韓國經營科學會誌
第19卷 第3號
1994年 12月

부분부재고를 고려한 경제적 생산량모델에 관한 연구†

남상진* · 김정자*

A Study on the Economic Production Quantity Model with Partial Backorders†

Sang-Jin Nam* · Jung Ja Kim*

Abstract

This paper is to build an economic production quantity model for situations, in which, during the stockout period, a fraction β(backorder ratio) of the demand is backordered and remaining fraction (1-β) is lost. This paper develops an objective function representing the average annual cost of a production system by defining a time-weighted backorder cost and a lost sales penalty cost per unit lost under the assumptions of deterministic demand rate and deterministic production rate, and provides an algorithm for its optimal solution. At the extreme β=1, the presented model reduces to the Fabrycky's model with complete backorders.

1. 서 론

재고의 통제와 유지는 생산시스템의 전반적인 흐름에 중대한 영향을 미치고 있다. 따라서, 경제적 생산량(EPQ)을 위한 최적 재고정책에 대한 연구는 많은 학자들에 의해 그 중요성이 강조되어 왔다. 특히 경제적 생산량 모델의 개발에 있어 중요한 문제중의 하나는 품절이 일어날 경우를 고려한 최적재고정책의 결정이다. 일반적으로 제품재고는 수요가 포획성(captive)인 경우 품절된 수요는 부재고(backorder)되어 다음 생산기간까지 기다렸다가 충족되고, 품절된 수요가 포획성이 아닌 경우는 유실판매(lost sale)될 것이다.

따라서 부재고와 유실판매를 동시에 고려한 재고모형은 현실세계의 재고관리에서 일어날 수 있는 문제들에 대해 좀더 유연성있게 대처

† 본 논문은 1993년도 동아대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음
* 동아대학교 공과대학 산업공학과

할 수 있을 것이다. 즉, 품절된 수요의 일부분인 β만큼 부재고되고 나머지 부분인 (1-β)는 유실된다고 가정하는 것이 보다 현실적이다. 이때 발생하는 부재고비용은 일반적으로 부재고가 되고 나서 제품이 납입될 때까지의 기간인 부재고기간중의 대기비용, 생산공정의 유휴비용 혹은 고객에 대한 신용실추비용등이다. 한편 부재고비용을 설정할 때는 과거의 부재고 상황과 부재고기간을 고려하지 않으면 안된다.

부재고와 유실판매를 동시에 고려한 경제적 생산량모델은 현재까지 제안되어 있지 않다. 다만 부재고비용이 유한하고, 또한 품절기간중의 수요가 모두 부재고되는 경우의 경제적 생산량을 구하는 해법이 Fabrycky등 [5, 6]에 의해서 제안되었다 그 후 Altiok[3]는 일단계, 단일품목, 단일 생산설비 및 단일창고로 구성된 생산 재고시스템을 대상으로 수요가 복합포아송분포(Compound Poisson distribution)에 따른다는 가정하에 품절기간중의 수요가 모두 부재고되거나 유실되는 상황하에서 최적의 발주점과 최대 재고수준을 구하는 해법을 제시하였다. 그러나 확정적 수요하에서 조달기간이 일정하다는 가정하에 부재고와 유실판매를 동시에 고려한 경제적 주문량모델은 여러 학자들에 의해서 연구되었다[11,12,13,14]. Montgomery 등[9]은 확률적 수요하에서 연속조사모형과 주기적 조사모형을 제시하고 부재고와 유실판매의 혼합을 고려하여 2단계 최소화 절차에 의한 해법을 개발하였다. Kalro와 Gohil[7]은 수요와 조달기간은 일정하나 납품수량이 불확실한 상황하에서 품절기간중의 수요가 모두 부재고 되거나 부분부재고되는 경우의 최적발주량과 주기당 품절기간중의 최적 수요량을 구하는 해법을 제시하였다. 특히 이 연구는 부분부재고되는 경우의 최적해를 구하는데 있어서 새로운 의사결정변수인 가수요율(fictitious demand rate)을 정의하고 투영분해법(decomposition by projection)을 이용하였다. 그 후 Kim과 Park [8]은 확률적 수요와 조달기간이 일정하다는 가정하에 시간가중 부재고비용과 유실판매 벌과비용을 고려한 경제적 주문량모델을 개발하고 그 해법을 제시했다. 또한 Moses Wee[10]는 단위시간당 총비용함수가 볼록함수가 되는 범위의 부재고비율에 한정하여 주기당 주문량과 품절수량을 구하는 해법을 제시하였다. 따라서 이 연구는 부재고비율의 값이 0에 가깝게 되면 해를 구할 수 없다는 제약성을 갖고 있다. 한편 김등[1]은 확정적 수요와 조달기간이 확률적으로 변동하는 상황하에서 부분부재고를 고려하여 경제적 주문량모델을 개발하고 해를 구하기 위한 반복적 해법을 제안하였다.

