

유니타리 존즈행렬의 기하학적 해석과 벡터표현*

노봉규 · 김진승
전북대학교 물리학과

(1994년 1월 25일 받음)

투명한 비등방성 매질의 편광투과특성을 나타내는 유니타리 존즈행렬과 쌍앙카레공의 표면에서의 회전변환이 일대일 대응되는 것을 보여주는 공식을 끌어내었다. 이 공식들을 쓰면 유니타리 존즈행렬의 세 매개변수로부터 이에 대응되는 회전변환의 회전축 방향과 회전각을 보여주는 벡터표현을 얻을 수 있고, 또 거꾸로 회전변환의 벡터표현으로부터 이에 대응되는 유니타리 존즈행렬의 매개변수를 결정할 수 있다. 빛이 투명한 비등방성 선형매질을 지날 때 편광상태의 변화를 살펴보려면 먼저 매질전체의 편광투과특성을 나타내는 존즈행렬을 계산하고, 이로부터 쌍앙카레공에서의 회전변환을 결정하여 쌍앙카레공 위의 점들이 어떻게 회전이동하는가 보면 된다.

I. 서 론

빛이 비등방성 선형 광학매질을 지나면 일반적으로 편광상태가 달라지는데, 이 변화를 기술하는데는 흔히 존즈연산(Jones calculus)을 쓴다.^[1,4] 존즈연산에서는 빛의 편광상태를 2×1 행렬로, 광학매질의 편광투과특성을 2×2 행렬로 나타내어 빛이 광학매질을 지나면서 편광상태가 달라지는 것을 다음의 행렬식으로 기술한다.

$$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기에서 두 세로줄 벡터(column vector)는 각각 빛이 매질에 들어가기 전과 매질을 빠져나온 직후의 편광상태를 나타내는 존즈벡터(Jones vector)이고, 2×2 행렬은 매질의 편광투과특성을 나타내는 존즈행렬(Jones matrix)이다. 존즈벡터의 두 행렬요소는 직교하는 두 편광상태를 바탕상태(basis states)로 하여 두 성분의 크기와 상대적인 위상차로서 빛의 편광상태를 나타낸다. 보통은 서로 직교하는 두 선편광 또는 왼손과 오른손 원편광을 바탕상태로 한다. 투명한 매질에서는 반사되는 빛을 무시하면 들어오는 빛과 빠져 나가는 빛에 실린 에너지가 같고, 따라서 그 매질의 존즈행렬은 유니타리(unitary)이다. 존즈연산은 수학적 형식이 간단하기 때문에 여러

가지 비등방성 광학소자들이 차례로 배열된 광학계의 편광투과특성을 분석하는데 가장 널리 쓰인다. 그러나 존즈벡터에 대응되는 빛의 편광상태의 특성을 곧바로 알아내기는 일반적으로 간단하지 않으며, 존즈행렬이 나타내는 매질의 편광변환특성을 곧바로 알아내기는 더욱 어렵다. 편광상태는 흔히 빛의 진행방향에 대해 수직인 평면에서 전기장 벡터가 그리는 궤적으로 모양에 따라 선편광, 원편광, 그리고 타원편광으로 나누는데, 선편광과 원편광은 특별한 타원편광으로 볼 수 있다. 타원편광에서는 전기장 벡터가 그리는 타원의 타원도(橢圓度 ellipticity: 장축의 길이에 대한 단축의 길이의 비)와 장축의 방향 그리고 전기장 벡터가 도는 방향에 따라 편광상태를 나눈다. 보기를 들어 선편광은 타원도가 0이고 원편광은 타원도가 1이다. 왼손 원편광에서는 전기장 벡터가 반시계 방향으로 돌고, 오른손 원편광에서는 전기장 벡터가 시계 방향으로 돈다. 존즈벡터가 나타내는 빛의 편광상태를 기하학적으로 나타내어 반지름이 1인 삼차원 공의 표면 위의 점으로 나타내는 방법이 쌍앙카레공 표현이다. 쌍앙카레공을 쓰려면 먼저 존즈벡터로부터 다음과 같이 스토크스변수(Stokes parameter)를 정의한다.^[1,4]

