韓國經營科學會誌
第19卷 第3號
1994年 12月

AHP 가중치 결정에서의 다수 전문가 의견종합 방법†

김성철* · 어하준**

Priority Aggregation for AHP based on Experts Opinions

Sung Chul Kim and Hajoon Eo

Abstract

The Analytic Hierarchy Process (AHP) is widely used for evaluation of large projects. If a group of experts with different expertise are involved in a AHP decision, they need some way to aggregate their opinions. In this paper, we suggest a way to aggregate the experts' priorities in a given hierarchy using the concept of the Bayesian decision analysis. A criterion that can be used for screening out unreliable data is introduced, and it is used for priority aggregation. Some numerical results are shown to illustrate the procedure.

1. 서론

일반적으로 대규모 사업분석, 특히 무기체계 비용대효과 분석 (cost-effectiveness analysis)에 있어서 널리 쓰이고 있는 기법인 AHP는 복잡한 의사결정문제를 수리적인 분석을 통하여 해결하는 방법론중의 하나이다. 현대의 무기체계는 그 구성이 매우 복잡하고 여러 모듈이 복합적으로 연결되어 있을뿐만 아니라 그 기능 또한 적용환경에 따라 다르기 때문에 무기체계 평가와 관련된 의사결정은 대부분의 경우 여러 전문가가 참여하는 집단의사 결정의 형태로 이루어진다. 집단의사결정은 모든 관련 전문가의 충분한 토의를 통한 합의가 가장 바람직하지만 이 방법은 중요 직책을 가진 전문가의 영향력이 개입되는 것을 방지하기 어렵고 합의 도달을 위한 여러 차례의 회의소집등에 따른 시간 및 비용등의 현실적인 문제점이 있기 때문에 수리적 분석방법인 AHP를 선호하

† 이 논문은 부분적으로 한국국방연구원의 1993년도 국방학술연구용역계획에 의거 연구되었음.
* 숭실대학교 통계학과
** 한국국방연구원

게 된다.

그러나, 기존의 AHP 기법을 이용한 평가방법은 전문가들의 전문성 정도가 크게 다를 경우에 그 신뢰도가 떨어지며, 예를 들어 무기체계 평가의 경우에는 필요한 전문분야가 다양하고 전문가의 전문성 정도도 많은 차이를 나타내고 있을 뿐 아니라 한 전문가가 여러 분야에 걸쳐 참여할 수도 있기 때문에 일률적으로 전문가들의 의견을 수집하는 기존의 AHP 기법을 이용한 수리적 분석방법은 결과의 신뢰도를 떨어지게 한다. 이와같은 문제점들을 보완하기 위하여 전문가들의 해당분야 전문성에 대한 적당한 척도를 만들고 그것을 이용하여 그들의 의견을 수렴하는 방법론의 개발이 필요하다.

따라서 본 연구에서는 기존의 AHP 기법이 무기체계 평가 등 다수 전문가가 참여하는 공공사업의 특성에 부합되도록 하기 위해서, 베이지안 의사결정론을 이용하여 전문가들의 전문성 정도에 따른 등급을 산정함으로써 자료(전문가 의견)의 신뢰성을 높이고 전문성 정도 결정의 객관적인 척도 및 그 이용방법을 제시하고자 한다.

2. 전문성과 일관성비율

앞에서 언급한 무기체계 평가에 있어서 AHP 가중치결정에 참여하는 전문가들은 보통 작전, 군수, 연구분석등의 각 분야의 전문지식 또는 경험을 갖고 있다. 이 전문가들은 계층구조상의 어느 특정 부분에만 자신의 의견을 표시하는 것이 아니라 모든 부분에 관여하게 되며, 각 분야마다 자신의 전문성 정도가 다를 뿐만 아니라 특정 분야에서의 개개인의 전문성도 차이가 나게 된다. 따라서 가중치 결정에 대한 전문가의 의견을 분석하기 위해서는 모든 전문가의 각 분야에 대한 전문성 정도를 고려해야 한다. 이것은 또하나의 가중치 또는 확률의 형태로 표시되며, 이 전문성 정도의 결정은 각 전문가가 설문지에 자신의(그 분야에 대한) 전문성 정도를 표시하거나 의사결정자가 그들의 직위, 직책등을 고려하여 결정하거나 또는 이 두 가지를 함께 사용하는 방법을 적용할 수 있다.

한편, 결정되는 가중치가 전문가들 자신에게, 또는 그들이 속해있는 집단에게 직접적으로 영향을 미치는 경우에는 위의 두 방법 중 어느 것도 사용할 수 없게 된다. 즉, 전문가들이 자신에게 유리하도록 비교행렬을 - 따라서 우선도(priority)를 - 제시하고, 그 분야에 대한 자신의 전문성이 매우 높다고 표시하는 가능성도 배제할 수 없다. 또한 매우 민감한 사안인 경우에는 전문성 정도에 대한 객관적인 기준만이 요구되는 수도 있다.

