow PA^*+rB^* \sim_{A\cup B} qA^*+rB^*$

여기서 공리1, 공리4, 공리5는 p에 대한 von Neumann-Morgenstern의 효용함수의 존재를 보장해 준다.

$u(\alpha p+(1-\alpha)q)=\alpha u(p)+(1-\alpha)u(q)$

$p \succsim q \Leftrightarrow u(p) \succsim u(q)$

F의 전체 집합에 아르키메데스 원칙인 공리4를 적용하면, 다음 전제를 얻는다.

전제 : 만약 $p \succsim_A q$ 이고 $p \succ q$이면 $\exists$ unique $\alpha\in[0,1]$이다.

예, $f \sim_A \alpha p+(1-\alpha)q$

공리 1-7은 비율(odds)의 개념을 정의 하는데 충분하다. p$\in$P 와 A$\subset\Omega$에 대해 순서쌍 (A, p)를 A_p로 표시한다. 무차별 하지 않은 p, q$\in\Omega$에 대해서 $\rho(A_p, B_q)$ 를 A$\cup$B가 발생 되었다는 전제하에서, A가 발생하면 p를 구할 수 있고, B가 발생하면 q를 구할수 있다. 이 정의는 다음과 같이 응용될 수 있다. $p \succ q$를 가정하면 공리 6은 $p \succ_{A\cup B} pA^*+qB^* \succ_{A\cup B} q$를 의미하므로 전제는 다음과 같이 된다.

$$pA^*+ qB^* \sim_{A\cup B} \alpha p+(1-\alpha)q$$

$pA^* + qB^*$가 선호상에 있어서 엄격하게 p와 q사이에 있다면 $\alpha\in(0, 1)$이라야 한다. 여기서 $\rho(A_p, B_q) = \alpha/(1-\alpha)$로 정의한다. 만약 $q>p$일때도 $\rho(A_p, B_q)$는 동일하게 정의된다. ρ가 양수이고 역(reciprocal)의 속성을 갖는다면 다음과 같다.

$$\rho(A_p, B_q)\ \rho(B_q, A_p)=1$$

공리 8. $A_1,\cdots A_n$이 $A_1\cap A_2=\cdots=A_{n-1}\cap A_n=A_n\cap A_1=0$인 Ω의 공집합이 아닌 부분집합이고, $p_1\sim p_2\sim\cdots\sim p_n$인 $p_1\cdots p_n\in P$를 가정하자. 또 $i=1,\cdots,n-1$에 대해서 $A_i\cup A_{i+1}$하에서 $p_iA^*_i+p_{i+1}A^*_{i+1}\sim\alpha_iP_i+(1-\alpha_i)P_{i+1}$이고

$$\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\cdots\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_{n-1}}\text{이면}$$

$A_1\cup A_n$ 조건하에서 $p_1A^*+p_nA_n\sim\beta p_1+(1-\beta)p_n$이 성립한다.

이 공리 8은 일관성 속성을 만족한다.

$$\rho(A_1p_1, A_2p_2)\rho(A_2p_2, A_3p_3)\cdots\rho(A_{n-1}p_{n-1}, A_np_n)$$
$$=\rho(A_1p_1, A_np_n)$$

이 식은 결국 $\rho(A_p, B_q)=\varphi(A_p)\varphi(B_q)$의 분해를 가능케한다. 여기서 $\varphi(A_p)$는 p가 결과와 관련되어 있을 때, A의 비정규화된 확률이다.

공리 9. $A_1\cdots_n$이 공집합이 아닌 쌍의 분해를 가정한다. 만약 $i\neq j$에 대해서 $\exists\ \alpha_{ij}$ $\alpha_{ji}\geq0$, $\alpha_{ij} + \alpha_{ji}=1$이다. 즉, $A_i\cup A_j$조건 하에서, $p_iA_i + p_iA_j\sim\alpha_{ji}p_j + \alpha_{ji}p_j$이고 $\exists\ \beta_1,\cdots,\beta_n\geq0$, $\sum_i\beta_i=1$이다. 또한, $\alpha_{ij}/\alpha_{ji}=\beta_1/\beta_j$, $i\neq j$라면, u_iA_i 조

건하에서 $\sum_i p_i A_i \sim \sum_i \beta_i p_i$이다. 여기서 공리 8때문에 공리 9에서 가정된 확률 $\beta_1, \cdots, \beta_n$은 존재하지 않고 $\beta_i = \rho_{i1} / \sum_i \rho_{i1}$으로 주어진다. 여기서 $\rho_{11} = 1$이다. 만약 A_j가 발생했을 때 대체안 p_i를 할당하는 것과 무차별한 확률 β_i를 갖는 순수위험대체안에 p_i를 부여하는 것과 마찬가지로 A_q는 확률 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 이 사건 $A_1, \cdots, A_n$에 대응된다는 것을 의미한다.