$$S_0 = \langle |E_x|^2 \rangle + \langle |E_y|^2 \rangle, \quad (2.1)$$

$$S_1 = \langle |E_x|^2 \rangle - \langle |E_y|^2 \rangle, \quad (2.2)$$

$$S_2 = 2\text{Re}\langle E_x E_y^* \rangle = 2|E_x||E_y|\langle \cos(\phi_x - \phi_y) \rangle \quad (2.3)$$

$$S_3 = 2\text{Im}\langle E_x E_y^* \rangle = 2|E_x||E_y|\langle \sin(\phi_x - \phi_y) \rangle \quad (2.4)$$

* 이 논문은 1993년 학술진흥재단의 지원을 받아 진행된 연구결과의 일부임.

여기에서 $\langle \dots \rangle$ 는 시간에 대한 평균을 나타낸다. 이 정의로부터 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \leq S_0^2$ 의 부등식이 언제나 성립하는 것을 쉽게 보일 수 있다. 등식이 성립하는 빛을 완전편광 부등식이 성립하는 빛을 불완전편광이라고 부르며, 특히 $S_1=0, S_2=0, S_3=0$ 인 빛은 서로 직교하는 두 편광성분의 밝기가 같고 두 성분의 위상차이가 제멋대로 변하는 빛으로서 자연광(natural light) 또는 완전한 비편광(completely unpolarized light) 이라고 부른다. 불완전 편광은 자연광과 완전편광이 더해진 것으로 볼 수 있다. 자연광은 투명한 비등방성 광학매질을 지나도 편광상태가 달라지지 않으므로 비등방성 투명 매질의 편광투과특성을 살펴보는 경우에는 더 생각할 필요가 없다. 그러므로 이 논문에서는 앞으로 완전편광성분만을 생각한다.

네개의 스토크스변수들 가운데 S_0 는 빛의 밝기를 나타내는 양으로 편광상태와는 관계없으므로 S_1, S_2, S_3 를 S_0 로 나누어 규격화된 스토크스변수들을 s_1, s_2, s_3 로 나타내자. 완전편광에서는 이 규격화된 스토크스변수들 사이에는 다음과 같은 항등식이 성립한다.

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1 \tag{3}$$

그러므로 (s_1, s_2, s_3) 를 3차원 공간에서의 직교좌표로 잡으면 편광상태를 나타내는 스토크스변수들은 그림 1과 같이 반지름이 1인 단위공의 표면을 이루는데, 이 공을 뽀양카레공(Poincare sphere)이라고 부른다.^[1-5]

편광상태를 뽀양카레공의 표면 위의 점인 뽀양카레벡터(Poincare vector)로 나타낼 때, 그 점의 구좌표계에서의 각좌표를 (θ, ϕ) 라 하면 편광타원의 장축의 방위각은 $\phi/2$ 이고, 타원도는 $\cos\theta$ 이다. 편광타원을 따라 도는 전기장 벡터의 회전방향은 $\theta < \pi/2$ (북반구)이면 반시계방향이고 $\theta > \pi/2$ (남반구)이면 시계방향이다. 그러므로 북반구 표면의 점들은 전기장의 회전방향이 왼손방향인 타원편광에 대응되고 남반구 표면의 점들은 전기장의 회전방향이 오른손방향인 타원편광에 대응되며, 북극점은 왼손 원편광에 남극점은 오른손 원편광에 대응되고, 적도선에 있는 점들은 선편광에 대응되고 편광방향의 방위각은 $\phi/2$ 이다. 이 뽀양카레공을 써서 빛의 편광상태를 나타내면 공의 표면에서의 위치로부터 곧바로 빛의 편광특성을 알 수 있다. 그러므로 존즈연산에 대응되는 뽀양카레공에서의 변환식이 있다면 빛의 편광상태의 변화를 직관적으로 곧바로 이해할 수 있을 것이다. 빛이 비등방성 매질을 지날 때의 스토크스 변수의 변화를 직접 썬하는 방법이 뮐러연산(Müller calculus)으로서 매질의 편광투과특성을 4×4 행렬을 써서 나타내어 빛이 매질에

