

암반의 손상역학 해석에 있어서 Fractal차원의 적용에 관한 연구 A Study on Application of Fractal Dimension in Analysis of Damage Mechanics in Rock

정교철 (Jeong, Gyo Cheol)

한국자원연구소

김영기 (Kim, Young Ki)

경북대학교

요약/Abstract

암반은 서로 다른 입자 및 미소크랙과 같은 미소구조의 개별요소로 구성되어 있다. 이러한 미소구조에 대한 연구는 대심도 지하공간개발과 관련된 지질공학 및 토목공학분야 등에 있어서의 관심이 증대되고 있다. 따라서, 단순한 연속체역학에 의한 접근보다는 구성입자들에 대한 역학적성질 및 개별구조요소등이 고려되어야 할 것이다. 그러나, 단순한 유클리드 공간에서 이들 구조를 표현하기는 매우 어렵다. 그래서 Mandelbrot에 의해 자연에 있어서 규칙성이 거의 없는 물체를 정량적으로 표현하기 위한 Fractal이론이 개발되었다.

본 연구에는, 크랙의 진전과 응력의 관계를 평가하기 위해 미소구조의 기하학적 성질이 Fractal차원에 의해 계산되었다. 암반의 역학적 성질을 평가함에 있어 그 구조의 복잡성을 Fractal이론에 의해 단순화 및 수치화시켜 균질화이론에 적용시키므로써 그 평가를 보다 용이하고 효과적으로 할 수 있다.

Rocks are composed of the discrete elements of microstructures such as different grains and microcracks. The studies of these microstructures are of increasing interest in engineering geology and civil engineering related to construction of a deep underground space. Accordingly, instead of a simplified continuum approach, discrete structural elements and mechanical properties of various grains must be accounted. But it is difficult to analyse crack and discontinuity surfaces in Euclidean geometry. So, Mandelbrot(1983) developed fractal theory to manage irregular body in nature. In this

은 $3 + (1.75/5) = 3 + 0.35 = 3.35$ 로 처리한다. 선분 r 의 길이를 변화시키면 당연히 $N(r)$ 도 변한다. 예를들어 r 를 작게하면 r 을 크게 하였을때 무시되었던 미세한 형상까지 나타내는 것이 가능하지만 그 $N(r)$ 는 크게된다. 그 관계는 다음과 같다.

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (1)$$

이때, D 는 그 형상을 나타내는 Fractal 차원이 된다. 이 D 를 구하는 방법은 양대수 방안지의 X축에 r , Y축에 $N(r)$ 의 관계를 그래프로 표시하면, 그 그래프의 경사 D 가 Fractal차원이 된다.

즉

$$D = -\Delta \log N(r) / \Delta \log r \quad (2)$$

이 되고, 그 예는 Fig.1과 같다(Ohta, 1994).

격자를 이용하는 방법

이 계산방법은 대상도형을 격자에 근사시켜 Fractal차원을 구하는 방법이다. 수

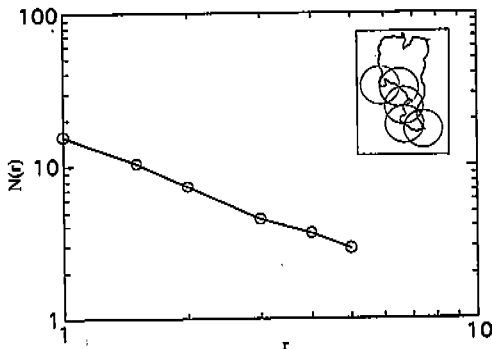


Fig.1 Fractal dimension of grain boundary

계, 압반내 불연속면등 분기되어 있는 복잡한 것에 이용하는 방법이다.

격자 한번의 길이를 l 로 하는 정방형에서, 크랙이 존재하는 격자수 $N(l)$ 를 측정한다. 이것도 l 가 작아질수록 크랙을 보다 정확히 근사시킬 수 있다. 이 l 과 $N(l)$ 은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$N(l) \propto l^{-D} \quad (3)$$

이 식에서 D 는 Fractal차원이다.

