韓國經營科學會誌
第19巻 第2號
1994年 8月

다목적 선형계획 문제의 유효 목적함수 영역과 가중치 영역의 수리적 관계에 관한 연구†

소영섭*

The Mathematical Relationship between the Region of Efficient Objective Value and the Region of Weight in Multiple Objective Linear Programming†

So, Youngsub*

Abstract

There are three important regions in Multiple Objective Linear Programming (MOLP). One is the region of efficient solutions, another is the region of weight to be used for finding efficient solutions, the third is the region of efficient(nondominated) objective values. In this paper, first, we find the condition of extreme point in the region of efficient objective values. Second, we find that the sum of the dimension of the weight region and the dimension of efficient objective values region is constant.

Using the above, it is shown that we find the shape and dimension of weight region corresponding to the given region of efficient objective values and vice versa.

1. 서론

다목적 선형계획법의 해는 우열을 가릴수 없는 다수의 해가 존재하게 되는데 이를 유효해라고 부른다. 유효해는 선형계획법처럼 하나의 정점해를 갖는 경우가 거의 없고 대부분 해집합의 영역으로 주어지게 되는데 이를 유효면이라고 한다. 이 유효면을 구하는 해법들중 Ecker et al [9], Gal [10], Zeleny [18] 등

† 이 논문은 1992년도 교육부지원 한국학술진흥재단의 신진연구과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.
* 전북대학교 공과대학 산업공학과

등 대부분의 해법이 가중치를 이용한 해법이지만 최근에 Dauer [7], Dauer and Liu [8], Rhode and Weber [14] 등에 의해 목적함수 공간에서 지배되지 않는 목적함수 값이 이루는 영역의 정점을 구하는 방법이 제시되었다. 그러나 이들의 방법은 가중치, 또는 목적함수 공간의 지배되지 않는 값이라는 하나의 입장에서만 해를 구하고 있기 때문에 다른 방법에서 사용하는 정보와 어떤 관련성이 있는지 알 수 없다. 따라서 본 논문에서는 다목적 선형계획 문제의 유효면을 구하는데 사용하는 가중치의 영역과 목적함수 공간에서 지배되지 않는 목적함수의 값들로 이루어지는 영역과의 관계성을 규명하여 의사결정에 도움이 되는 정보를 제공하며 다목적 선형계획법의 이론적 체계 수립에 도움을 주고자 한다.

2. 유효 목적함수 영역과 가중치 영역과의 관계

다목적 선형계획 문제의 수리적 모형은 다음과 같다.

$$\text{Max} \quad Z(x) = [Z_1(x), Z_2(x), \cdots, Z_p(x)]$$
$$\text{s. t.} \quad A \cdot x \leq b, \ x \geq 0$$

여기서 $Z_i(x) = C_{i\cdot} \cdot x(C_{i\cdot} \in R^n)$이고

A는 $m \times n$ 행렬, $b \in R^m$, $x \in R^n$이다.

이러한 다목적 선형계획 문제의 해는 유효해라 부르며 다음과 같이 정의한다.

定義 1. 유효해

다목적 선형계획 문제에서 다음의 조건을 만족하는 해 x^0를 유효해라고 한다.

1) x^0, $x^* \in S$이고(단 $S = \{x \mid A \cdot x \leq b, \ x \geq 0\}$)
2) $Z_i(x^*) \geq Z_i(x^0)$, $\forall i$이며, 적어도 한 k에 대하여

   $Z_k(x^*) > Z_k(x^0)$인 x^*가 존재하지 않음

유효해가 하나의 정점이 아닌 면(face)으로 될 때 이를 유효면이라 하며, 이 값들을 목적함수에 대입하여 얻게되는 목적함수의 값도 하나의 값이 아닌 다수가 되며 이 값들은 서로 지배되지 않는(nondominated) 값으로 존재하게 되는데 이 지배되지 않는 값들이 이루는 영역에 대하여 다음과 같이 정의한다.

定義 2. 목적함수 공간 및 유효 목적함수 영역

다목적 선형계획 문제에서 목적함수의 값들이 표현되는 p차원의 공간을 목적함수 공간이라 하며, 이 공간에서 유효해들에 대한 목적함수 값들이 이루는 지배되지 않는 영역을 유효 목적함수 영역이라고 한다.

유효 목적함수 영역과 가중치 영역과의 관계를 살펴보기에 앞서 유효 목적함수 영역에서의 목적함수 값들의 특성에 대해 생각해 보기로 한다. Dauer [8] 와 Liu [17] 는 유효 목적함수 영역에서 유효 정점해에 의한 목적함수 값이 정점이 되지않는 경우에 대한 이론을 제시하고 있으나 유효 정점해에 의한 목적함수 값이 유효 목적함수 영역의 선분(edge)상에 있을 경우만을 다루고 있기 때문에 일반적이지 못하며 유효 정점해에 의한 목적함수 값이 유효 목적함수 영역의 정점인가 아닌가를 알아보는 일반적인 이론은 다음의 정리로 표현할 수 있다.