본 연구에서는 품절기간중의 수요에 대해서 부재고와 유실판매를 동시에 고려한 경제적 생산량모델을 구축하여 경제적 생산량을 구하는 해법을 제시하고, 부재고비율 β의 변화에 따른 경제적 생산량과 연간 총비용의 감도분석을 시도하고 있다. 본 연구에서 제안된 모델은 부재고비율 β가 일정하다고 가정하고 시간에 비례하는 부재고비용, 즉 시간가중 부재고비용과 유실판매 단위당 고정벌과비용을 포함하는 비용함수를 도입하였다.

본 연구에서 제시한 모델은 $\beta=1$ 일 때, 즉, 품절 발생시의 수요가 모두 부재고되는 경우에는 Fabrycky등[5,6]이 제안한 부재고모델과 일치하고, 생산율(production rate)이 무한대로 되면 Park[11]이 제안한 부분부재고 모델로 환원된다.

2. 모델의 구축

본 연구에서는 단일품목, 확정적 수요하에서 부분부재고를 고려한 최적의 생산량과 최적품절수량을 구하기 위한 경제적 생산량모델을 구축하고자 한다. 이 모델에서는 재고관련비용으로 준비비용, 재고유지비용, 부재고비용 및 유실판매벌과비용을 포함한 연간 총비용함수를 도출한 후 연간 총비용함수를 최소로 하는 주기당 수요와 품절수량을 구하여 경제적 생산량을 구하고자 한다.

2.1 모델의 가정과 기호

2.1.1 모델의 가정

(1) 연간 수요율과 연간 생산율은 일정하다. (단, 생산율>수요율)

(2) 준비비용은 생산 롯트의 크기에 관계없이 일정하다.

(3) 재고유지비용은 생산 롯트의 크기에 비례하여 발생한다.

(4) 생산단가는 생산 롯트의 크기에 관계없이 일정하다.

(5) 부재고비율 β는 부재고기간에 관계없이 일정하다.

2.1.2 기호

A : 1회당 준비비용

C : 단위당 생산비용

D : 연간 수요율

H : 단위당 단위기간 재고유지비용

I_{max}: 최대 재고수준

K : 연간 총비용함수

P : 유실판매단위당 고정벌과비용

Q : 주기당 생산량

R : 주기당 수요량

S : 주기당 품절수량

T : 주기의 길이

V : 연간 생산율

β : 부재고비율, $(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$

π : 단위당 단위기간당 부재고비용

* : 최적해를 나타냄

2.2 모델의 정식화

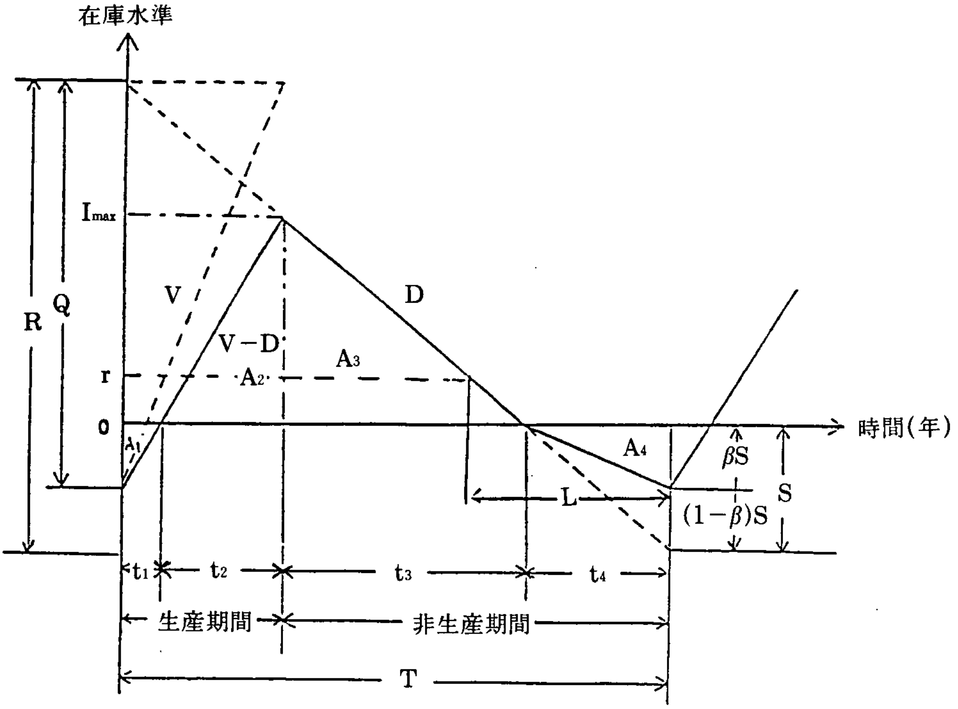
[그림 1]은 부분부재고를 고려한 경우의 재고의 변동상태를 나타내고 있다. [그림 1]에서 연간 생산율 V는 연간 수요율 D보다 크기 때문에 생산기간중의 재고증가율은 (V-D)가 된다. 따라서 생산기간중 품절이 발생하지 않는 기간인 t_2에서의 보유 재고는 (V-D)의 비율로 증가한다. 그러나 t_3기간중의 보유재고는 수요율 D로 감소하다가 t_3기간이 끝나면 품절상태가 된다. 이때 수요의 일부는 부재고 되고 나머지의 수요는 유실판매가 된다. 이 기간 t_4의 품절수량을 S 라고 하면 부재고량은 βS 이고, 유실판매량은 (1-β)S가 된다. 단, 부재고비율(β)은 0과 1사이의 실수이다. 이상의 상황하에서 주기당 총비용함수를 구하면 다음과 같다.