양대수 방안지의 X축에 l 를, Y축에 $N(l)$ 를 표시하면 그 경사는 D 가 된다. 즉,

$$D = -\Delta \log N(l) / \Delta \log l \quad (4)$$

이와 같이 격자에 의한 방법을 box counting이라고도 하며, 그 예는 Fig.2와 같다.

본 연구에서는 이들 방법들을 이용해서 검토하였다. Fractal차원의 산정에 있어서 l 는, 크랙의 최소 길이를 l_j , 대상 영역의 한변을 l 로 하였을때, 경험적으로 $l_j \leq l \leq (l_j/5)$ 의 범위내에서 $N(l)$ 과 l 의

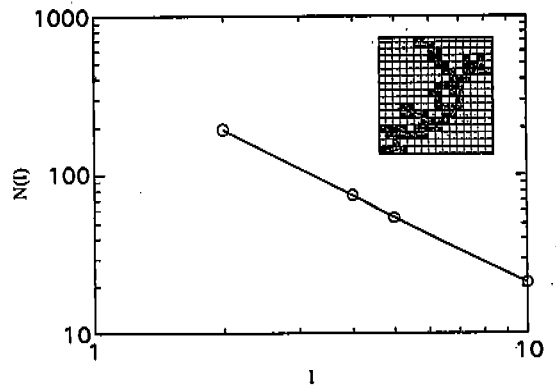


Fig.2 Fractal dimension of intracrystalline cracks of grain



(a) 550kgf/cm^2 $D = 1.61$



(b) 1100kgf/cm^2 $D = 1.56$



(c) 1150kgf/cm^2 $D = 1.61$



(d) 1168kgf/cm^2 $D = 1.69$

Fig.3 Photographs showing variation of fractal dimension according to increasing stress.

상관성이 가장 양호하게 나타난다. 그 이유는 $l \leq l_c$ 의 범위로 계산하면 길이 l_c 이하의 크랙은 계산되지 않고 $N(l)$ 가 실제보다 작게 나타난다. 또한 $l \geq (l_c/5)$ 의 범위를 취하면 크랙수가 많게 되어 크랙계의 공간분포의 국소적 집중성을 가지지 않는다(Udagawa, 1993).

손상에 따른 Fractal차원의 변화

화강암은 주로 석영, 장석 및 흑운모등 3종류의 광물에 의해 구성되어 있다. 이 3종류의 광물은, Table 1과 같이 각각 다른 물성치 및 기하학적 특성을 가지고 있다. 이 때문에 크랙의 진전은 Fractal차원에 의해 나타낼 수 있다.

Table 1. Physical properties of major minerals of the granite used for analysis.

Minerals	Young's modulus(GPa)	Poisson's ratio
Quartz(Q)	87.5	0.11
Feldspar(F)	69.6	0.30
Biotite(B)	76.6	0.20

광물에 있어서 응력에 따른 크랙의 Fractal차원의 예는 Fig.3과 같고, 각 입자에 있어서의 관계를 그래프로 나타내면 Fig.4와 같다. 석영내에는 다소의 기존크랙이 존재한다. 이 때문에 재하전부터 Fractal차원이 3광물중 석영이 가장 높다는 것을 알 수 있다. 응력을 가하면 처음에는 Fractal차원이 거의 변하지 않는다. 그러나, 어느 정도의 응력이 가해진 단계

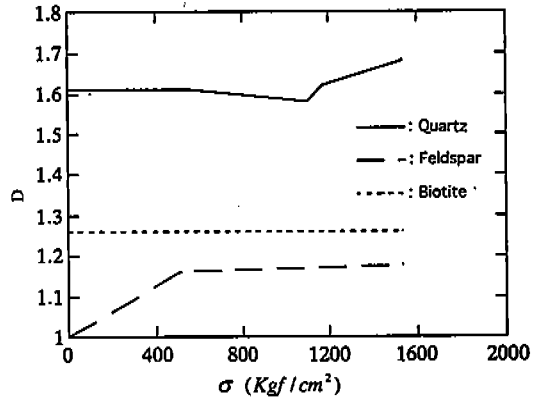


Fig.4 Fractal dimension of cracks vs. stress in major minerals of granite.