정리 1. 유효정점 X^0에 의한 목적함수의 값을 Z^0라 하고, 유효정점 X^0일 때의 기저를 B_0라 하고, $\overline{C_{\cdot j}} = C_{B_0} B_0^{-1} A_{\cdot j} - C_{\cdot j}(j \in NB)$라 할 때, $\sum_{i \in NB} \alpha_i \cdot \overline{C_{\cdot i}} = 0,\ \alpha_i > 0,\ i \in NB$을 만족하는 적어도 하나의 α_i가 존재하면 Z^0는 유효 목적함수 영역에서 정점이 아니며, 그 역도 성립한다.

증 명) $\sum_{i \in NB} \alpha_i \cdot \overline{C_{\cdot i}} = 0,\ \alpha_i > 0,\ i \in NB$인 적어도 하나의 α_i가 존재한다고 가정하고 $J = \{j \mid \alpha_j > 0\}$라 하면 현재의 기저에서 $x_j(j \in J)$를 기저진입 변수로 하여 선회연산을 하여 얻은 목적함수의 값을 Z^j라 하면 $Z^j = Z^0 - \overline{C_{\cdot j}} \cdot \theta_j$이 된다.(단 θ_j는 선회연산시 x_j의 값)

여기서 $\sum_{j \in J} \alpha_j \cdot Z^j = \sum_{j \in J} \alpha_j \cdot Z^0 - \sum_{j \in J} \alpha_j \cdot \overline{C_{\cdot j}} \cdot \theta_j = \sum_{j \in J} \alpha_j \cdot Z^0$이 된다.

따라서 $\beta_j = \alpha_j / \sum_{j \in J} \alpha_j$라면 $Z^0 = \sum_{j \in J} \beta_j \cdot Z^j,\ \sum_{j \in J} \beta_j = 1$이 되어 Z^0는 정점이 아니다.

역으로 Z^0가 정점이 아니라면 $Z^0 = \sum_{j \in J} \beta_j \cdot Z^j,\ \sum_{j \in J} \beta_j = 1$이 되고

$Z^j = Z^0 - \overline{C_{\cdot j}} \cdot \theta_j$을 대입하면 $Z^0 = \sum_{j \in J} \beta_j \cdot Z^0 - \sum_{j \in J} \beta_j \cdot \overline{C_{\cdot j}} \cdot \theta_j$이 된다.

따라서 $\sum_{j \in J} \beta_j \cdot \theta_j \cdot \overline{C_{\cdot j}}$이 되므로

$\sum_{i \in NB} \alpha_i \cdot \overline{C_i} = 0,\ \alpha_i > 0,\ i \in NB$을 만족하는 적어도 하나의 α_i가 존재하게 된다. Q. E. D.

정리 1. 의 결과로 유효정점에 의한 목적함수 값이 유효 목적함수 영역에서 정점이 아니면 $\sum_{i \in NB} \alpha_i \cdot \overline{C_{\cdot i}} = 0,\ \alpha_i > 0,\ i \in NB$을 만족하는 α_i가 존재하게 되는데, 이 목적함수의 값은 현재의 정점에서 $x_i(i \in I,\ I = \{i \mid \sum_{i \in NB} \alpha_i \cdot \overline{C_{\cdot i}} = 0,\ \alpha_i > 0,\ i \in NB\})$를 선회열로 하여 선회연산을 하여 얻어지는 목적함수 값들의 볼록결합으로 표현됨을 알 수 있다. 특히 집합 I의 원소가 2개인 경우에는 Liu [17] 의 경우처럼 이 점은 유효 목적함수 영역에서 두 정점을 있는 선분상에 존재하게 된다.

여기서 $\overline{C_{\cdot j}}$는 유효정점 x^0에 대한 목적함수 할인계수로 이 할인계수는 유효정점 x^0에 대응하는 가중치 영역을 구하는데 사용되어 진다. 즉 유효정점 x^0에 대응하는 가중치 영역은 다음과 같이 정의된다.

定義 3. 유효정점 X^0에 대응하는 가중치 영역
유효정점 X^0의 기저를 B_0라 하고, $\overline{C_{\cdot j}} = C_{B_0} B_0^{-1} A_{\cdot j} - C_{\cdot j}(j \in NB)$라 할 때, $w \cdot \overline{C_{\cdot j}} \geq 0,\ w \geq 0,\ \forall\ j \in NB$를 만족하는 W의 영역을 X^0에 대응하는 가중치 영역이라 하며 표현의 편리성을 위해 $w \cdot 1 = 1$의 조건을 첨가한다.