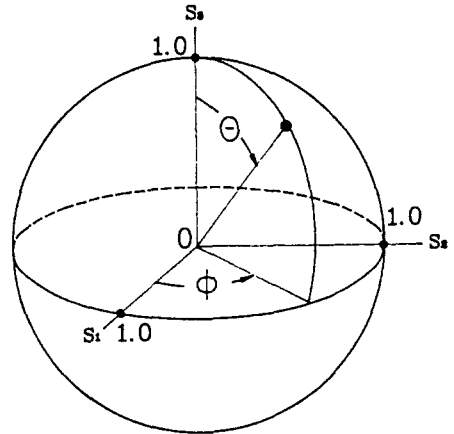


그림 1. 뽀양카레공과 뽀양카레벡터의 각 좌표 (θ, ϕ) .

들어가기 직전의 편광상태를 나타내는 스토크스 변수와 매질을 지난 후의 스토크스 변수 사이의 관계를 행렬식으로 나타낸다. 뮐러연산은 매질을 지난 후의 편광상태를 뽀양카레공의 표면에서의 위치변화로부터 곧바로 결정할 수 있다는 장점은 있지만 뮐러연산이 존즈연산에 비해 훨씬 복잡하고, 또 매질의 편광투과특성을 나타내는 4×4 행렬을 결정하는 것이 쉽지 않으며, 그 행렬이 구체적으로 어떠한 편광변환특성이 있는지 알아 내기는 더욱 어렵다. 따라서 보다 바람직한 것은 뽀양카레공에서 얻을 수 있는 직관성을 보존하면서 존즈연산의 간결성도 그대로 유지하는 수학적 표현형식을 찾는 것이다. 사실 선형복굴절판으로 이루어진 광학계의 편광투과특성을 분석하는데,^[5,6] 광섬유를 지나는 빛의 편광상태와 모우드 변환등을 분석하는데,^[7] 그리고 액정층을 지나오는 빛의 편광상태의 변화를 정성적으로 이해하는데^[8] 이러한 뽀양카레공에서의 변환을 써왔다. 그러나 이러한 분석방법에서는 편광상태의 변화를 정성적으로만 해왔기 때문에 정량적인 분석을 하는데 필요한 수학적 표현형식이 아직 완전히 정립되지 않았다. 존즈연산은 수학적 형식이 아주 단순하여 계산은 쉽게 할 수 있지만 계산결과로부터 매질의 편광투과특성을 이해하기는 쉽지 않다. 그러므로 바람직한 것은 계산과정에서는 존즈연산을 쓰고, 그 결과를 다시 뽀양카레공에서의 변환으로 바꾸어 편광투과특성을 직관적으로 이해하는 것이다. 이를 위해서는 존즈 행렬에 대응되는, 뽀양카레공에서의 변환을 나타내는 수학적 표현형식을 찾아내야 하는데, 이것이 이 논문의 주제이다.

II. 유니타리 존즈행렬에 대응되는 회전변환

어떤 빛의 존즈벡터로부터 스토크스변수를 셈하면 이에 대응되는 췌앙카레공 표면에서의 위치를 정할 수 있고 따라서 그빛의 편광특성-즉 편광타원의 타원도, 장축의 방위각, 회전방향-을 알 수 있다. 이와 같은 대응관계로부터 존즈행렬에 의한 편광상태의 변화는 췌앙카레공에서의 점들의 위치를 변환시키는 좌표변환과 대응될 것을 알 수 있다. 보기를 들어 흔히 쓰이는 편광판(polaroid)이나 편광프리즘은 들어오는 빛을 선편광으로 바꾸어 주는데, 선편광들은 췌앙카레공에서는 적도선 위의 점들로 나타나므로 편광판을 나타내는 존즈행렬은 췌앙카레공에서는 적도선에 투사시키는 투사변환(projective transformation)에 해당한다.

이제 빛이 투명한 비등방성 매질을 지나갈 때의 편광상태의 변화를 생각하자. 빛이 매질의 경계면에서 조금 반사되는 것을 무시하면 투명한 매질의 편광투과특성을 나타내는 존즈행렬은 유니타리인데, 빛의 전체적인 위상변화는 편광상태에 영향을 주지 않으므로 다음과 같이 세계의 실수변수 α, β, γ 를 써서 특수 유니타리(special unitary) 행렬로 나타낼 수 있다.