에서는 Fractal차원이 감소한다. 이것은 재하응력에 의한 축응력 방향과 직교하는 방향으로 존재하는 기존 크랙이 닫혀지기 때문이라 생각된다.

응력을 가함에 따라 응력축 방향의 크랙이 열려지거나 진전하고, 따라서 Fractal차원도 증가하게 된다. 크랙 그 자체를 보면, 그 발생, 진전은 재하응력에 비례해서 발달한다고 말할 수 있다. 장석에서는 재하전의 단계에서 크랙은 거의 보이지 않는다. 따라서 Fractal차원은 다소 낮다. 응력을 가함에 따라 크랙이 발생하지만 장석내부로부터 발생하는 크랙은 적고, 대부분 석영과 장석의 경계에서 발생·진전된 크랙이 많다.

흑운모에서는 cleavage라는 그 자체의 기하학적 특징을 가지고 있기 때문에 재하전부터 층상의 크랙이 보인다. 따라서 장석에 비교해서 다소 높은 Fractal차원을 보인다. 그러나, 재하하중을 증가시켜도 Fractal차원은 거의 변화하지 않는다. 그

것은 흑운모의 물리적 성질 및 강한 이방성으로 인해 흑운모를 감싸고 있는 석영 및 장석에 크랙이 먼저 발생·진전하기 때문이다.

손상역학해석에 있어서 Fractal차원의 적용

Fractal이론을 균질화이론(Homogenization theory)에 적용시켜 형상의 복잡함과 물성치의 변화에 대하여 해석하였다.

균질화 이론

Fig.5와 같이, 미소 주기구조를 갖는 물체의 탄성문제에서, 주기구조의 주기를 ϵ , 물체중에 있어서 불연속으로 변화하는 탄성정수를 $E^\epsilon(x)$, 물체력을 $f^\epsilon(x)$, 그것들의 변화를 반영하는 변위를 $u^\epsilon(x)$ 등으로 나

타내면, 이 물체에 대한 정적평형식은 약형식(weak form)을 이용해서 다음과 같이 나타내어진다(Jeong et al., 1993).

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^\epsilon(x) \frac{\partial u_k^\epsilon(x)}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^\epsilon(x)}{\partial x_l} dx = \int_{\Omega} f_i^\epsilon(x) v_i^\epsilon(x) dx + \int_{\partial\Omega} t_i(x) v_i^\epsilon(x) dx \quad (5)$$

여기에서 $u(x)$ 는 임의의 함수이다.

미소스케일로 변화하는 함수를 취하기 위해 $y=x/\epsilon$ 로 변수를 도입한다. 앞에서 언급한 $E^\epsilon(x)$, $f^\epsilon(x)$, $u^\epsilon(x)$ 는 다음과 같은 2변수함수로 나타내어질 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} E_{ijkl}^\epsilon(x) &= E_{ijkl}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) = E_{ijkl}(x, y) \\ f_i^\epsilon(x) &= f_i\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) = f_i(x, y) \\ u_i^\epsilon(x) &= u_i\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) = u_i(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