이 가중치 영역은 (n-m)개의 부등식을 동시에 만족하는 영역이 되는데 이에 대하여 다음의 정리가 성립한다.

정리 2. 정리 1.에서 $I=\{i \mid \sum_{i\in NB}\alpha_i\cdot\overline{C_{\cdot i}}=0,\ \alpha_i>0,\ i\in NB\}$라 하고 집합 I의 원소 수를 n(I)라 하면 $w\cdot\overline{C_{\cdot j}}\ge 0,\ w\ge 0,\ \forall\ j\in NB$을 만족하는 식 안에는 n(I)개의 등식이 존재하며 그 역도 성립한다.

증 명) $\sum_{i\in I}\alpha_i\cdot\overline{C_{\cdot i}}=0$의 양변에 w를 곱하면 $\sum_{i\in I}\alpha_i\cdot w\cdot\overline{C_{\cdot i}}=0$이 되고

$w\cdot\overline{C_{\cdot i}}\ge 0,\ \forall i\in I$이므로, $w\cdot\overline{C_{\cdot i}}=0,\ \forall i\in I$이 되어

$w\cdot\overline{C_{\cdot j}}\ge 0,\ w\ge 0,\ \forall j\in NB$에는 n(I)개의 등식이 존재하게 된다.

역으로, $w\cdot\overline{C_{\cdot j}}\ge 0,\ w\ge 0,\ \forall j\in NB$에 n(I)개의 등식이 존재하면 이는

$w\cdot\overline{C_{\cdot i}}=0$인 식이 n(I)개 존재하게 되며 이 i들의 집합을 I라 하면,

$\sum_{i\in I}w\cdot\overline{C_{\cdot i}}=0$이 되고, Stiemke [13]의 정리에 의해

$\sum_{i\in I}\alpha_i\cdot\overline{C_{\cdot i}}=0,\ \alpha_i>0$ 성립하게 된다.

한편, 정리 1. 에 의하면 유효 목적함수 영역에서의 정점은 이 값을 이루는 하나의 유효정점이 존재하게 되며, 이 유효정점에는 이에 대응하는 가중치 영역이 반드시 존재하게 되는데 이들의 관계를 다음과 같이 정의한다.

定義 4. 유효 목적함수 영역에 대응하는 가중치 영역

유효 목적함수 영역을 이루는 목적함수 값을 갖게하는 유효해에 대응하는 가중치 영역을 유효 목적함수 영역에 대응하는 가중치 영역이라 한다.

정리 1. 과 정리2. 의 결과에 의해 유효 목적함수 영역에서의 정점과 이에 대응하는 가중치 영역 사이에 다음의 정리가 성립한다.

정리 3. 유효정점 X^0의 목적함수 값인 Z^0가 유효 목적함수 영역의 정점이면 Z^0에 대응하는 가중치 영역의 차원은 (P−1)차원이 되며, 역도 성립한다.

증 명) 유효정점 X^0의 기저를 B_0라 하고, $\overline{C_{\cdot j}}=C_{B_0}B_0^{-1}A_{\cdot j}-C_{\cdot j},\ \forall j\in NB$라 하면

이에 대응하는 가중치 영역은 $w\cdot\overline{C_{\cdot j}}\ge 0,\ w\cdot 1=1,\ w\ge 0,\ \forall j\in NB$가 된다.

여기서 Z^0가 정점이므로 정리 1. 에 의하여

$\sum_{i\in NB}\alpha_i\cdot\overline{C_{\cdot i}}=0,\ \alpha_i>0,\ \forall i\in NB$를 만족하는 α_i가 존재하지 않으므로

정리 2.에 의해 $w\cdot\overline{C_{\cdot j}}\ge 0,\ w\ge 0,\ \forall j\in NB$에는 등식이 존재하지 않는다.

따라서 $w\cdot\overline{C_{\cdot i}}\ge 0,\ w\cdot 1=1,\ w\ge 0,\ \forall i\in NB$를 만족하는 영역, 즉 정점에 대응하는 가중치 영역은 (P−1)차원이 된다.

역으로 $w\cdot\overline{C_{\cdot i}}\ge 0,\ w\cdot 1=1,\ w\ge 0,\ \forall i\in NB$를 만족하는 영역이 (P−1)차원이면 $w\cdot\overline{C_{\cdot i}}\ge 0,\ w\ge 0,\ \forall i\in NB$에 등식이 존재하지 않으므로 정리 2.에 의해 $\sum_{i\in NB}\alpha_i\cdot\overline{C_{\cdot i}}=0,\ \alpha_i>0\ \forall i\in NB$를 만족하는 α_i가 존재하지 않으므로 정리 1.에 의하여 이 가중치 영역에 대응하는 목적함수 값은 유효 목적함수 공간에서 정점이 된다.