(1) 주기당 생산비용 = CQ

(2) 주기당 준비비용 = A

(3) 주기당 재고유지비용

여기서 주기당 재고유지비용 및 부분부재고비용을 구하기 위하여 t_1, t_2, I_{max}, t_3 및 t_4를 구하면 다음과 같다.



[그림 1] 부분부재고 생산량모델

$$t_1=\frac{\beta S}{V-D}$$

$$t_2=\frac{Q}{V}-\frac{\beta S}{V-D}$$

$$I_{max}=(1-\frac{D}{V})\,Q-\beta S$$

$$t_3=(\frac{1}{D}-\frac{1}{V})Q-\frac{\beta}{D}S$$

$$t_4=\frac{S}{D}$$

여기서 주기당 평균재고량은 $I_{max}=(t_2+t_3)/2$ 이고, 여기에 단위당 단위기간 재고 유지비용 H를 곱하여 주기당 재고유지비용을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{H(V-D)}{2DV}\,(Q-\frac{\beta SV}{V-D})^2$$

(4) 주기당 부재고비용

주기당 부재고는 생산기간중 품절이 발생하는 기간 t_1과 소비기간중 품절이 발생하는 기간 t_4에서 발생한다. 따라서 주기당 평균부재고는 [그림 1]에서 면적 A_1과 A_4의 합인 $\beta S(t_1+t_4)/2$가 되고 여기에 단위당 단위기간 부재고비용 π를 곱하면 주기당 부재고비용은 다음 식과 같다.

$$\frac{\pi\beta b_1 S^2}{2D(V-D)} \qquad \text{단, } b_1=V-D+\beta D$$

(5) 주기당 유실판매 벌과비용

유실판매는 소비기간중 품절이 발생하는 기간 t_4에서만 발생한다. 이때의 유실판매량은 $(1-\beta)$S이므로 주기당 유실판매 벌과비용은 $P(1-\beta)$S이다.

따라서 연간 총비용함수는 이상에서 구한 주기당 비용들의 합에 연간 주기회수 $D/\{Q+(1-\beta)S\}$를 곱해서 구하면 다음 식이 된다.

$$K(Q,\ S)=\frac{D}{Q+(1-\beta)S}$$
$$\left[CQ+A+\frac{H(V-D)}{2DV}\left(Q-\frac{\beta SV}{V-D}\right)^2 + \frac{\pi\beta b_1}{2D(V-D)}S^2+P(1-\beta)S\right]\ :\ Q,\ S\geq 0 \qquad (1)$$

여기서 분석의 편의상 다음 식과 같은 새로운 의사결정변수 R을 도입한다.

$$R=Q+(1-\beta)S \qquad (2)$$

식(2)를 사용하여 식(1)을 R과 S의 함수로 표시하면 연간 총비용함수 K(R, S)는 다음과 같다.

$$K(R,\ S)=CD+\frac{AD}{R}+\frac{H}{2}\left(1-\frac{D}{V}\right)R-\frac{Hb_1}{V}S + (1-\beta)\ D\ (P-C)\frac{S}{R}+\frac{b_1(b_1H+\pi\beta V)}{2V(V-D)}\ \frac{S^2}{R}$$
$$:\ R\geq S\geq 0 \qquad (3)$$