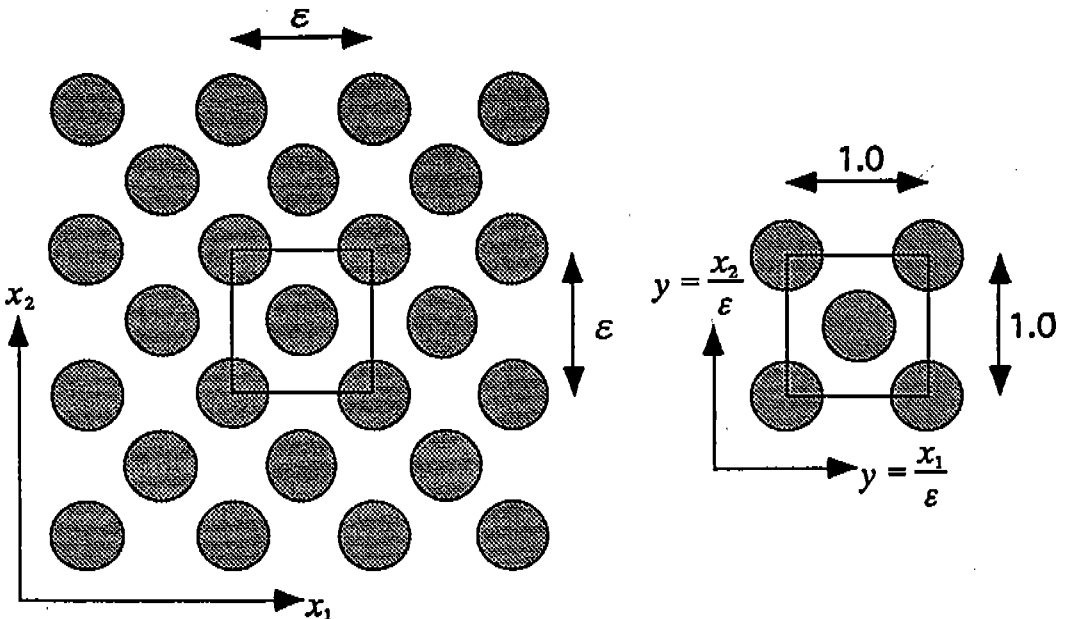


Fig.5 Macroscopic and microscopic periodic structure

$y=x/\epsilon$ 는 미소스케일 변수, x 는 거시적 스케일변수라 한다. 또 이들 2변수함수의 미분은

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (7)$$

가 된다. 또한, 여기에서 식 (5)의 경계치 문제의 해를 위해

$$u^\epsilon(x) = u(x, y) = u^0(x) + \epsilon u^1(x, y) + \epsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (8)$$

와 같은 점근전개형의 해를 생각할 수 있다. 여기에서 u^1, u^2, \dots 는 미소 주기구조의 영향을 나타내는 y 에 관한 주기함수이다. 또, u^0 는 미소 스케일변수 y 에 의존하지 않는 함수로서 $\epsilon \rightarrow 0$ 일때, 즉 미소 주기구조의 크기가 무한대로 작아질 때의 극한이라 하고, 미소 구조를 갖는 물체의 평균 거동을 나타낸다. 식(8)을 식(7)에 대입하고, $\epsilon \rightarrow 0$ 인 극한에서의 변위의 미분은

$$\frac{\partial u^\epsilon(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i^0(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^1}{\partial y_i} \quad (9)$$

가 된다. 변위의 도함수에 있어서는 변위 그 자체와는 다르고, $\epsilon \rightarrow 0$ 로한 극한에 있어서도 미소주기구조의 영향을 나타내는 u^1 의 도함수가 남게 된다. 즉 변형(strain)과 응력(stress)에 대해서는 평균 거동이라 하지만 미소 구조의 영향을 무시할 수 없는 것으로 나타난다.

이상의 식(6)과 식(9)을 식(5)에 대입해서 $\epsilon \rightarrow 0$ 의 극한을 취하면 결과적으로 u^0 와 u^1 에 관한 이하의 식이 유도된다.