의사결정자의 주관을 배제하고 주어진 비교행렬만을 이용하여 전문가의 전문성 정도를 객관적으로 측정할 수 있는 척도로서 비교행렬의 일관성 정도를 나타내는 일관성 비율 (Consistency Ratio:CR)이 있다. 일관성과 전문성의 상관관계에 대해서는 입증된 바 없으나 전문성이 부족한 사람은 일관성이 떨어지는 경향이 있으며 일관성이 없는 비교행렬은 그만큼 신뢰도가 적은 자료임은 분명하다. 일관성비율은 그 값이 작을수록 큰 일관성을 나타내며 고의로 일관성이 없도록 비교행렬을 만들지 않는 한 1보다 작은 값을 갖는다. 일반적으로 CR이 0.1보다 크면 일관성이 부족한 경우이며[6], 따라서 신뢰성이 적은 자료로 간주할 수 있다. 각 전문가가 계층구조의 모든 부분에 대해서 응답하므로 동일인의 응답자료라도 CR의 값이

응답분야에 따라 달라질 수 있다. 그러므로 다음과 같은 입력자료의 분류 또는 여과과정을 거쳐서 자료의 신뢰성을 높일 수 있다.

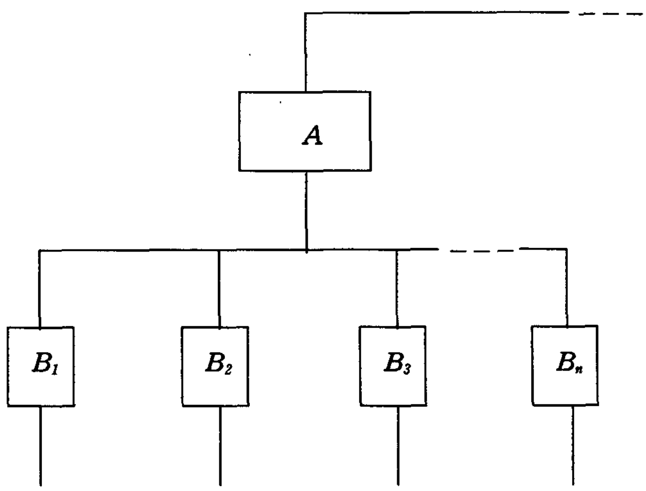
1) 계층구조를 만든다.
2) 계층구조의 각 응답분야별로 CR의 자료 채택 기준치를 결정한다. 이 기준값은 0.1 내지 0.5 사이의 값 중에서 CR값들의 분포, 전문성이 알려진 전문가의 그 분야에 대한 CR값 등을 고려하여 결정한다.
3) 각 전문가와 각 분야에 대해서 CR이 위에서 정한 기준치보다 큰 자료는 제외한다.

일관성비율이 작다고 해서 "좋은" 자료라는 보장은 없다. 일관성비율이 작은 것은 쌍별비교에서 일관성있게 응답했음을 의미할 뿐이고 그 자료 또는 전문가가 얼마나 정확한지와는 직접적인 관계가 없다. 즉, 일관성있게 틀릴 수도 있을 것이다[2]. 그러나 일관성비율이 크면 좋은 자료가 아님은 분명하고 따라서 일관성비율이 큰 자료를 제외하는 것은 자연스러운 접근방법이 될 것이다.

3. 종합우선도 결정방법

주어진 계층구조하에서 종합적인 의사결정을 내리기 위해서는 계층구조의 모든 단계의 각 비교부분의 우선도를 결정하고 이들을 이용하여 종합적인 판단을 해야 한다. 이 종합적인 판단은 기존의 AHP 기법을 적용하면 되므로 더 이상 거론하지 않고, 본 연구에서는 계층구조의 특정부분에 대한 종합우선도를 결정하는 문제를 고려한다.[그림 1]

AHP 계층구조의 특정부분에 대한 종합우선도를 결정하려고 할 때 전문가들의 판단은 그들의 비교행렬의 형태로 나타난다. 이러한 비교행렬들로부터 하나의 종합우선도 벡타를 도출하는 것이 본 연구의 목표이다. 이를 위하여 전문가들의 전문성 정도를 확률이나 새로운 가중치의 형태로 표시하여 그들의 비교행렬이 얼마나 중요한 영향을 미칠 것인가를 결정해야 한다. 이 논문에 나타나는 용어의 명확한 이해



[그림 1]. AHP 구조 내의 분석대상 부분

를 위하여 다음과 같은 용어상의 구별을 하도록 한다. AHP 계층구조의 특정부분에 대하여 각 전문가의 판단을 '우선도'(priority), 전문가의 중요도를 '가중치'(weight), 그리고 전문가들의 우선도를 종합한 의사결정자의 판단을 '종합우선도'(aggregated priority)라고 부르기로 한다.