이상과 같이 유도된 연간 총비용함수 K(R, S)는 볼록함수(convex function)이다. [부록 1. 참조] 따라서 연간 총비용 함수의 상대극소치(relative minimum)는 절대극소치(absolute minimum)가 된다. 따라서 식(3)을 최소로 하는 R과 S는 유일한 해를 갖는다. 특히 품절기간중의 모든 수요가 부재고되는 경우 즉, $\beta=1$일 때는 식(2)에서 R=Q가 되기 때문에 식(3)은 식(4)와 같이 변환되어 진다.

$$K'(Q,\ S)=CD+\frac{AD}{Q}+\frac{H}{2}\left(1-\frac{D}{V}\right)Q-HS + \frac{H+\pi}{2(1-D/V)}\ \frac{S^2}{Q} \qquad (4)$$

식(4)는 Fabrycky등 [5, 6]이 도출한 연간 총비용함수와 일치하고 있다. 그런데 부분부재고모델의 연간 총비용함수인 식(3)의 K(R, S)는 볼록함수이기 때문에 이 함수를 최소로 하는 R과 S는 K(R, S)를 R과 S로 편미분해서 0으로 놓고 정리한 다음의 두 식을 만족해야 한다.

$$R^2=\frac{V}{(V-D)H}\left[2AD+2(1-\beta)D(P-C)S+\frac{b_1(b_1H+\beta\pi V)S^2}{V(V-D)}\right] \qquad (5)$$

$$R=\frac{(1-\beta)(P-C)DV}{b_1H}+\frac{b_1H+\beta\pi V}{(V-D)H}S \qquad (6)$$

식(5)를 간단하게 하기 위해서 식(6)에 b_1HS/V를 곱하여 정리하면 다음 식이 된다.

$$\frac{b_1(b_1H+\pi\beta V)S^2}{V(V-D)}=\frac{b_1HSR}{V}-(1-\beta)(P-C)DS$$

위 식을 식(5)에 대입하면 식(7)이 얻어진다.

$$R^2=\frac{2ADV+[(1-\beta)(P-C)DV+b_1\ HR]S}{(V-D)H} \qquad (7)$$

따라서 식(6)과 식(7)을 연립하여 풀면 R^*와 S^*는 다음과 같다.

$$R^*=\left[\frac{2ADV}{(V-D)H}+\frac{2b_1AD}{\beta\pi(V-D)}-\frac{D^2V(1-\beta)^2(P-C)^2}{\beta\pi b_1H}\right]^{1/2} \qquad (8)$$

$$S^*=\frac{-(1-\beta)VD(V-D)(P-C)}{b_1(b_1H+\beta\pi V)}+\frac{(V-D)HR^*}{b_1H+\beta\pi V}$$
$$=\frac{-(1-\beta)VD(V-D)(P-C)+\left[\frac{D(V-D)Hb_1}{\beta\pi}\{2Ab_1(b_1H+\beta\pi V)-b_2(1-\beta)^2\}\right]^{1/2}}{b_1(b_1H+\beta\pi V)} \qquad (9)$$

단, $b_2=DV(V-D)(P-C)^2$

이상에서 구한 R*와 S*가 동시에 양의 실근을 갖기 위한 β의 범위를 구하면 다음과 같다. 우선 식(8)에서 R*가 양의 실근을 갖기 위한 β(단, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$)의 범위는 다음과 같다.

(1) P=C일 때 : $0 < \beta \leqslant 1$

(2) P≠C일 때 :

$$1-\frac{2DH+\pi V+\pi D-[\pi^2(V-D)^2+2b_2(\pi+H)/A]^{1/2}}{\{2AD(DH+\pi V)-b_2\}/(AV)}<\beta\leqslant 1$$

한편, 식(9)에서 S*가 양의 실근을 갖기 위한 β의 범위는 P와 C의 값에 따라 다음과 같이 3가지 경우로 나타낼 수 있다.