(u^1 에 관하여)

$$u_i^1(x, y) = -\chi_i^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \tilde{u}_i^1(x) \quad (10)$$

여기에서 $u_i^1(x)$ 는 임의의 함수(y 에 관한 적분 정수)이다. 또 χ^{kl} 는 k, l 에 관해 대칭이고,

$$\begin{aligned} & \int_Y E_{ijpq}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{kl}(x, y)}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dx \\ &= \int_Y \left(-\frac{\partial E_{ijkl}(x, y)}{\partial y_j} \right) v_i dy \\ &= \int_Y E_{ijkl}(x, y) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)의 해로소 주어지는 6개의 텐서함수이다.

(u^0 에 관하여)

$$\begin{aligned} & \int_\Omega E_{ijkl}^H(x) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} dx \\ &= \int_\Omega f_i^H(x) v_i(x) dx + \int_{\partial\Omega} t_i(x) v_i(x) dx \end{aligned} \quad (12)$$

여기에서,

$$E_{ijkl}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl}(x, y) - E_{ijpq}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{kl}(x, y)}{\partial y_q} \right) dy \quad (13)$$

$$f_i^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i(x, y) dy \quad (14)$$

로 된다. 여기에서 $|Y|$ 는 단위구조의 체적을 나타낸다. 위의 방정식에 있어서, 식(11)내에서 보이는 바와 같이 χ^{kl} 는 미소 주기구조를 구성하는 단위구조에 의해

결정되는 텐서함수로서 특성변형함수(characteristic deformation function)이라 부른다. 그리고 식(10)에는 미소 구조의 영향에 의한 변위장 u^1 이 평균거동변형 $\partial u_k^0/\partial x_i$ 에 이 특성변형함수 χ^k 을 곱한 형태로 주어져있다. 또, 식(12)은 식(13) 및 식(14)에서 주어진 $E_{ijkl}^H(x)$ 와 $f_i^H(x)$ 를 각각 새로운 탄성정수 혹은 물체적으로 간주하면 평균거동 u^0 는 원래의 해로서 주어지게 된다. 식(13)도 단위구조내에서 적분이 되며, 이 식에서 주어진 새로운 탄성정수 $E_{ijkl}^H(x)$ 와 물체력 $f_i^H(x)$ 를 주어진 정적평형 문제의 해로서 평균거동을 나타내는 탄성정수와 물체력이라는 의미에서 각각 균질화 탄성정수, 균질화 물체력이라 할 수 있다. 또한, 응력-변형율의 함수

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl}^e \frac{\partial u_k^e(x)}{\partial x_l} \quad (15)$$

에 $u^e(x) \simeq u^0 + \epsilon u^1$ 을 대입하면 단위구조내의 국소적 응력상태는

$$\sigma_{ij}(x, y) \simeq (E_{ijkl}(x, y) - E_{ijkl}^0(x, y)) \frac{\partial \chi_k^d(x, y)}{\partial y_a} + E_{ijkl}^0(x, y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \quad (16)$$

로 근사적으로 구하여진다.

이 국소적 응력 $\sigma_{ij}(x, y)$ 는 단위구조내에 있어서 응력을 나타내고, 그 단위구조내에서의 체적평균

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{ij}(x, y) dy \quad (17)$$

는 거시적 평형식

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f_j^H v_j dx \quad (18)$$

를 만족한다.

이상과 같은 균질화 이론에 의해, 미소 주기구조를 갖는 물체의 평균물성이 계산되고, 각 임의의 점에서 국소적인 응력을 구할 수 있다.

균질화 이론의 적용

암석내부의 미소구조는 무질서해서 어떤 규칙성도 보이지 않는것같은 성질을 가지고 있다. 그러나 무질서한 구조를 갖는 암석이라하여도 실제로는 방향성이 존재하고, 그것은 미소크랙의 방향성과 관계 있는 것으로 알려져 있다. 이것은 암석의 생성과정 혹은 현재까지 받은 응력이력등의 영향에 의한 것이기 때문이다. 이 특징을 이용해서, 암석을 어떤 미소스케일로 모델화하고 전체를 그 주기성 구조로 생각할 수 있다. 암석을 이와같은 미소 주기구조의 집합체로 있다고 가정해서, 수학적인 균질화 이론을 적용할 수가 있다.