Saaty[6] 에 의하면, 전문가들이 상당수준의 전문지식을 갖고 있다고 판단될 때에 분석에 사용될 종합우선도는 각 전문가가 구한 우선도에 그 전문가의 판단에 대한 의사결정자의 입장에서의 중요도를 가중치로 적용한 가중평균으로 구할 수 있다. 즉, 우선도의 가중평균이다. 만약 이들이 비전문가로 판단되면 각 개인의 비교행렬 내의 성분들의 기하평균으로써 새로운 비교행렬을 만들고 이것을 이용하여 분석에 사용될 종합우선도를 구한다. 여기서는 전문가들이 각 분야에 상당수준의 전문지식을 갖고 있다고 가정하여, 각 전문가가 제시한 비교행렬로부터 각각의 우선도를 구하고 이들의 가중평균을 종합우선도로 사용한다. 따라서 종합우선도를 결정하는 문제는 각 전문가의 판단에 대한 의사결정자의 중요도를 가중치의 형태로 나타내는 문제로 압축된다.

3.1. 통계적 의사결정 모형

의사결정자가 구성해 놓은 AHP 계층구조 내에서 [그림 1]에 나타난 부분에 대한 종합우선도를 결정하는 문제를 생각하자. 계층구조 내의 어느 기준 A에 대한 n개의 속성 B_1, B_2,$\cdots B_n$의 미지의 종합우선도벡타를 $w=(w_1,\cdots,w_n)^T$라고 하자. k명의 전문가들이 응답한 비교행렬들로부터 각자의 우선도(priority) 벡타 $v_j=(v_{1j},\cdots,v_{nj})^T$, j=1, 2,$\cdots$,k와 일관성 비율(CR) c_j, j=1, 2,$\cdots$,k를 산출한다. 의사결정자는 이들 우선도벡타와 일관성 비율을 종합하여 미지의 종합 우선도벡타 w에 대한 결정값(decision) $d=(d_1,\cdots,d_n)^T$를 구하려고 한다. 여기서 d를 k개의 우선도 벡타 v_j의 가중평균으로 국한시키고 그 가중치 λ_j, j=1,$\cdots$,k를 베이지안 의사결정론과 ([1]) 집단의사결정 ([4], [7])의 개념을 사용하여 구하려고 한다. 즉,

$$d = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j v_j$$

이고, 여기서 λ_j는 전문가 j의 판단에 대한 의사결정자의 가중치이며, 이는 전문가 j의 상대적 전문성으로 해석할 수 있다. 손실함수는 다음과 같이 squared error loss를 가정한다.

$$L(w,\ d) = (w-\sum\lambda_j v_j)^T(w-\sum\lambda_j v_j)$$

W의 사전분포로는 $Dirichlet(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$을 사용하여 의사결정자의 사전지식을 포괄적으로 반영할 수 있도록 하고, v_j의 조건부분포는 일관성비율 c_j를 이용하여 다음과 같이 부여할 수 있다. 즉, $v_j|c_j \sim Dirichlet(\alpha_1/c_j,\cdots,\alpha_n/c_j)$ 로서, c_j는 0과 1 사이의 값이므로 $E(v_j|c_j)=E(w)$ 이고 $Var(v_{ij}|c_j)\le Var(w_i)$이다. 의사결정자는 직접 설문에 응답하지 않는 비전문가로서, 전문가의 판단이 더 정확할 것이므로 그들의 분산 $Var(v_{ij}|c_j)$가 더 작게 된다. w의 사전분포와 전문가 j의 우선도 v_j의 조건부 분포로부터, 모수$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$과 일관성 비율 $(c_1,\cdots,c_n)$이 주어지면 w와 v_j는 조건부 독립임을 알 수 있다. 즉, $w \perp \cdots,v_k|\alpha,\ c$ 이다.

베이지안 결정론에 의해서 $\alpha=\alpha_I(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$과 $c=(c_1,\cdots,c_n)$이 주어졌을 때 기대손실 $R(\lambda)$는 손실함수 $L(w,\ d)$의 w와 $v_1,\cdots,v_k$에 대한 기대값으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= E_w E_{v1,\cdots,vk|w}[L(w,\ d)] \\ &= E_w E_{v1,\cdots,vk}[(w-V\lambda)^T(w-V\lambda)] \end{aligned}$$

단, $d=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j v_j = V\lambda$,

$V=[v_1 \cdots v_k]:(n\times k)$ 행렬,

$\lambda=(\lambda_1\cdots\lambda_k)^T:(k\times 1)$ 벡타이다.