(1) P=C 일 때 : $0 < \beta \leqslant 1$ (10)

(2) P>C 일 때 :

$$1-\frac{V}{D+(2AH/b_2)^{-1/2}}<\beta\leqslant 1 \tag{11}$$

(3) P<C 일 때 :

$$1-\frac{2DH+\pi V+\pi D-[\pi^2(V-D)^2+2b_2(\pi+H)/A]^{1/2}}{\{2AD(DH+\pi V)-b_2\}/(AV)}<\beta\leqslant 1 \tag{12}$$

이상의 결과에서 R*와 S*가 동시에 양의 실근을 갖기 위한 β의 범위는 S*가 양의 실근을 갖기 위한 β의 범위와 일치한다. 따라서 식(9)에서 구한 S*가 양의 실근이면 양의 실근 R*가 항상 존재한다. 한편, S*>0이면 R*≥S*이 된다. [부록 2. 참조] 따라서 식(9)에서 구한 S*의 값에 따라 다음과 같이 최적해를 구할 수 있다.

1) S* >0 인 경우

식(9)에서 구한 S*가 양이면 R의 최적해 R*는 식(8)에 의해 결정된다. 이때 주기당 최적 발주량 Q*는 다음 식에 의해 구할 수 있다.

$$Q^*=R^*-(1-\beta)S^* \tag{13}$$

2) S*≤0 혹은 허수인 경우

식(3)을 S에 대하여 2차 편미분하면

$$\frac{\partial^2 K}{\partial S^2}=\frac{b_1(b_1H+\beta\pi V)}{V(V-D)R}>0$$

이므로, 식(9)로부터 구한 S*가 양수(혹은 실시)가 아니면 S*=0이다. S*=0이면 식(2)로부터 R=Q가 되고 연간 총비용함수 K(R, S)는 다음과 같이 된다.

$$K(Q)=CD+\frac{AD}{Q}+\frac{H}{2}\left(1-\frac{D}{V}\right)Q \tag{14}$$

식(14)는 경제적 생산롯트(economic production lot size)의 비용함수이고 식(14)에 의해 경제적 생산롯트를 구하면 다음 식과 같다.[3]

$$R^*=Q^*=\left[\frac{2ADV}{(V-D)H}\right]^{1/2} \tag{15}$$

위의 식(15)에서 R*>0이므로 R*>S*이고, S*=0일 때의 연간 총비용은 다음과 같다.

$$CD+[2(1-D/V)ADH]^{1/2} \tag{16}$$

3. 제안된 모델과 기존의 EPQ 모델과의 관계

부분재고를 고려한 본 연구의 경제적 생산량 모델과 기존의 경제적 생산량모델과 관련성에 대하여 살펴보기로 하자.

식(8)과 식(9)에서 부재고비율 β가 1일 때 R*와 S*를 구하면 다음식이 된다.

$$Q^*=R^*=\left[\frac{2ADV}{(V-D)H}\right]^{1/2}\left[\frac{\pi+H}{\pi}\right]^{1/2} \tag{17}$$

$$S^* = \left[\frac{2AD(1-D/V)}{\pi(1+\pi H)}\right]^{1/2} \tag{18}$$

식(17)과 식(18)은 Fabrycky등[5,6]에 의해 유도된 식과 일치한다. 따라서 본 연구에서 제안된 모델의 생산량 Q*는 Fabrycky등에 의해 얻어진 식을 포함하고 있기 때문에 보다 일반적이라 할 수 있다. 또한 생산율 V→∞일 때 식(8)과 식(9)는 각각 다음과 같이 변환된다.

$$R^* = \left[\frac{2AD(\beta\pi+H)-\{(1-\beta)D(P-C)\}^2}{\beta\pi H}\right]^{1/2} \tag{19}$$

$$S^* = \frac{-(1-\beta)D(P-C)+\left(\frac{H}{\beta\pi}\left[2AD(H+\beta\pi)-\{(1-\beta)D(P-C)\}^2\right]\right)^{1/2}}{H+\beta\pi} \tag{20}$$

식(19)와 식(20)은 확정적 수요하에서 부분부재고를 고려하여 Park[11]이 유도한 주기당 수요량와 R*와 주기당 품절수량 S*와 일치한다. 단, 제안된 모델에서는 생산비용 C를 고려하고 있기 때문에 식(19)와 식(20)에는 생산비용이 포함되어 있다.

4. 부분부재고 생산량모델의 해법

제안된 부분부재고 생산량의 결과로부터 연간 총비용을 최소로 하는 최적해를 구하기 위해 먼저 식(9)로부터 S*를 구한다. 만약에 S*가 양이면 식(8)에 의해 R*를 구한 다음 식(13)에 의해 Q*를 구한다. 이때 연간 총비용은 식(3)을 이용하여 계산한다. 그러나 식(9)에서 구한 S*가 음(또는 허수)이면 S*는 0으로 두고 식(15)에 의해 Q*를 구한다. 이때 연간 총비용은 식(16)을 이용하여 구한다.