실제 암석의 단위구조를 선택하여 이들을 수치해석하기위한 실제 그대로의 mesh를 작성하기란 매우 복잡하고 시간이 많이 걸린다. 따라서 실제 단위구조를 Fractal 차원에 의해 단순화 시켜 해석하는 것이 보다 능률적이라 하겠다.

단위구조를 작성하기 위해서는 처리해야 할 문제는 크게 2가지로 생각할 수 있다. 즉 구조형상의 통계적 처리와 구조분포의 통계처리이다. 본 연구에서는 전자를 Fractal이론에 적용시켜 해석하였다. 우선

Fractal이론으로 부터 간단한 Fractal도형을 작성하고, 그것을 암석내부의 입자 모델로서 생각해서 해석하였다. Fig.6은 삼각형 입자경계모델이고, Fig.7은 사각형 입자경계모델이다. 계측치는 실제 암석내부에 존재하는 장석내의 석영입자를 가능한 그대로 모델들을 각각 Fractal차원으로 수치화한 다음 이들 수치화한 형상 그대로를 균질화이론에 의해 해석 비교하였다. Fig.8에서 알 수 있는 바와 같이 Fractal차원이 증가하면 삼각형 입자경계 모델, 사각형 입자경계모델 및 계측치 모두 Young's modulus가 증가한다는 것을 알 수 있으나, 삼각형 입자경계와 사각형 입자경계에 주목해 보면, 같은 차원에서도 Young's modulus의 차가 있음을 알 수 있다. 이와 같은 이유에서 Fractal이론을 적

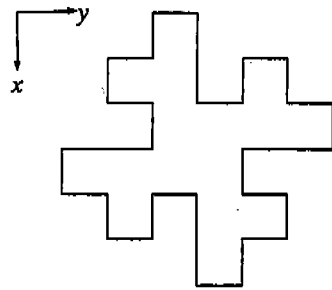
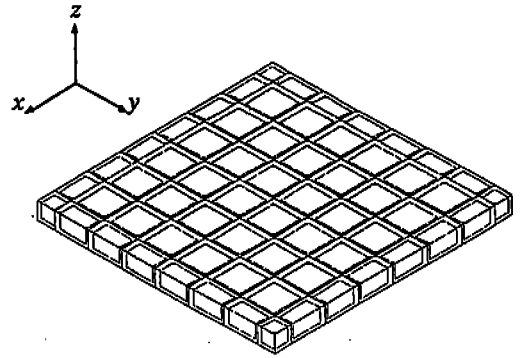


Fig.7 Quadrangle grain boundary model

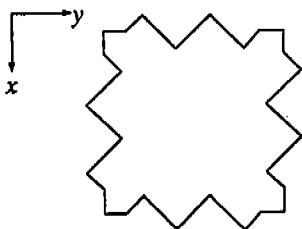
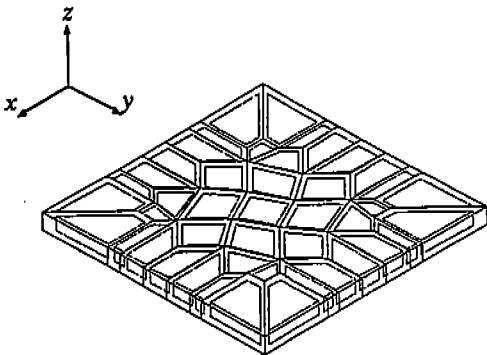