3.2. 가중치 결정

기대손실 R(λ)를 최소화하는 λ^*의 근사값은 R(λ)의 gradient가 0이 되는 점에서 찾을 수 있다. (이 점이 근사값이 되는 이유에 대해서는 이 절의 뒷부분에서 설명하기로 한다.) 기대값을 위한 적분의 구간이 λ와 무관하므로 R(λ)의 gradient는 다음과 같다.

$$\nabla R(\lambda)=\nabla_\lambda E_w E_{v1,\cdots,vk}[(w-V\lambda)^T(w-V\lambda)]$$
$$=E_w E_{v|c}[\nabla (w-V\lambda)^T(w-V\lambda)|c]$$

따라서, 최적 λ^*는 다음 식을 만족한다.

$$E_w E_{v|c}[2V^TV\lambda^*-2V^Tw|c]=0$$

또는

$$E_w[V^TV|c]\lambda^*-E_wE_{v|c}[V^Tw|c]=0 \tag{1}$$

$E_w[V^TV|c]$의 역행렬이 존재한다면

$$\lambda^*=E_w[V^TV|c]^{-1}E_wE_{v|c}[V^Tw|c]=0 \tag{2}$$

의 식으로 구할 수 있다.

위 식에 나타난 V^TV(k×k 행렬)와 V^Tw(k-벡타)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V^TV=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}v_{i1}^w & & \\ & (\sum_{i=1}^{n}v_{ip}v_{iq}) & \\ & & \sum_{i=1}^{n}v_{in}^2 \end{bmatrix} \quad (\ )\text{는 } (p,q)\text{성분}$$

$$V^Tw=\begin{bmatrix} \vdots \\ (\sum_{i=1}^{n}v_{ij}w_i) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\ )\text{는 j-성분}$$

w와 $v_1,\cdots,v_k$가 조건부 독립이므로

$$E[V^TV|c]=\begin{bmatrix} \sum E(v_{i1}^2) & & \\ & (\sum E[v_{ip}]E[v_{iq}]) & \\ & & \sum E(v_{in}^2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\sum\alpha_i^2/c_1+\alpha_0}{a_0(\alpha_0/c_1+1)} & & \\ & \frac{\sum\alpha_i^2}{\alpha_0^2} & \\ & & \frac{\sum\alpha_i^2/c_n+\alpha_0}{\alpha_0(\alpha_0/c_n+1)} \end{bmatrix}$$

$$E[V^Tw|c]=\begin{bmatrix} \vdots \\ \sum\alpha_i^2/\alpha_0^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{단, } \alpha_0=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$$

위의 $E[V^TV|c]$ 행렬은 (k×k) 행렬로서 일반적인 k에 대해서는 수치계산을 통하여 역행렬을 구할 수 있다. 특수한 경우로서 k=2인 경우, 즉 2명의 전문가가 제시한 우선도 벡타 v_1, v_2와 각각의 일관성 비율 c_1, c_2의 값으로부터 기대값 행렬의 역행렬은 다음과 같이 계산된다.

$$E[V^TV|c]^{-1}=\frac{1}{det}\begin{bmatrix} \frac{\alpha^2+c_2\alpha_0}{\alpha_0(\alpha_0+c_2)} & -\frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} \\ -\frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} & \frac{\alpha^2+c_1\alpha_0}{\alpha_0(\alpha_0+c_1)} \end{bmatrix}$$

단, $det=Det(E[V^TV|c])$

$$\alpha^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$$

행렬식 det는 c_1과 c_2가 모두 0인 경우에만, 즉 두 전문가의 응답이 모두 완벽한 일관성을 가질 때에만 0이 된다. 그러므로, c_1과 c_2가 모두

0인 경우(매우 드문 경우)를 제외하고 항상 역행렬이 존재하고, 이 때의 최적 가중치 λ^*는 식 (2)로부터

$$\lambda^* = E[V^TV|c]^{-1}\ E[V^Tw|c]$$
$$= \frac{1}{det}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha_0^2-\alpha^2)}{\alpha_0^4}\begin{bmatrix}\dfrac{c_2}{(\alpha_0+c_2)}\\[2ex]\dfrac{c_1}{(\alpha_0+c_1)}\end{bmatrix} \qquad (3)$$

가 된다. 즉, $\lambda_1^*:\lambda_2^*=c_2/(\alpha_0+c_2):c_1/(\alpha_0+c_1)$의 비가 된다. 작은 c_j가 큰 신뢰성을 의미함을 고려할 때 가중치의 비($\lambda_1^*:\lambda_2^*$)와 c_j의 비는 역의 관계이기를 기대한다. 그러나 식 (3)에서 분모에 포함되어 있는 c_j들의 영향으로 인해서 완전한 역의 관계보다는 약간 조심스러운 결과를 보여준다. 여기서 α_0는 w의 사전분포인 Dirichlet 분포의 모수들의 합이며 α_0가 충분히 클 때 $\lambda_1^*/\lambda_2^*=c_j$이 되고 c_j의 의미만을 반영한 경우이다. 만약 α_0가 매우 작으면 λ_1^*/λ_2^*는 c_j의 영향을 크게 받지 않고 1에 가까운 값을 갖게 된다. 이처럼 w의 사전분포에 따라 c_j가 미치는 영향이 달라진다.