위 정리 3.에 의해 유효 목적함수 영역에서 정점의 수를 k개라 하면 이에 따른 가중치 영역은 k개의 (p-1)차원 공간으로 나뉘어 짐을 알 수 있고, 역으로 가중치 영역이 r개의 (p−1)차원공간으로 구성되면 이에 따른 유효 목적함수 영역은 r개의 정점을 가지게 됨을 알 수 있다.

여기서, 유효 목적함수 영역에서 서로 이웃하는 두 정점을 잇는 선분에 대응하는 가중치 영역에 대하여 생각해 보자. 두 정점을 Z^1, Z^2라 하면 이 두점을 잇는 선분은 $\alpha Z^1 + (1-\alpha)Z^2$가 되고, 목적함수값이 Z^1이 되게하는 해를 X^1이라 하고, Z^2가 되게하는 해를 X^2라 하면, 위 선분의 식은 $\alpha CX^1 + (1-\alpha)CX^2 = C[\alpha X^1 + (1-\alpha)X^2]$가 되어 $\alpha X^1 + (1-\alpha)X^2$가 유효해가 된다. 이때 X^1에 대응하는 가중치 영역을 W^1이라 하고 X^2에 대응하는 가중치 영역을 W^2라 하면, $\alpha X^1 + (1-\alpha)X^2$에 대응하는 가중치 영역은 $W^1 \cap W^2$가 된다.(박순달, 소영섭 [3]의 정리 5. 참조)

따라서 $\alpha Z^1 + (1-\alpha)Z^2$에 대응하는 가중치 영역은 $W^1 \cap W^2$가 된다. 이를 여러개의 정점에 의한 볼록결합으로 이루어지는 유효 목적함수 영역에 대응하는 가중치 영역에 대한 이론으로 확대하면 다음의 정리가 성립한다.

정리 4. 유효 목적함수 영역에서 k개의 정점 $Z^1, \cdots, Z^k$들의 볼록결합으로 이루어진 면이 유효 목적함수 영역에 존재하면 이에 대응하는 가중치 영역은 각 정점에 대응하는 가중치 영역의 공통부분이 된다.

증 명) 목적함수 값이 Z^i가 되게하는 해를 X^i라 하면, $Z^i = C \cdot X^i$이므로 $Z^1, \cdots, Z^k$들의 볼록결합으로 이루어진 면을 S라 하면 $S = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot Z^i = C \cdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot X^i$가 되고 S가 유효 목적함수 영역에 존재하므로 $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot X^i$는 유효해가 된다. 따라서 이에 대응하는 가중치 영역은 X^i에 대응하는 가중치 영역의 공통부분이 된다.(박순달, 소 영섭 [3]의 정리 5, 보조정리 2. 참조) 여기서 X^i에 대응하는 가중치 영역은 Z^i에 대응하는 가중치 영역이 되므로 S에 대응하는 가중치 영역은 Z^i에 대응하는 가중치 영역의 공통부분이 된다. Q. E. D.

위 정리를 통해 유효 목적함수 영역에서 두 정점을 연결하는 선분에 대응하는 가중치 영역은 두 정점에 대응하는 가중치 영역의 공통부분이 됨을 알았다. 이때 이 공통부분의 차원에 대하여 생각해 보자. 먼저 유효 목적함수 영역에서 한 정점 Z^1에서 이웃하는 다른 정점 Z^2까지 한 번의 선회연산(pivot operation)에 의해 도달할 수 있는 경우에는 Z^1에 대응하는 가중치영역을 $w \cdot \overline{c_{\cdot j}^{1}} \geq 0$, Z^2에 대응하는 가중치 영역을 $w \cdot \overline{c_{\cdot j}^{2}} \geq 0$, Z^1에서 Z^2로의 선회연산시 선회열을 x_l이라고 하면, $\overline{c_{\cdot j}^{2}} = \overline{c_{\cdot j}^{1}} - (\beta_{kj}/\beta_{kl})\overline{C}_{\cdot l}^{1}$로 나타낼 수 있으므로 $w \cdot \overline{c_{\cdot j}^{1}} \geq 0$, $w \cdot \overline{c_{\cdot l}^{1}} = 0$을 만족하는 영역 W^0는 $w \cdot \overline{c_{\cdot j}^{1}} \geq 0$, $w \cdot \overline{c_{\cdot j}^{2}} \geq 0$를 동시에만족하게 된다.