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma e^{i\alpha} & i\sin\gamma e^{i\beta} \\ i\sin\gamma e^{-i\beta} & \cos\gamma e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \quad (4)$$

이 특수 유니타리 행렬은 삼차원 공간에서의 회전변환과 일대일로 대응되며,^[9,10] 췌앙카레공에서의 회전변환과도 일대일로 대응된다.^[3,4] 3차원 공간에서의 회전변환은 흔히 오일러 각(Euler angles)을 써서 3×3 행렬로 기술해 왔으나, 이 행렬형식은 회전변환을 셈하는 과정이 아주 복잡하고, 또한 그 행렬로부터 회전변환의 특징을 직관적으로 알기 어렵다.^[9] 회전변환의 특성을 직관적으로 이해하는 데는 오일러 각을 쓰는 3×3 행렬형식 보다는 회전축의 방향과 회전각을 명시해 주는 것이 더 도움이 된다. 회전축의 방향을 단위벡터 \mathbf{n} 으로 나타내고 회전각을 Ω 로 나타낼 때, 이 두 양의 값이 정해지면 임의의 벡터 \mathbf{r} 이 회전변환된 결과 \mathbf{r}' 은 다음과 같이 쓸 수 있다.^[9]

$$\mathbf{r}' = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos\Omega) + \mathbf{r}\cos\Omega + (\mathbf{n} \times \mathbf{r})\sin\Omega \quad (5)$$

이제 식 (4)의 유니타리 존즈행렬과 췌앙카레공에서의 회전변환 (\mathbf{n}, Ω) 의 대응관계를 찾아내자. 회전축의 방향을 찾는 것은 간단하다. 회전축과 나란한 벡터는 회전

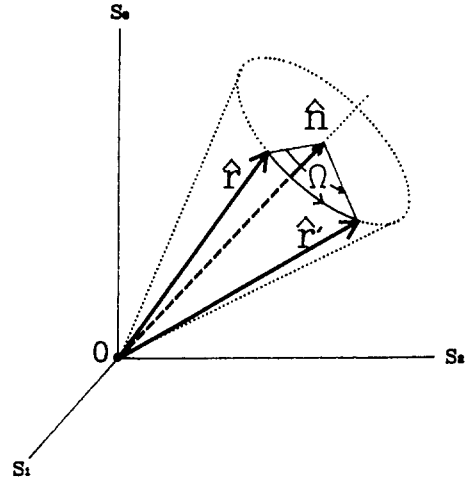


그림 2. 회전축이 \mathbf{n} 이고 회전각이 Ω 인 원점을 중심으로 하는 회전변환에 의한 벡터 \mathbf{r} 의 변환.

변환에 대해 불변이므로 존즈행렬의 고유벡터를 찾아, 그 존즈벡터의 스토크스변수를 셈하고 이로부터 췌앙카레공에서의 대응점을 찾으면 된다. 유니타리 존즈행렬의 고유벡터와 고유값은 각각 두개인데, 두 고유값은 서로 공액인 복소수이며, 두 고유벡터는 서로 직교한다. 서로 직교하는 두 편광상태에 대응되는 췌앙카레벡터는 방향이 서로 반대이다. 그러므로 유니타리 존즈행렬의 두 고유벡터는 존즈벡터에 대응되는 췌앙카레공에서의 회전변환에 대한 회전축을 이루며, 고유값의 위상은 회전각의 반이다. 따라서 췌앙카레공에서의 회전축 방향의 단위벡터 \mathbf{n} 의 각좌표(θ, ϕ)와 회전각 Ω 는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta = \arccos\left\{ \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{[1 - \cos^2\alpha \cdot \cos^2\gamma]^{1/2}} \right\} \quad (6.1)$$

$$\phi = \arctan\left\{ \frac{\cos\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha \cdot \cos\gamma} \right\} \quad (6.2)$$

$$\Omega = 2 \cdot \arctan\left\{ \frac{[1 - \cos^2\alpha \cdot \cos^2\gamma]^{1/2}}{\cos\alpha \cdot \cos\gamma} \right\} \quad (6.3)$$

여기에서 θ 와 ϕ 는 각각 회전축과 나란한 단위벡터의 각 좌표를 구좌표계에서 나타낼 때의 극각(polar angle)과 방위각(azimuthal angle)이다.