이 절의 시작 부분에서 언급하였듯이 식 (2) 또는 (3)의 λ^*는 최적해의 근사치이다. 왜냐하면 λ^*는 전문가들에 대한 가중치이므로 그 합이 1이 되어야 한다. 즉, $\sum\lambda_j=1$의 조건 하에서 기대손실 $R(\lambda)$를 최소화시켜야 한다. 실제로 식 (3)에서 구한 λ^*에 대하여 $\lambda_1^*+\lambda_2^*$는 1보다 작게 되어 조건식을 만족하지 않는다. 이에 대한 근사 방법으로서 $\sum\lambda_j=1$의 평면에 대한 투영을 적용할 수 있다. 즉, 벡타 성분의 비를 유지하면서 합이 1이 되도록 수정해 준다. 이것은 다음 절의 적용 예에서 볼 수 있듯이 매우 정확한 근사방법이다.

3.3. w의 사전분포 부여

w벡타의 사전분포는 $Dirichlet(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$분포이다. Dirichlet 분포는 일변수의 Beta 분포를 다변량 분포로 확장시킨 것으로 해석할 수 있으며, $w=(w_1,\cdots,w_n)^T$는 그 성분들 w_i가 모두 비음(nonnegative)이어야 하고 w_i들의 합이 1이어야 한다. w의 사전분포는 의사결정자가 사전에-전문가의 응답을 분석하기 전에-$(w_1,\cdots,w_n)$의 분포가 어떠하리라고 판단한 결과이다. 의사결정자가 w_i가 w_j보다 큰 값을 가지는 경향이 있다고 판단하면 그에 해당하는 i번째 모수인 α_i를 α_j보다 크게 부여해야 한다($E[w_i]=\frac{\alpha_i}{\alpha_0}$). α_i들의 값은 0보다 큰 실수이며 α_i들이 전체적으로 커지면 기대값은 변하지 않으나 분산이 작아진다.($Var[w_i]=\frac{\alpha_i(\alpha_0-\alpha_i)}{\alpha_0^2(\alpha_0+1)}$; 본연구에서는 v_{ij}의 분산도 더욱 작아진다.) 만약 모든 i에 대해서 $\alpha_i=1$이면 다변량 균일분포가 된다. 이 경우는 의사결정자가 w의 분포에 대해서 특별한 정보를 갖고 있지 않거나 또는 자기의 주관을 개입시키지 않으려고 할 때 적용될 수 있다. 즉, 비정보적 사전분포(*noninformative prior*)에 해당된다.

앞절의 결과에서 보듯이 $\alpha_0=\sum\alpha_i$의 크기에 따라 c_j가 λ^*에 미치는 영향이 달라진다. 만약 의사결정자의 주관을 배제하고 싶은 경우에 다변량균일분포에 대응하는 $\alpha_1=\cdot\cdot=\alpha_n=1$의 값을 부여해야 하지만, 이 모형에서는 모든 α_i의 값이 같도록 해 주면서, c_j에 의한 영향을 반영하려면 α_0를 크게 하고 c_j의 영향력을 축소하려면 α_0를 작게 하여 부여하면 될 것이다.

3.4. 적용 예

앞에서 유도한 방법을 어떻게 적용할 것인가를 보기 위하여 다음의 경우를 생각하자. 3개의 결정대안이 있는 기준에 대하여 ($n=3$) 2명의 전문가가 ($k=2$) 응답하여 각각의 비교행렬을 제시하였고, 이 비교행렬로부터 각각의 우선도벡타 v_1, v_2와 일관성비율 c_1, c_2를 다음과 같이 계산하였다고 하자.

$$v_1=\begin{bmatrix}0.1\\0.4\\0.5\end{bmatrix}, \quad v_2=\begin{bmatrix}0.3\\0.3\\0.4\end{bmatrix}$$

$$c_1=0.05, \quad c_2=0.1$$

의사결정자의 판단으로 사전분포의 모수는 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.1$이 적합할 것으로 생각하였다. 이 때의 가중치 λ는

$$\lambda=2.15378\begin{pmatrix}0.250\\0.143\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5384\\0.3077\end{pmatrix}$$