이 9가지의 공리에 기초하여, F_A에 대한 $\succsim_A$를 나타내는 u는 다음과 같은 형태를 갖게 된다.

$$u(f) = \frac{\sum_i \pi(A_i)\ \varphi(\alpha_i)\ \alpha_i}{\sum_i \pi(A_i)\ \varphi(\alpha_i)}$$

참고문헌

[1] Allais, M., "Le comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Cristique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine," *Econometrica*, Vol. 21(1979), pp. 503-546

[2] Becker, S. W. and F. O. Brownson, "What Price Ambiguity? or the Role of Ambiguity in Decision Making," *Journal of Political Economy*, Vol. 72 (1964), pp. 62-73.

[3] Borch, K., "The Allais Paradox: a Comment," *Behavior Science*, Vol. 13 (1968), pp. 488-489.

[4] Bordley, R. and G. B. Hazen, "SSB and Weighted Linear Utility as Expected Utility with Suspiction," *Management Science*, Vol. 37, No. 4(1991), pp. 396-408.

[5] Einhorn, H. J. and R. M. Hogarth, "Ambiguity and Uncertainty in Probabilities Inference," *Psychological Review*, Vol. 92, No. 4(1985), pp. 433-461.

[6] Einhorn, H. J. and R. M. Hogarth, "Decision Making under Ambiguity," *Journal of Business*, Vol. 59(1986), pp.225-250.

[7] Ellsberg, D., "Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms," *Quartly Journal of Economics*, Vol. 75(1961), pp. 643-669.

[8] Fellner, W., "Distortion of Subjective Probabilities as a Reaction to Uncertainty," *Quartly Journal of Economics*, Vol. 75(1961), pp. 670-692.

[9] Fishburn, P. C., "Subjective Expected Utility: A Review of Normative Theories," *Theory and Decision*, Vol. 13 (1981), pp. 139-199.

[10] Fishburn, P. C., "The Axiom of Subjective Probability," *Statistical Science*, Vol. 1, No. 3(1986), pp. 335-358.

[11] Gardenfords, P. and N. E. Sahlin, "Unreliable Probabilities, Risk Taking, and Decision Making," *Synthese*, Vol. 53 (1982), pp. 361-386.

[12] Gardenfords, P. and N. E. Sahlin, "Decision Making With Unreliable Probabilities," *British Journal of Mathmetical and Statistical Psychology*, Vol 36(1983), pp. 240-251.

[13] Gilboa, I., "Expected Utility with Purely Subjective Non-Additive Probabilities," *Journal of Mathematical Econ-*

omics, Vol. 16(1987), pp. 65-88.

[14] Gilboa, I., *Probability and Profit*, Homewood, IL: Recharld D. Irwin, 1965.

[15] Goldstein, W. M., and H. j. Einhorn, "Expression Theory and the Preference Reversal Phenomena," *Pychological Review*, Vol. 94, No. 2(1987), pp. 236-254.

[16] Ha, Y. W. and S. J. Hoch, "Product Ambiguity, Processing Strategy, and Advertising-Evidence Interactions," Unpublished Manuscript, Center For Decision Research, University of Chicago, 1989.

[17] Hazen, G. B., "Subjectively Weighted Linear Utility," *Theory and Decision*, Vol. 23(1987), pp. 261-282.

[18] Hazen, G. B., "Ambiguity Aversion and Ambiguity Content in Decision Making Under Uncertainty," *Annals of Operation Research*, Vol. 19(1989), pp. 415-422.

[19] Hazen, G. B., "Decision Versus Policy: The Rationality of Ambiguity Aversion," Unpublished Manuscript, Northwestern University, 1990.

[20] Hazen, G. B., and J. S. Lee, "Ambiguity Aversion in the Small and in the Large for Weighted Linear Utility", *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 4(1991), pp. 177-212.