거꾸로 회전변환 (\mathbf{n}, Ω) 에 대응되는 유니타리 존즈행렬을 결정하는 변수 α, β, γ 는 회전축을 나타내는 단위벡터 \mathbf{n} 의 방향을 나타내는 θ, ϕ 와 회전각 Ω 의 함수로서 다음과 같이 정해진다.

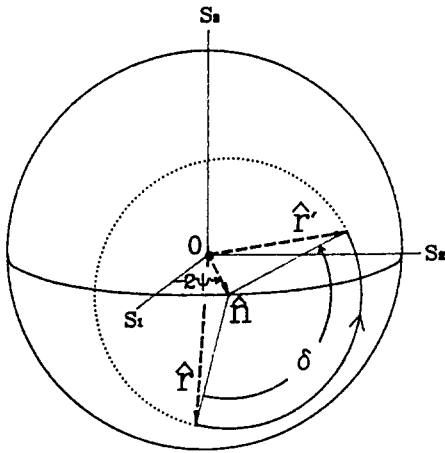


그림 3. 선형 위상판을 지나는 빛의 편광상태의 변화에 대응되는 포앙카레공에서의 회전변환.

$$\alpha = \arctan[\sin\theta \cdot \cos\phi \cdot \tan(\Omega/2)] \quad (7.1)$$

$$\beta = \arctan(\cot\theta \cdot \operatorname{cosec}\phi) \quad (7.2)$$

$$\gamma = \arctan\left\{ \tan(\Omega/2) \left[\frac{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi}{1 + \sin^2\theta \cos^2\phi \tan^2(\Omega/2)} \right]^{1/2} \right\} \quad (7.3)$$

이 결과를 점검하기 위해 편광광학계에서 흔히 쓰이는 위상판과 선광판에 대해 위의 공식을 적용하여 회전축과 회전각을 쟁해 보자. 빠른축의 방위각이 ψ 이고 위상지연값이 δ 인 선형위상판의 존즈행렬 $J_L(\psi, \delta)$ 은 다음과 같다.^[4]

$$J_L(\psi, \delta) = \begin{bmatrix} \cos\delta/2 + i\sin\delta/2 \cdot \cos(2\psi) & i\sin\delta/2 \cdot \sin(2\psi) \\ i\sin\delta/2 \cdot \sin(2\psi) & \cos(\delta/2) - i\sin\delta/2 \cdot \cos(2\psi) \end{bmatrix} \quad (8)$$

이 행렬을 식(4)의 유니타리 존즈행렬의 일반형과 비교하면 세개의 변수 α, β, γ 의 값은 다음과 같다.

$$\alpha = \arctan\left\{ \tan\frac{\delta}{2} \cdot \cos(2\psi) \right\} \quad (9.1)$$

$$\beta = 0 \quad (9.2)$$

$$\gamma = \arctan\left\{ \frac{\sin(\delta/2) \cdot \sin(2\psi)}{[\cos^2(\delta/2) + \sin^2(\delta/2) \cdot \cos^2(2\psi)]^{1/2}} \right\} \quad (9.3)$$

그러므로 이 위상판에 의한 편광상태의 회전변환은 식(6-1,2,3)에 의해 다음과 같이 정해진다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (10.1)$$

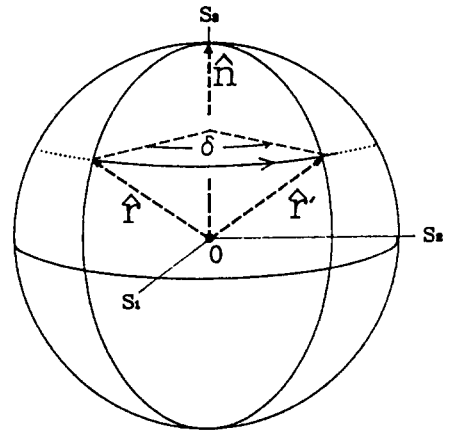


그림 4. 선광판을 지나는 빛의 편광상태의 변화에 대응되는 포앙카레공에서의 회전변환.