로 되고 두 성분의 합이 1이 되도록 수정하면 $\lambda_1=0.6364$, $\lambda_2=0.3636$이 된다. 이 값을 이용하여 의사결정자의 종합우선도 d는

$$d=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2$$

$$=0.6364\begin{bmatrix}0.1\\0.4\\0.5\end{bmatrix}+0.3636\begin{bmatrix}0.3\\0.3\\0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.17272\\0.36364\\0.46364\end{bmatrix}$$

으로 계산되고 이 결과는 작은 일관성비율을 갖는 전문가 1에게 더 큰, 그러나 2배($c_2/c_1=2$) 보다는 작은 가중치를 준 것이다. 만약 $c_1=c_2=0.1$로 같았다면 이 때의 수정후의 λ는 $\lambda_1=\lambda_2=0.5$로 두 전문가에게 같은 가중치를 주게 된다.

3명 이상 ($k\geq3$)의 전문가가 있는 경우에는 ($k\times k$)행렬의 역행렬의 계산이 필요하며 이 경우의 λ의 계산은 필요한 수치를 입력하여 역행렬을 계산한 후에 가능하다. 예를 들어 $n=3$, $k=3$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$이고 $c_1=0.05$, $c_2=0.1$, $c_3=0.2$인 경우에는 다음과 같이 λ를 계산할 수 있다.

$$E[V^TV|c]=\begin{bmatrix}63/183 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 33/93 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 18/48\end{bmatrix}$$

$$E[V^Tw|c]=\begin{bmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix}$$

$$E[V^Tw|c]^{-1}=\frac{1}{5.38614\times10^{-4}}\begin{bmatrix}0.021953 & -0.013889 & -0.0071865\\ -0.013889 & -0.017987 & -0.0036430\\ -0.0071685 & -0.0036430 & 0.011046\end{bmatrix}$$

$$\lambda=E[V^TV|c]^{-1}\,E[V^Tw|c]$$

$$=\begin{bmatrix}0.5542\\0.2816\\0.1451\end{bmatrix}$$

성분의 합이 1이 되도록 수정하면 $\lambda_1=0.5650$, $\lambda_2=0.2871$, $\lambda_3=0.1479$가 된다. 역시 작은 일관성 비율의 우선도에 큰, 그러나 약간 보수적인 가중치를 주는 것을 알 수 있다.

〈표 1〉은 여러가지 경우에 식 (3)의 결과를 이용하여 λ^*를 계산한 후 벡타 성분의 합이 1이 되도록 수정한 값이다. n=3개의 비교대안과 k=2, 3, 4명의 전문가가 있을 때 식 (3)의 적용결과가 α와 c 벡타의 여러 경우에 대해서 정리되어 있다. 각 경우 공히 λ_j는 c_j의 역수의 비에 거의 비례하며, $\alpha_0=\sum\alpha_i$가 클수록 비례하는 정도가 크고, α_0가 작을수록 c_j의 비에 무관해 진다. 식 (3)으로부터 예상할 수 있듯이 α_i들의 permutation(α_0와 $\alpha^2=\sum\alpha_i^2$이 일정할 때)에 대해서는 변화가 없으며 이것은 α 벡타가 k명 전문가에 대한 정보가 아닌 n개 대안에 대한 정보임을 나타내 주는 결과라고 할 수 있다.

한편, c_j들이 전체적으로 커지면 전문가들의 신뢰도가 낮아지는 것이므로 CR (c_j값)의 의미 자체가 축소된다. 따라서 λ^*에 대한 c_j의 영향이 감소되어 λ_j가 전반적으로 평준화되는 경향이 있다. 〈표 1〉 (c)에서 c=(0.01, 0.02, 0.03, 0.04)와 c=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)의 경우에 잘 나타나 있다.

〈표 2〉는 가중치 결정과정과 결과식 (3)의 정확성을 검증하기 위하여 세 가지 경우에 대하여 수치다중적분에 의한 기대손실 $R(\lambda)$를 계산한 결과이다. (b) 부분은 본문의 '적용 예'의 첫번째 경우(k=2)로서 수정 전의 가중치 $\lambda_1=0.5384$, $\lambda_2=0.3077$에서 최소의 기대손실이 나타나지만 $\lambda_1+\lambda_2=1$을 만족하는 점 중에서는 수정 후의 값 $\lambda_1=0.6364$, $\lambda_2=0.3636$이 최적 가중치임을 볼 수 있다. (c) 부분은 본문의 두번째 경우(k=3)이며 이것도 역시 본문의 결과와 일치하여 식 (3)의 근사가 매우 정확함을 알 수 있다.