따라서 선분 $\overline{Z^1Z^2}$에 대응하는 가중치 영역은, 두 정점에 대응하는 가중치 영역의 공통부분으로 등식이 하나 포함되는데, 부등식의 영역에서 등식이 존재하게 되면 그 부등식 영역의 차원은 등식을 나타내는 행렬의 랭크(rank)수 만큼 줄어들게 되기때문에 공통부분의 가중치 영역은 (p−2)차원의 영역이 되며, 두 가중치 영역의 경계부분이 된다. 만일 유효 목적함수 영

역에서 한 정점에서 이웃하는 다른 정점까지 한번의 선회연산(pivot operation)에 의해 도달할 수 없다면 이는 두 정점사이에 하나의 정점에서 선회연산으로 도달할 수 있는 유효정점에대한 목적함수의 값이 유효 목적함수 영역에서 정점이 되지 못하는 점이 있음을 의미하며 이 점은 앞 정리 1. 의 특성을 갖게 된다. 이 점을 Z^0라 하고 이때의 기저에 대한 목적함수 계수의 할인가를 $\overline{C}^0$라 하면 정리 1.에 의해 $\alpha_1 \overline{C}^0_{\cdot 1} + \alpha_2 \overline{C}^0_{\cdot n} = 0$. $\alpha_1 > 0$이 성립하게 된다. 그리고 $\overline{C}^0_{\cdot 1}$를 선회열로 하여 선회연산하여 도달하는 정점을 Z^1, 이때의 할인가를 $\overline{C}^1$이라 하고, $\overline{C}^0_{\cdot n}$를 선회열로 하여 선회연산하여 도달하는 정점을 Z^2, 이때의 할인가를 $\overline{C}^2$라 하면, $\overline{C}^1$와 $\overline{C}^2$는 $\overline{C}^0$를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$\overline{C}^1_{\cdot j} = \overline{C}^0_{\cdot j} - (\beta_{ij}/\beta_{il})\overline{C}^0_{\cdot l}$, $\overline{C}^1_{\cdot l'} = -(1/\beta_{il})\overline{C}^0_{\cdot l}$(단 l'는 l로 선회연산시 기저 탈락변수)

$\overline{C}^2_{\cdot j} = \overline{C}^0_{\cdot j} - (\beta_{kj}/\beta_{kn})\overline{C}^0_{\cdot n}$, $\overline{C}^1_{\cdot n'} = -(1/\beta_{kn})\overline{C}^0_{\cdot n}$(단 n'는 n으로 선회연산시 기저 탈락변수)

여기서 Z^0에 대응하는 가중치 영역은 $w \cdot \overline{C}^1_{\cdot j} \geq 0$, $j \in NB$, $j \neq 1, n$, $w \cdot \overline{C}^0_{\cdot 1} = w \cdot \overline{C}^0_{\cdot n} = 0$ 이되고 이 영역은 $w \cdot \overline{C}^1_{\cdot j} \geq 0$, $w \cdot \overline{C}^2_{\cdot j} \geq 0$을 모두 만족하게 되므로 Z^0에 대응하는 가중치 영역은 선분 $\overline{Z^1Z^2}$에 대응하는 가중치 영역이 되고 그 차원은 정점인 경우보다 1차원 낮은 (∵등식이 하나 존재하므로) (p−2)차원이 된다. 한 정점에서 이웃하는 다른 정점으로 가는데 여러 번의 선회연산을 거쳐야하는 경우 즉, 두 정점을 있는 선분에 유효정점에 따른 목적함수의 값이 유효 목적함수 영역에서 정점이 되지 못하는 값이 여러개 존재하는 경우에도 같은 이론이 적용될 수 있다. 따라서 유효 목적함수 영역에서 이웃하는 두 정점을 있는 선분에 대응하는 가중치 영역은 정점에 대응하는 가중치 영역의 차원보다 하나 낮은 (p−2)차원이 된다. 이러한 특성을 유효 목적함수 영역의 면(face)와 가중치 영역과의 관계로 확대하면 다음의 정리가 성립한다.