5. 수치예 및 감도분석

어떤 품목에 대한 연간수요율(D)은 1,250단위, 연간생산율(V)는 2,500단위이다. 한편 생산단가(C)는 단위당 0.4만원, 단위당 단위기간당 재고유지비용(H)은 0.1만원, 준비비용(A)은 1회당 10만원, 단위당 단위기간당 부재고비용(π)은 0.2만원, 유실판매단위당 벌과비용(P)은 0.3만원이다. 이상의 자료로 부재고비율 β의 변화에 따른 주기당 최적생산량(Q*), 품절수량(S*) 및 연간 총비용을 본 연구에서 제안된 해법으로 구하면 〈표 1〉과 같다.

〈표 1〉에서 β=0.4120은 S*가 양의 실근을 갖기 위한 β의 하한값으로 [식(12)참조] $0 \leq \beta \leq 0.4120$일 때는 S*가 항상 0이 됨을 알 수 있으며, $0.4120 < \beta \leq 1$의 범위에서는 β가 증가할 때 S*는 감소하나 Q*와 K(R*, S*)는 증가함을 알 수 있다.

[표 1] β의 감도분석

β	0	0.4120	0.5	0.6	0.8	1
S^*(個)	0	0	408	346	227	144
R^*(個)	707	707	595	757	859	866
Q^*(個)	707	707	391	619	814	866
$K(R^*,R^*)$(만원)	535.36	535.36	499.15	510.21	522.49	528.87
T^*(年)	0.57	0.57	0.48	0.61	0.69	0.69

6. 결 론

본 연구에서는 품절발생시의 수요에 대하여 부분부재고와 유실판매를 동시에 고려하여 경제적 생산량(EPQ)을 구하기 위한 연간 총비용 함수를 도출하고 이 비용함수를 최소화하는 주기당 최적생산량과 품절수량을 구하는 방법을 제안했다. 그리고 부재고비율 β에 대한 감도분석을 실시하여 β의 변화에 따른 최적생산정책과 연간 총비용의 변동상태를 분석했다. 본 연구의 결과에서 얻어진 성과를 정리하면 다음과 같다.

본 연구에서 제안한 모델은 품절발생시의 고객의 일반적인 반응 즉, 부재고와 유실판매를 동시에 고려하여 최적해를 구하고 있기 때문에 종래의 모델보다는 실용적인 해를 구할 수 있다.

한편 종래의 Fabrycky등[5,6]이 제안한 모델은 부분 부재고비율 β가 1일 때에만 해를 구할 수 있으나 본 연구에서 제안한 모델에서는 모수(Parameter)로서 주어진 $\beta(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$의 모든 값에 대하여 해를 구할 수 있다.

본 연구에서는 부재고비율 β를 부재고기간과는 독립으로 하고 0 과 1 사이의 값을 취하는 모수(Parameter)로 가정하고 있다. 그러나 실제로 소비자의 구매행동을 생각해 보면 β는 부재고기간의 길이에 의존한다. 따라서 본 연구에서 제안한 모델은 부재고기간이 비교적 짧은 경우와 수요가 포획성이 있는 경우에 한하여 적용 가능하다.

따라서 향후 연구과제로서는 부재고기간에 의존하는 부재고비율 β를 도입하여 실제로 소비자의 구매행동을 반영할 수 있는 모델의 개발이 필요하다.

〈부 록〉

1. 다음의 연간 총 비용함수 K(R,S)는 볼록 함수이다.

$$K(R,S)=CD+\frac{AD}{R}+\frac{H}{2}(1-\frac{D}{V})R-\frac{Hb_1}{V}S+(1-\beta)D(P-C)\frac{S}{R}+\frac{b_1(b_1H+\pi\beta V)}{2V(V-D)}\frac{S^2}{R}$$

: R≥S≥0

[증 명]

1) S=0일 때

S=0일때, 연간 총비용함수 K(R,S)는 식(3)에서 다음과 같이 변환된다.

$$K(R)=CD+\frac{AD}{R}+\frac{H}{2}(1-\frac{D}{V})R \tag{21}$$

식(21)을 2회 미분하면

$$\frac{\partial^2 K}{\partial R^2}=\frac{2AD}{R^3}>0$$

이므로 S=0일 때 연간 총비용함수 K(R, S)는 볼록함수이다.