4. 결론

AHP 방법의 적용에 있어서 많은 전문가가 참여하여 종합우선도를 결정해야 할 경우에, 그들의 의견을 종합하여 수렴하는 방법이 필요하다. k명의 전문가가 n개의 비교대안이 있는 기준에 대하여 AHP 우선도 산출을 위한 비교행렬을 각각 작성했을 때, 의사결정자는 이 k개의 비교행렬로부터 각각의 우선도 벡타 $v_1, \cdots, v_k$와 일관성비율 $c_1, \cdots, c_k$를 계산한다. 의사결정자의 종합우선도는 k명 전문가의 우선도 벡타들의 가중합으로 구할 수 있으며 이 때 필요한 가중치 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$를 베이지안 의사결정론의 개념을 사용하여 구한다. 이 가중치는 전문가들에 대한 의사결정자의 주관적인 판단을 배제하고 객관적인 자료인 일관성비율에 의하여 결정된다.

의사결정자는 종합우선도의 참값(w)에 대한 (전문가에 대한 것이 아닌) 자신의 의견을 사전분포(prior distribution)의 형태로 표현하는데 본연구에서는 $Dirichlet(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$분포를 설정하였다. 이 분포의 모수는 의사결정자가 결정하며 모수의 갯수(n)는 대안의 갯수이고 i번째 대안에 대응하는 모수가 α_i이다. 대안 i의 우선도 값이 상대적으로 클 것으로 판단되면 α_i의 값을 크게 부여한다. 분석결과에 의하면 이 α_i들의 합인 α_0의 크기가 중요한 것으로 나타나는데, α_0를 크게 하면 가중치 λ_j는 일관성비율 c_j에 거의 반비례하고 α_0를 작게 하면 λ_j에 대한

c_j의 영향이 감소한다. 전문가에 대한 의견 뿐만 아니라 종합우선도에 대하여도 의사결정자의 주관을 배제하고 객관적인 자료만으로 결정하고 싶은 경우에는 w의 사전분포로써 다변량 균일분포에 해당되는 $Dirichlet(1,\cdots,1)$을 사용할 수 있다. 즉, $\alpha_1=\cdot\cdot=\alpha_n=1$의 경우이다. 본 연구의 모형에 대하여 의사결정자가 자신의 의견을 배제하되 c_j의 영향을 많이 반영하려면 $\alpha_1=\cdot\cdot=\alpha_n>1$로 하고 c_j의 영향을 줄이려면 $\alpha_1=\cdot\cdot=\alpha_n<1$로 부여하면 된다.

우선도 벡타와 일관성비율 및 사전분포가 정해졌을 때 최적 가중치벡타 λ는 다음의 식으로 계산된다.

$$\lambda = E[V^TV|c]^{-1}E[V^Tw|c]$$

이 값은 $(k\times k)$행렬의 역행렬과 k차원 벡타의 곱으로 구해지는데 수치계산을 이용하여 역행렬을 구하는 컴퓨터 프로그램은 어렵지 않게 적용할 수 있다([3], [5]). 특히, $k=2$(두 명의 전문가)의 경우에 두 전문가에 대한 가중치의 비 $\dot{\lambda}_1 : \dot{\lambda}_2 = c_2/(\alpha_0+c_2) : c_1/(\alpha_0+c_1)$이 된다.

전문가들의 비교행렬로부터 구한 일관성비율은 그 전문가 판단의 신뢰성에 대한 좋은, 그리고 객관성을 갖는 유일한 척도이다. 일관성비율 c_j는 임의로 비교행렬을 작성했을 때 그 값이 1이 되고 완벽한 일관성을 갖춘 경우 0이 되므로 그 값이 큰 것은 그만큼 신뢰성이 떨어지는 자료이다. 그러므로 일정한 기준을 정하여 c_j값이 큰 자료는, 예를 들어 $c>0.1\sim0.5$인 경우에는, 그 우선도 벡타를 자료에서 제외하여 사용하면 입력 자료 전체의 신뢰성을 높일 수 있다.

〈참고문헌〉

[1] DeGroot, M. H., Optimal Statistical Decisions, McGraw-Hill, New York, 1970.

[2] Forman, E. H., "Facts and Fictions about the Analytic Hierarchy Process, " Unpublished paper, 1990 (appeared in [6]Saaty).

[3] Kuo, S. S., Computer Applications of Numerical Methods, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.

[4] Lindley, D. V., "Reconciliation of Discrete Probability Distributions, " In Bayesian Statistics II, J. Bernardo, M. H. DeGroot, D. V. Lindley and A. F. M. Smith (Eds.). Valencia Press, Valencia, 1984.

[5] Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, Numerical Recipes in C, 2nd ed., Cambridge University Press, 1992.

[6] Saaty, T. L., The Analytic Hierarchy Process, RWS Publication, Pittsburgh, PA, 1990.

[7] Stone, M., "The Linear Opinion Pool, " Annals of Mathematical Statistics, vol 32, (1961), pp. 1339-1342.