정리 5. 유효 목적함수 영역의 면(face)이 n차원이고 이 면에 대응하는 가중치 영역의 차원이 r이라면 이 둘 사이에는 $n + r = p - 1$ 의 관계가 성립한다.
(단 p는 목적함수의 수)

증 명) i) $n = 0$ 일때 정리 3.에 의해 성립한다.
ii) $n = k$ 라고 하면 이 면은 동일한 (k−1)차원 공간에 존재하지 않는 (k+1)개의 정점으로 구성되어 진다. 이 점을Z^0, Z^1, …, Z^k라 하고 이에 대응하는 가중치 영역을 W^0, W^1, …, W^k라 하면 Z^0, Z^1, …, Z^k들의 볼록결합 으로 이루어진 k차원인 유효면에 대응하는 가중치 영역을 W^s라 하면 $W^s = W^0 \cap W^1 \cap \cdots \cap W^k \neq \phi$이 성립하게 된다.(앞 정리 4.에 의해)
한편, 이 $W^0 \cap W^1 \cap \cdots \cap W^k = (W^0 \cap W^1) \cap (W^0 \cap W^2) \cap \cdots \cap (W^0 \cap W^k)$이 되고 $(W^0 \cap W^i)$는 두 개의 (p−1)차원 공간의 공통영역으로 W^0의 경계를 이루는 (p−2) 차원의 공간이 된다. 따라서 W^s는 W^0의 경계를 이루는 k개의 각기 다른 (p−2) 차원 공간들의 교집합이 되므로 W^s의 차원은 $\{p-2-(k-1)\}$이 된다.
유효 목적함수 영역의 면의 차원이 k일 때, 이에 대응하는 가중치 영역 W^s의 차원이 (p−k−1)이므로 항상 $n + r = p - 1$ 의 관계가 성립한다. Q. E. D.

정리 5.에 의하여 유효 목적함수 영역의 차원과 형태를 알면 이에 대응하는 가중치 영역의 차원과 형태를 알 수 있고, 역으로 가중치 영역의 차원과 형태를 알면 이에 대응하는 유효 목적함수 영역의 차원과 형태를 알 수 있다.

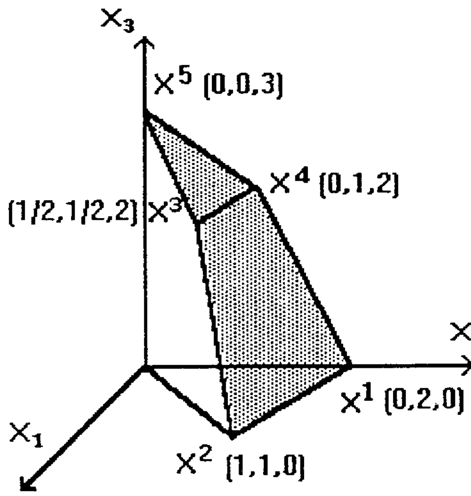
3. 예제

앞 정리들을 통하여 유효 목적함수 영역과 이에 대응하는 가중치 영역간의 관계에 대하여 알아 보았다. 여기서는 이를 토대로 가중치 영역이 주어지면 이에 대응하는 유효 목적함수 영역의 형태를 구할 수 있고 반대로 유효 목적함수 영역이 주어지면 이에 대응하는 가중치 영역의형태도 구할 수 있음을 예제를 통하여 알아보고자 한다.

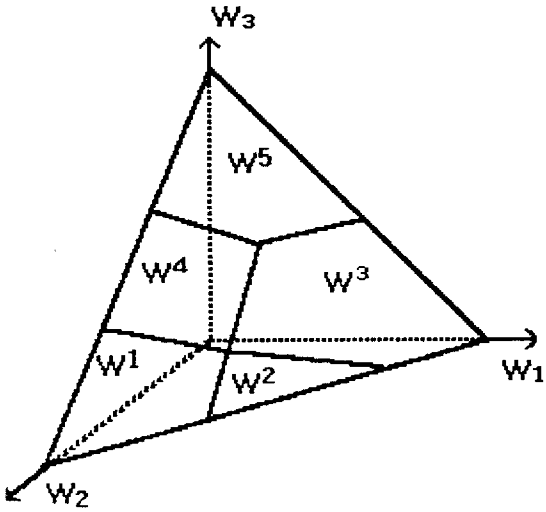
예를들어 다음과 같은 다목적 선형계획 문제가 있다고 하자

$$\begin{array}{ll}
\text{Max} & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{Max} & x_1 + 3x_2 - x_3 \\
\text{Max} & -x_1 + x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\
 & x_1 - x_2 \le 0 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{array}$$

이 문제의 유효해는 [그림 1]과 같으며 이 유효해에 대응하는 가중치 영역은 다음 [그림 2]와 같다.