$$\phi = 2\psi \quad (10.2)$$

$$\Omega = \delta \quad (10.3)$$

따라서 선형위상판에 대응되는 회전변환은 그림 3과 같이 회전축이 적도평면 위에($\theta = \pi/2$), x축으로부터 반시계방향으로 2ψ 인($\phi = 2\psi$) 방향이고, 회전각은 δ 로서 위상판의 두 축 방향으로 선편광된 빛이 지나가면서 겪는 위상차이다($\Omega = \delta$). 이는 이미 잘 알려진 바로서^[4] 식(6-1,2,3)이 옳음을 간접적으로 확인한다.

또 하나의 보기로서 회전각 δ 인 선광판(旋光板)의 존즈행렬 $J_C(\delta)$ 는 다음과 같다.^[4]

$$J_C(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta/2) & \sin(\delta/2) \\ -\sin(\delta/2) & \cos(\delta/2) \end{bmatrix} \quad (11)$$

이 행렬을 식 (4)의 유니타리 존즈행렬의 일반형과 비교하면 세개의 변수 α, β, γ 의 값은 다음과 같다.

$$\alpha = 0 \quad (12.1)$$

$$\beta = 0 \quad (12.2)$$

$$\gamma = \delta/2 \quad (12.3)$$

그러므로 이 위상판에 의한 편광상태의 회전변환은 다음과 같이 정해진다.

$$\theta = 0 \quad (13.1)$$

$$\phi = 0 \text{ (undefined)} \quad (13.2)$$

$$\Omega = \delta \quad (13.3)$$

따라서 선광판에 대응되는 포앙카레공에서의 회전변환은 그림 4와 같이 수직축을 회전축으로하고 회전각은 δ 이다.^[4]

III. 복합 존즈행렬에 대응되는 회전변환

투명한 비등방성 광학소자가 두 개 붙어 있으면 빛은 두 소자를 차례로 지나면서 편광상태가 변한다. 이 변화는 각 소자의 편광투과특성을 나타내는 두 존즈행렬을 순서대로 곱하여 얻어지는 존즈행렬로 기술된다. 투명한 두 광학소자를 붙여 만든 광학소자 역시 투명하므로, 두 소자의 경계면에서의 빛의 반사를 무시하면, 이 복합소자를 기술하는 존즈행렬도 유니타리이다. 빛이 차례로 지나는 각 광학소자의 존즈행렬을 $J_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $J_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 라 하고 이 복합소자의 존즈행렬을 $J(\alpha, \beta, \gamma)$ 라 하면 이들 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = J_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \cdot J_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \quad (14)$$

이 때 각 존즈행렬을 결정하는 변수 α, β, γ 와 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=1, 2$) 사이에는 다음과 같은 관계가 있음을 확인할 수 있다.

$$\alpha = \arctan \left\{ \frac{\sin(\alpha_2 + \alpha_1) \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + \sin(\beta_1 - \beta_2) \sin \gamma_1 \sin \gamma_2}{\cos(\alpha_2 + \alpha_1) \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - \cos(\beta_1 - \beta_2) \sin \gamma_1 \sin \gamma_2} \right\} \quad (15.1)$$

$$\beta = \arctan \left\{ \frac{\sin(\beta_1 + \alpha_2) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - \sin(\alpha_1 - \beta_2) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2}{\cos(\beta_1 + \alpha_2) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 + \cos(\alpha_1 - \beta_2) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2} \right\} \quad (15.2)$$

$$\gamma = \arctan \left\{ \frac{1 + \cos(2\gamma_1) \cos(2\gamma_2)}{1 - \cos(2\gamma_1) \cos(2\gamma_2)} \right\}$$

$$\frac{-\sin(2\gamma_1) \sin(2\gamma_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2)}{+\sin(2\gamma_1) \sin(2\gamma_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2)} \quad (15.3)$$