2) S>0 일 때

(1) P=C의 경우

이 경우 S>0인 β의 범위는 식(10)으로 부터 $0<\beta\leq 1$이고, K(R, S)는 식(3)에서 다음 식과 같이 변형된다.

$$K(R,S)=CD+\frac{AD}{R}+\frac{H}{2}(1-\frac{D}{V})R-\frac{b_1H}{V}S+\frac{b_1(b_1H+\beta\pi V)}{2V(V-D)}\frac{S^2}{R}$$

위 식을 R과 S로 각각 편미분하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 K}{\partial R^2}=\frac{1}{R^3}[2AD+\frac{b_1(b_1H+\beta\pi V)}{V(V-D)}S^2]$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial S^2}=\frac{b_1(b_1H+\beta\pi V)}{V(V-D)R}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial R\partial S}=\frac{b_1(b_1H+\beta\pi V)S}{V(V-D)R^2}$$

따라서 K(R,S)에 대한 헤시안행렬(Hessian matrix)의 행렬식 |H|를 구하면 다음과 같다.

$$|H|=\frac{\partial^2 K}{\partial R^2}\frac{\partial^2 K}{\partial S^2}-[\frac{\partial^2 K}{\partial R\partial S}]^2$$

$$=\frac{2AD}{V(V-D)R^4}>0$$

(2) P>0의 경우

S>0이 되는 β의 하한은

$$1-(2b_1^2AH/b_2)^{1/2}<\beta \tag{22}$$

이고, 식(3)의 K(R,S)를 R과 S로 편미분하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 K}{\partial R^2}=\frac{1}{R^3}[2AD+2(1-\beta)D(P-C)S+\frac{b_1(b_1H+\beta\pi V)}{V(V-D)}S^2]$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial S^2}=\frac{b_1(b_1H+\beta\pi V)}{V(V-D)R}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial R\partial S}=-(1-\beta)D(P-C)\frac{1}{R^2}-\frac{b_1(b_1H+\beta\pi V)}{V(V-D)}\frac{S}{R^2}$$

따라서 $K(R,S)$는 헤시안 행렬의 행렬식 |H|는 다음과 같다.

$$|H|=\frac{\partial^2 K}{\partial R^2}\cdot\frac{\partial^2 K}{\partial S^2}-[\frac{\partial^2 K}{\partial R\partial S}]^2$$

$$=\frac{D}{R^4}[\frac{2b_1A(b_1H+\beta\pi V)}{V(V-D)}-(1-\beta)^2D(P-C)^2]$$

여기서 식(22)로부터

$$(1-\beta)^2\ D(P-C)^2<\frac{2b_1^2AH}{V(V-D)}$$

이므로 K(R,S)에 대한 헤시안행렬의 행렬식 |H|는 다음과 같다.

$$|H| = \frac{2\beta\pi b_1 AD}{(V-D)R^4} > 0$$

(3) P<C의 경우

S>0이 되는 β의 하한은

$$1-[2b_1A(b_1H+\beta\pi V/b_2]^{1/2} < \beta \qquad (23)$$

이고, K(R,S)의 헤시안행렬의 행렬식은 다음과 같다.

$$|H| = \frac{D}{R^4}\left[\frac{2b_1A(b_1H+\beta\pi V)}{V(V-D)} - (1-\beta)^2 D (P-C)^2\right]$$

여기서 식(23)으로 부터

$$(1-\beta)^2 D(P-C)^2 < 2b_1A(b_1H+\beta\pi V)/\{V(V-D)\}$$

이므로 항상 |H|>0이다.

이상에서 S*>0 일때 K(R,S)에 대한 헤시안행렬 H는 정정치행렬(positive definite matrix)이고, 연간 총비용함수 K(R,S)는 볼록함수이다.[2]

2. S*>0이면 R*≥S*이다.

[증명]

S*>0일 때 R*와 S*의 대소관계를 조사하기 위하여 식(9)를 변형하면 다음 식이 얻어진다.

$$R^* = \frac{(1-\beta)VD(P-C)}{Hb_1} + \left[1+\frac{\beta}{V-D}\left(D+\frac{\pi V}{H}\right)\right] S^* \qquad (24)$$

(1) P≥C일 때

식(24)로부터 $b_1>0$, (V−D)>0이고, β는 정의로부터 비음이기 때문에 P≥C인 경우 R*≥S* 되는 것은 자명하다.