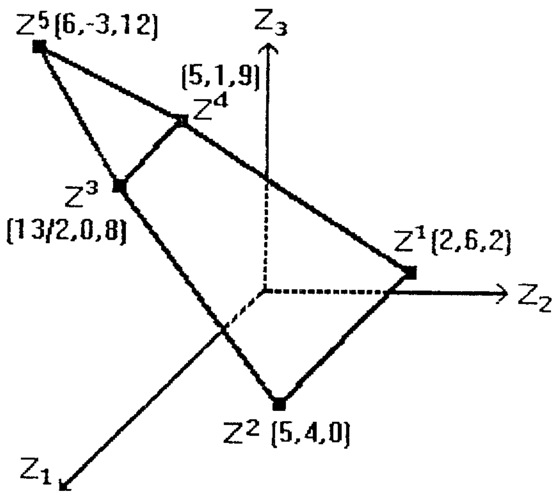
[그림 1] 유효해



[그림 2] 유효해에 대응하는 가중치 영역

[그림 2]에서 보면 2차원 가중치 영역(면)이 5개이고, 1차원 가중치 영역(선분)이 6개, 0차원가중치 영역(점)이 2개 이므로 이 다목적 선형계획 문제의 유효 목적함수 영역은 5개의 정점과 6개의 선분으로된 2개의 이웃한 면이 됨을 예상할 수 있는데 실제로 목적함수에 유효

해를 대입하여 유효 목적함수 영역을 구하면 다음 [그림 3]과 같다.

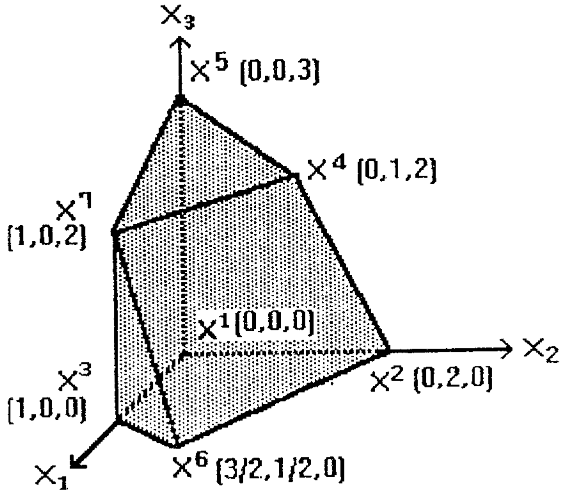


[그림 3] 목적함수 공간에서 유효 목적함수 영역

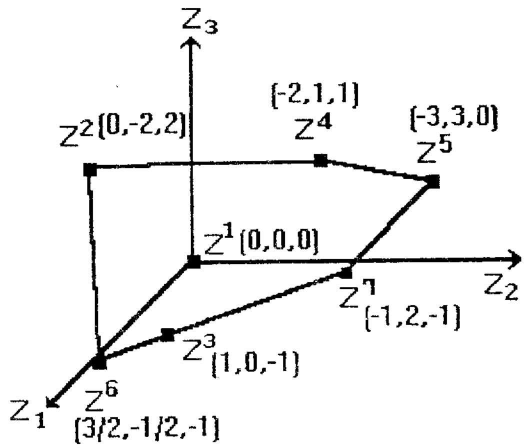
한편, 역으로의 과정을 보기 위하여 다음과 같은 문제가 있다고 하자.

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{Max} & x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & & \\
\text{Max} & & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & & \\
\text{Max} & -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \le & 3 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \le & 4 \\
 & x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & \le & 1 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4} & \ge & 0
\end{array}
$$

위 문제의 유효해는 x_4가 0이면서 수식을 만족하는 모든 가능해 영역이 유효해가 되므로 x_4 방향의 축을 생략하고 그림으로 나타내면 [그림 4]와 같고, 이를 목적함수에 대입하여 유효 목적함수 영역을 구하면 [그림 5]와 같다.



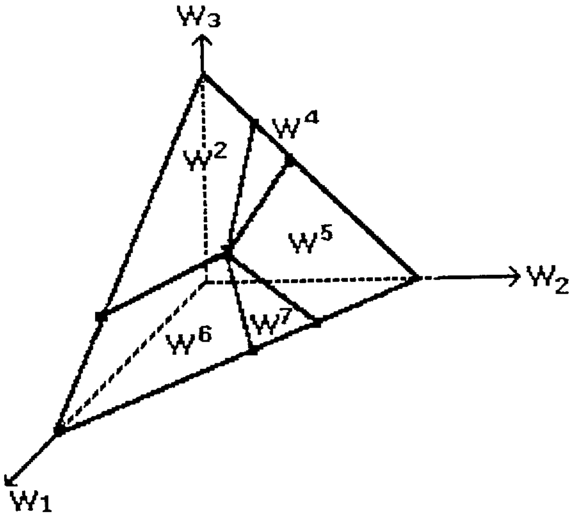
[그림 4] 유효해 영역



[그림 5] 유효해에 의한 유효 목적함수 영역

[그림 5]에서 보면 유효 목적함수 영역은 5개의 정점과 5개의 선분으로 이루어진 하나의 면이 되므로 이에 대응하는 가중치 영역의 공간은 5개의 2차원 영역과 5개이 1차원 영역이 존재하며, 단 하나의 점에서 이들의 공동영역이 존재함을 알 수 있다. 이 문제에 대한 가중치

영역을 나타내면 [그림 6]과 같다.