이 식으로부터 여러 개의 비등방성 광학소자로 이루어진 광학계의 편광투과특성을 분석하는데 존즈연산을 쓰는 것은 별로 바람직하지 않음을 알 수 있다. 이제 각 소자의 존즈행렬 J_i ($i=1, 2$)와 복합존즈행렬 J 에 대응되는 회전변환을 각각 $R(\mathbf{n}_i; \Omega_i)$ ($i=1, 2$)과 $R(\mathbf{n}; \Omega)$ 라 하고, 위의 관계식을 회전변환들 사이의 관계식으로 바꾸자. 복합회전변환 $R(\mathbf{n}; \Omega)$ 는 각 소자에 의한 회전변환 $R(\mathbf{n}_1; \Omega_1)$ 과 $R(\mathbf{n}_2; \Omega_2)$ 를 차례대로 적용한 결과이다. 그러므로 식 (15.1-3)의 관계식을 회전변환에 관한 관계식으로 바꾸려면 두 회전변환을 차례로 적용한 것과 등가인 회전변환을 나타내는 공식을 끌어내야 한다. 이 것의 계산과정은 조금 복잡한데, 결과는 다음과 같다.^[11]

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega_2}{2}\right) \\ &\quad - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \cdot \sin\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Omega_2}{2}\right) \end{aligned} \quad (16.1)$$

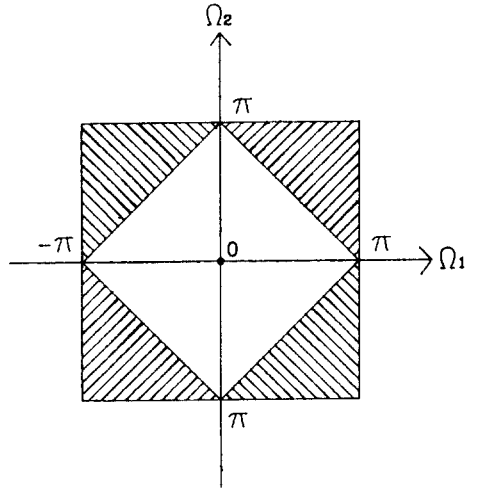


그림 5. $\cos[(\Omega_1 + \Omega_2)/2] \cdot \cos[(\Omega_1 - \Omega_2)/2] \leq 0$ 인 경우의 Ω_1 과 Ω_2 의 값의 범위.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \cdot \mathbf{n} &= \cos\left(\frac{\Omega_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) \cdot \mathbf{n}_1 + \cos\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) \\ &\quad \cdot \sin\left(\frac{\Omega_2}{2}\right) \cdot \mathbf{n}_2 - \sin\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Omega_2}{2}\right) \cdot \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (16.2)$$

참고로 복합회전의 회전각이 180도가 될 조건, 다시 말해 $\Omega = \pi$ 가 될 조건을 구해보자. 이 조건은 보기를 들어 액정표시소자(liquid crystal display device)에서 화소에 선택(select)전압을 걸었을 때와 비선택(non-select)전압을 걸었을 때의 그 화소의 명암대비와 밝기의 차이가 최대가 되는 이상적인 경우의 편광투과특성에 해당한다.^[12] $\Omega = \pi$ 이면 $\cos(\Omega/2) = 0$ 이므로 식 (16.1)로부터

$$\cos\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega_2}{2}\right) - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \cdot \sin\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Omega_2}{2}\right) = 0 \quad (17)$$

이다. 이 식으로부터 우리는 회전각 Ω_1 과 Ω_2 사이에 다음과 관계가 성립해야 두 회전변환 (\mathbf{n}_1, Ω_1) 과 (\mathbf{n}_2, Ω_2) 이 이루는 복합회전변환 (\mathbf{n}, Ω) 의 회전각이 π 가 될 수 있음을 알 수 있다.

$$\cos\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}\right) \leq 0 \quad (18)$$

식 (18)에서의 두 회전각 Ω_1 과 Ω_2 의 범위는 $-\pi \leq \Omega_1, \Omega_2 \leq \pi$ 이다. 그림 5는 식(18)의 부등식을 만족하는 두 회전각 Ω_1 과 Ω_2 의 범위를 그림으로 나타낸 것인데, 두 회전각 Ω_1 과 Ω_2 의 절대값을 더한 값이 π 이상이 되어

야만 회전각이 π 인 회전변환을 합성할 수 있음을 알 수 있다. 그 경우 두 회전축의 상대적인 방향은 식 (17)에 따라서 결정해 주어야 한다.