(2) P<C 일 때

식(24)으로부터 R*는 S*의 1차함수이고 β는 비음이기 때문에 S*에 대한 R*의 변화율은 β=0일 때는 1이고, β>0일 때는 1보다 크다. 또 식(24)로부터 β의 값이 증가함에 따라 S*에 대한 R*의 변화율이 증가하는 것을 알 수 있다. 한편 식(24)로부터 β값의 변화에 따른 R*와 S*의 대소관계를 보면, β=0일 때 R*<S*이고, β=1일 때 R*>S*가 된다. 그러므로 R*=S*가 되는 양의 β값이 반드시 존재한다. 따라서 R*=S*가 되는 β의 값은 식(24)로부터 다음 식이 성립한다.

$$\frac{(1-\beta)VD(P-C)}{Hb_1} = \frac{\beta}{V-D}\left(D+\frac{\pi V}{H}\right)S^* \qquad (25)$$

식(25)의 S*에 식(9)를 대입해서 정리하면 다음 식이 얻어진다.

$$(1-\beta)VD(V-D)(P-C)\left[1+\frac{b_1H+\beta\pi V}{\beta(DH+\pi V)}\right] = \left[D(V-D)H\frac{b_1}{\beta\pi}\{2b_1A(Hb_1+\beta\pi V) - b_2(1-\beta)^2\}\right]^{1/2}$$

위의 무리방정식을 풀기 위하여 양변을 제곱하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$(1-\beta)^2 = \frac{2b_1A(b_1H+\beta\pi V)}{b^2\left[1+\frac{\beta\pi V}{b_1H}\left\{1+\frac{b_1H+\beta\pi V}{\beta(DH+\pi V)}\right\}^2\right]}$$

위의 방정식을 풀면 R*=S*가 되는 β는 다음 식과 같다.

$$\beta = 1-\left\{\frac{2b_1A(b_1H+\beta\pi V)}{b^2\left[1-\frac{\beta\pi V}{b_1H}\left\{1+\frac{b_1H+\beta\pi V}{\beta(DH+\pi V)}\right\}^2\right]}\right\}^{1/2} \qquad (26)$$

한편 $S^*>0$일 때 β의 하한은 식(23)과 같다. 식(26)과 식(23)의 β의 하한을 비교하여 보면

$$\frac{\beta\pi V}{Hb_1}\left[1+\frac{\beta\pi V+Hb_1}{\beta(DH+\pi V)}\right]^2 \geqslant 0$$

이므로 식(26)에 의해 구해진 $R^*=S^*$가 되는 β의 값은 식(23)의 하한보다 작다. 그러므로 $S^*>0$이면 $R^* \geqslant S^*$가 된다.

참고문헌

[1] 金正子, 李康雨, "調達期間の不確實性を考慮した部分負在庫モデルに關する研究," 日本經營工學會, Vol. 42, No.5, (1991), pp. 338-344.

[2] 久志本 茂 : 最適化問題の 基礎, 森北出版株式會社, 1979.

[3] Altiok, T/. "(R,r) Production/Inventory System," *Oprs. Res.*, Vol.37 No.2. (1989), pp.266-276.

[4] Anderson, D.R., D.J.Sweeny, and T.A. Williams, *An Introuction to Management Science*, West Publishing Company, New York, 1988.

[5] Fabrycky, W.J., and J.Banks, *Procurement Inventory Systems : Theory and Analysis*, Reinhold Publishing Corp., New York, 1967.

[6] Fabrycky, W.J., P.M.Ghare, and P.E. Torgersen, *Industrial Operations Research*, New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1972.

[7] Kalro, A.H., and M.M.Gohil, "A Lot Size Model with Backlogging When the Amount Received Is Uncertain," *Int. J. Prod.Res.*, Vol.20, No.6,(1982), pp.775-786.

[8] Kim, D.H., and K.S.Park, "(Q,r)Inventory Model with a Mixture of Lost Sales and Time-Weighted Backorders," *J. Opr. Res. Soc.*, Vol.36,(1985), pp. 231-238.

[9] Montgomery, D.C., M.S.Banzaraa, and A.K.Keswani, "Inventory Models with a Mixture of Backorders and Lost Sales," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol.20, No. 2, (1973), pp.255-263.

[10] Moses Wee, H.M., "Optimal Inventory Policy with Partical Backordering," *Optimal Control Application & Methods*, Vol.10, (1989), pp.181-187

[11] Park, K.S., "Inventory Model with Partial Backorders," *Int. J. System Sci.*, Vol.13, No.12(1982), pp.1313-1317.

[12] Park K.S., "Another Inventory Model with a Mixture of Backorders and Lost Sales," *Naval Res. Logist, Quart.*, Vol.30, No.3(1983), pp.397-400.

[13] Resenberg, d., "A New Analysis of a Lot-Size Model with Patical Backlogging," *Naval Res. Logist. Quart.*, 26, Vo.2(1979), pp. 349-353.

[14] Whitin, T.M., "Recent Articles on Partial Backorders:Comments," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol.32, (1985), pp. 361-362.