[그림 6] 유효 목적함수 영역에 대응하는 가중치 영역

4. 결론

우리는 앞에서 유효 목적함수 영역의 정점이 될 수 있는 조건을 찾았고, 유효 목적함수 영역의 차원과 이에 대응하는 가중치 영역의 차원은 그 합이 (p-1)로 일정함을 알았으며, 또한 이를 이용하여 두 영역중 어느 하나의 차원과 형태를 알면 다른 영역의 형태와 차원을 추론할 수 있음을 알았다. 이상의 결과는 유효해와 이에 대응하는 가중치 영역과의 관계를 밝힌 소영섭, 박순달의 논문과 함께 다목적 선형계획 문제에서 나타나게 되는 세가지 영역들끼리의 상호 관계를 찾아낸 것으로 다목적 선형계획 문제의 특성을 찾는 연구에 도움이 될 것으로 사료되며, 다목적 선형계획 문제의 감도분석에 관한 연구에도 도움이 되리라 생각한다.

참 고 문 헌

[1] 박 순달, 『선형 계획법(전정)』, 대영사, 서울, 1986

[2] 소 영섭, "다목적 선형계획 문제에 있어서 유효해의 특성 및 감도분석에 관한 연구", 서울대학교 공학 박사학위 논문, 1990. 8.

[3] 박 순달, 소 영섭, "다목적 선형계획 문제의 특성에 관한 소고", 『한국군사운영분석학회지』, 제 13권 2호 (1987), pp 33-41.

[4] 소 영섭, 박 순달, "다목적 선형계획 문제에서 유효면의 특성", 『한국경영과학회지』, 제 16권 2호 (1991), pp 1-12.

5] Benson H. P., "On a Domination Property for Vector Maximization with Respect to Cones", *J. of Opt. Theory and Appl.*, Vol. 39 No. 1 (1983), pp 125-132.

[6] Cohon J. L. and Solanki R. S., "Approximating The Noninferior Set in Linear Biobjective Programs Using Multiparametric Decomposition", *European J. of O. R.*, Vol 41 (1989), pp 355-366.

[7] Dauer, J. P., "Analysis of the Objective Space in Mutiple Objective Linear Programming", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 126 (1987), pp 579-593.

[8] Dauer, J. P. and Y. -H. Liu, "Solving multipleobjective linear programs in objective space", *European J. of O. R.*, Vol 46 (1990), pp 350-357.

[9] Ecker J. G. and Hegner N. S., Kouada I. A., "Generating All Maximal Efficient Faces for Multiple Objective Linear Pr-

ograms", *J. of Opt. Theory and Appl.*, Vol 30 No. 3 (1980),pp 353-381.

[10] Gal, T., "A General Method for Determining the Set of All Efficient Solutions to a Linear Vector Maximum Problems", *European J. of O. R.*, Vol 1 (1977), pp 307-322.

[11] Gal, T. and Leberling H., "Redundant Objective Functions in Linear Vector Maximum Problems and Their Determination", *European J. of O. R.*, Vol 1 (1977), pp 176-184.

[12] Gal, T. and Wolf K., "Stability in vector maximization-A survey", *European J. of O. R.*, Vol 25 (1986), pp 169-182.

[13] Marlow, W. H., *Mathmatics for Operations Research*, John Wiley & Sons Inc., pp 92-93, 1978

[14] Rhode, R. and Weber, R., "The Range of the Effcient Frontier in Mutiple Objective Linear Programming", *Mathmatical Programming*, Vol 28 (1984), pp 84-95.

[15] Sawaragi, Y., Nakayama H., Tanino T. and *Theory of Multiojective Optimization*, Academic Press, N. Y., 1985

[16] Tanino, T. and Sawagagi Y., "Stability of Nondominated Solutions in Multicriteria Decision-Making", *J. of Opt. Theory and Appl.*, Vol 30 No. 2 (1980), pp 229-253.

[17] Liu, Yi-Hsin, "Objective Space Analysis of a Multiple Objective Linear Program", *Proceedings of the tenth international conference on mutiple criteria decision making*, Taipei (1992), pp 365-371.

[18] Yu, P. L. and Zeleny M., "Linear Multiparametric Programming by Multi-Criteria Simplex Method", *Mgt. Sci.*, Vol 23 No. 2 (1976), pp 159-170.