[21] Hogarth, R. M., "Ambiguity and Competitive Decision Making: Some Implications and Tests," Unpublished Manuscript, Center for Decision Rearch, University of Chicago, 1988.

[22] Hogarth, R. M. and H. J. Einhorn, "Venture Theory: A Model of Decision Weights," Unpublished manuscript, Center for Decision Research, Graduate School of Business, University of Chicargo, 1989.

[23] Hogarth, R. M. and Kunreuther, "Risk, Ambiguity, and Insurance," Working Paper, 1985.

[24] Kahn, B. E. and R. K. Sarin, "Modeling Ambiguity in Decisions under Uncertainty," *Journal of Consumer Research*, Vol. 15(1988), pp. 265-272.

[25] Kahneman, D. and A. Tversky, "Prospect Theory : an Analysis of Decisions under Risk," *Econometrica*, Vol. 97, No. 2(1979), pp. 263-271.

[26] Kahneman, D. and A. Tversky, "Choices, Values, and Frame," *American Psychologist*, Vol. 39, No. 4(1984), pp. 431-350.

[27] Larson, J. R. Jr., "Exploring the External Validity of a Subjectively Weighted Utility Model of Decision Making," *Organizational Bahavior and Human Preference*, Vol. 26(1980), pp. 293-304.

[28] Lee, J. S., *Decision Analysis Under Uncertainty with Ambiguous Probabilities*, Ph. D. dissertation, Department of Industrial Engineering and Management Sciences, Northwestern University, Evanston, IL, 1988.

[29] Lichtensteine, S. and P. Slovic, "Reversals of Preference Between Bid and Choices in Gambling Decisions," *Journal of Exprémental Psychology*, Vol. 89, No. 1(1971), pp. 46-55.

[30] Luce, R. D. and L. Narens, "Classification of Concatenation Measurement Structure According to Scale Type," *Journal of Mathematical Psychology*, Vol. 29(1985), pp. 1-72.

[31] MacCrimmon, K. R. "Descriptive and Normative Implications of Decision Theory Postulates," In K. Borch and J. Mossin, *Risk and Uncertainty*, 1968, pp. 3-32.

[32] MacCrimmon, K. R. and S. Larsson, "Utility theory : Axioms versus oxes', 'Paradoxes'," *Expected utility and the Allais Paradox, Maurice Allais and Ole Hagenceds*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1979), pp.333-409.

[33] Nau, R., "A New Theory of Indeterminate Probabilities and Utilities," Working Paper No. 8609, The Fuqua School of Business, Duke University, Durham, North Carolina, 1986.

[34] Raiffa, H., "Risk Ambiguity and The Savage Axioms: Comment," *Quartly Journal of Economics*, Vol. 75(1961), pp. 690-694.

[35] Roberts, H. V., "Risk, Ambiguity, and THe Savage Axiom: Comment," *Quartly Journal of Economics*, Vol. 77 (1963), pp. 327-336.

[36] Robert, B. and G. Hazen, "SSB and Weihgted Linear Utility as Expected Utility With Suspicion," *Management Science, Vol.* 37(1991), No. 4, pp. 396-408.

[37] Sarin, R. K. and R. L. Winkler, "Ambiguity and Decision Modeling: A Preference-Based Approach," Fuqua School of Business and Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University, Durham, NC., 1990.

[38] Savage, L. J., *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954.

[39] Schmeidler, D., "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity," Preprint 84, Institute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota, Minneapolis, 1984.

[40] Segal, U., "The Ellsberg Paradox and Risk Aversion: An Anticipated Utility Approach," *International Economic Reiew*," Vol. 28, No. 1(1987), pp. 175-202.

[41] Slovic, P. and A. Tversky, "Who accepts Savage's Axiom," *Behavioral Science*, Vol. 19(1974), pp. 638-673.

[42] von Neumann, J. and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 3rd ed., Princeton: The University Press, 1953.

[43] Wothke, W., "Allais' Paradox Revisited: The Implications of the Ambiguity Adjustment Model," North Western University Working Paper, 1985.

[44] Yates, J. F. and L. G. Zukowsky, "Characterization of Ambiguity of Decision-Making," *Behavioral Science*, Vol. 21(1976), pp. 19-25.

[45] Yates, J. F. and L. G. Zukowsky, "Measuring the Involvement Construct," *Journal of Consumer Research*, Vol. 12(1985), pp. 341-352.