V. 결 론

투명한 비등방성 광학매질의 편광투과특성을 나타내는 유니타리 존즈행렬에 대응되는 뽀앙카레공에서의 회전 변환의 특성을 결정하는 공식과, 거꾸로 회전변환의 특성으로부터 이에 대응되는 유니타리 존즈행렬의 요소들의 값을 결정하는 매개변수를 구하는 공식을 끌어냈다. 특히 회전변환은 회전축의 방향과 회전각을 써서 벡터 형식으로 나타냈다. 존즈연산 대신 벡터형식으로 나타낸 뽀앙카레공에서의 회전변환을 쓰면 빛이 비등방성 광학 매질을 지나면서 편광상태가 어떻게 달라지는가를 기하학적으로 해석하여 쉽게 이해할 수 있다. 따라서 액정 화면소자등 편광상태의 변화가 복잡하게 나타나는 광학 소자의 편광투과특성을 분석하는데 편리하다.

참 고 문 헌

[1] W. Swindell ed., *Polarized Light* (Dowden Hutchinson & Ross, Inc., Stroudberg, 1975). 이 책은 편광에 관한 이론을 다룬 原論文들을 모은 影印本이다.

[2] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, sixth ed. (Pergamon Press, London, 1982).
 [3] R. A. Azzam and B. Bashara, *Ellipsometry and Polarized Light* (North Holland, Amsterdam, 1982).
 [4] P. S. Theocaris and E. E. Gdoutos, *Matrix Theory of Photoelasticity* (Springer Verlag, Berlin, 1979).
 [5] G. N. Ramachandran and S. Ramaseshan, *Crystal Optics*, in *Handbuch der Physik XXV/1*, S. Flügge ed. (Springer Verlag, Berlin, 1961).
 [6] M. Johnson, "Poincare sphere representation of birefringent networks," *Appl. Opt.*, **20**, 2075(1981).
 [7] R. Ulrich, "Representation of codirectional coupled waves," *Opt. Lett.*, **1**, 109(1977).
 [8] J. E. Begelow and R. A. Kashnow, "Poincare sphere analysis of liquid crystal optics," *Appl. Opt.*, **16**, 2090(1977).
 [9] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, second ed. (Addison-Wesley, New York, 1980).
 [10] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, vol. II (North Holland, Amsterdam, 1965).
 [11] S. L. Altman, *Rotations, Quaternions, and Double Groups* (Oxford University Press, London, 1986).
 [12] 노봉규, 김진승, "액정표시소자에서 화면의 명암대비와 밝기를 극대화하는 기본 조건", 한국광학회지에 투고예정.

Geometric Interpretation of the Unitary Jones Matrix and Its Vectorial Representation

Bong Gyu Rho and Jin Seung Kim
 Department of Physics, Chonbuk National University
 Chonju 560-756, Korea

(Received: January 25, 1994)

We derive a set of formulae which show one-to-one correspondence between the the unitary Jones matrices of transparent anisotropic media and the rotational transformations on the Poincare sphere. By using the formulae one can determine the vectorial representation of the rotational transformation on the Poincare sphere which specifies the direction of the axis and the angle of the rotation in terms of the three parameters specific to the corresponding unitary Jones matrix, and conversely the the three parameters of the unitary Jones matrix in terms of the vectorial representation of the corresponding rotational transformation on the Poincare sphere. To understand the polarization transmission characteristics of an optical system consisting of transparent linear anisotropic media, start with the Jones calculus to get the unitary Jones matrix for the whole system and then convert it to a rotational transformation on the Poincare sphere, from which we can intuitively understand the effect of the optical system on the polarization state of the light passing through the system.