〈표 1〉 가중치 계산 결과

(a) n=3 ; k=2

α \ c	(0.1, 0.1)	(0.05, 0.1)
(1.0, 1.0, 1.0)	λ=(0.5, 0.5)	λ=(0.663, 0.337)
(0.1, 0.1, 0.1)	λ=(0.5, 0.5)	λ=(0.6364, 0.3636)

(b) n = 3 ; k = 3

α \ c	(.01, .02, .03)	(.02, .04, .08)	(.1, .2, .3)	(.01, .02, .1)
(1, 1, 1)	λ=(0.5429, 0.2733, 0.1838)	λ=(0.5655, 0.2862, 0.1483)	λ=(0.5222, 0.2778, 0.2000)	λ=(0.6209, 0.3120, 0.0671)
(0.1, 0.1, 0.1)	λ=(0.5222, 0.2778, 0.2000)	λ=(0.5211, 0.2903, 0.1886)	λ=(0.4127, 0.3016, 0.2857)	λ=(0.5878, 0.3077, 0.1045)
(10, 10, 10,)	λ=(0.5452, 0.2728, 0.1820)	λ=(0.5703, 0.2860, 0.1437)	λ=(0.5429, 0.2733, 0.1838)	λ=(0.6246, 0.3124, 0.0630)
(1, 2, 4)	λ=(0.5446, 0.2729, 0.1825)	λ=(0.5693, 0.2859, 0.1448)	λ=(0.5369, 0.2747, 0.1884)	λ=(0.6236, 0.3124, 0.0640)
(4, 2, 1)	λ=(0.5446, 0.2729, 0.1825)	λ=(0.5693, 0.2859, 0.1448)	λ=(0.5369, 0.2747, 0.1884)	λ=(0.6236, 0.3124, 0.0640)
(0.1, 0.5, 2.5)	λ=(0.5440, 0.2731, 0.1829)	λ=(0.5681, 0.2862, 0.1457)	λ=(0.5319, 0.2762, 0.1919)	λ=(0.6227, 0.3125, 0.0648)

(c) n=3 ; k=4

α \ c	(.01, .02, .03, .04)	(.01, .02, .04, .08)	(.1, .2, .3, .4)
(1, 1, 1)	λ=(0.4773, 0.2400, 0.1610, 0.1217)	λ=(0.5300, 0.2661, 0.1346, 0.0693)	λ=(0.4555, 0.2350, 0.1616, 0.1479)
(0.1, 0.1, 0.1)	λ=(0.4555, 0.2394, 0.1693, 0.1358)	λ=(0.5001, 0.2613, 0.1451, 0.0935)	λ=(0.3429, 0.2367, 0.2118, 0.2086)
(10, 10, 10,)	λ=(0.4797, 0.2400, 0.1601, 0.1202)	λ=(0.5330, 0.2666, 0.1335, 0.0669)	λ=(0.4773, 0.2400, 0.1610, 0.1217)
(1, 2, 4)	λ=(0.4790, 0.2400, 0.1604, 0.1206)	λ=(0.5320, 0.2665, 0.1338, 0.0677)	λ=(0.4706, 0.2400, 0.1636, 0.1258)

〈표 2〉 수치적분에 의한 기대손실 R(λ)

(a) n=3 ; k=2

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.1$; $c_1=c_2=0.1$

λ_1	λ_2	기대손실
0.1	0.9	4.3927
0.2	0.8	4.1789
0.3	0.7	4.0262
0.4	0.6	3.9345
0.4	0.4	3.7597*
0.48	0.52	3.9052
0.5	0.5	3.9040
0.55	0.45	3.9116
0.6	0.4	3.9345
0.7	0.3	4.0262
0.8	0.2	4.1789
0.9	0.1	4.3927

(b) n=3 ; k=2

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha3=0.1$; $c_1=0.05$, $c_2=0.1$

λ_1	λ_2	기대손실
0.1	0.9	1512.430
0.2	0.8	1433.018
0.3	0.7	1370.317
0.4	0.6	1324.326
0.5	0.5	1295.045
0.538462	0.307692	1252.941*
0.6	0.4	1282.475
0.6364	0.3636	1282.047
0.7	0.3	1286.615
0.8	0.2	1307.465
0.9	0.1	1345.026

(c) n=3 ; k=3

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$; $c_1=0.05$, $c_2=0.1$, $c_3=0.2$

λ_1	λ_2	λ_3	기대손실
0.5	0.3	0.2	2.3381
0.55	0.30	0.15	2.3359
0.5542	0.2816	0.1451	2.3343*
0.5650	0.2871	0.1479	2.3358
0.6	0.3	0.1	2.3374
0.6	0.2	0.2	2.3398

*표는 최소값이나 성분의 합이 1이 아닌 값(본문 식(3)의 수정 전 결과)