Fig.6 Triangle grain boundary model

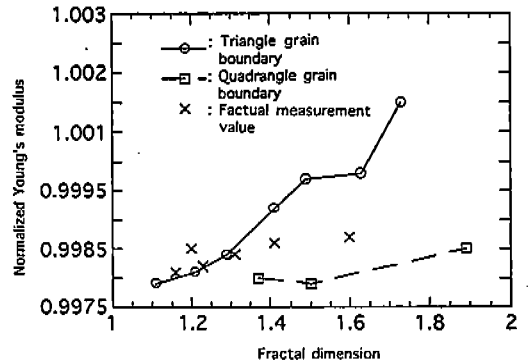


Fig.8 Normalized Young's modulus vs. fractal dimension

용할 때, 그 차원수 뿐만 아니라 형상에 대해서도 주의할 필요가 있다고 생각되며, 또 계산치의 차가 1/1000로 매우작은 결과로부터 입자 경계의 근사는 사각형 입자경계를 기본으로한 방법이 양호하다고

생각할 수 있다.

위의 결과를 기본으로하여, 입자내 크랙의 열림과 진전에 따른 Fractal차원을 계산하고, 그 Fractal차원에 따른 탄성계수의 변화를 해석하였다.

우선, 기본입자모델을 응용하여, 입자내의 크랙이 존재하는 경우의 간단한 모델을 작성하고, 균질화이론에 적용시켜 그 차이를 고찰하였다. 여기에서의 모델은 입자내 크랙의 영향에 주목해서 해석하기 위해 입자경계를 단순한 사각형으로 작성하였다. 크랙의 폭은 0.5mm, 1mm, 2mm 등의 3종류를 준비해서 균질화이론에 적용시킨 결과는 Fig.9와 같다. 즉, 입자내 크랙의 Fractal차원이 증가함에 따라 Young's modulus는 감소하며, 크랙의 폭 또한 열림이 증가함에 따라 Young's modulus가 감소한다는 것을 알 수 있다.

다음으로는 실제의 암석내부에서 발생, 진전한 크랙을 모델로 작성하여, 균질화이론에 적용시켜 해석하였다. 작성한 모델은

Fig.10과 같으며, 해석에 의해 구해진 Young's modulus와 Fractal차원의 관계는 Fig.11과 같다. 여기에서도 Fractal차원이 증가함에 따라 Young's modulus가 감소하지만, 어느정도 감소하면 크랙의 Fractal차원이 증가하여도 Young's modulus는 거의 변하지 않는다는 것을 알 수 있다. 즉, 어느정도의 손상까지는 Young's modulus의 변화를 가져오지만, 그 이후에서는 Young's modulus의 변화없이 파괴에 도달한다는 것을 의미한다.

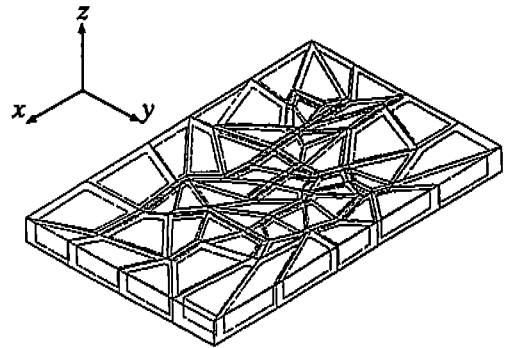


Fig.10 Mesh of intracrystalline cracks for calculation

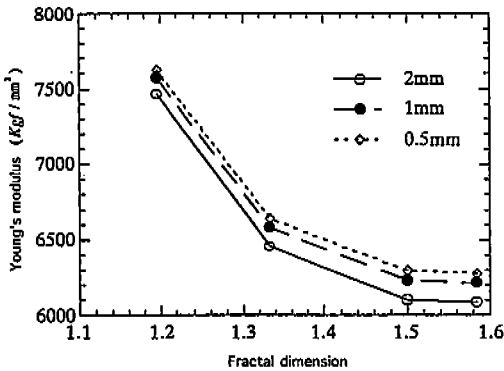


Fig.9 Young's modulus vs. fractal dimension of intracrystalline crack.

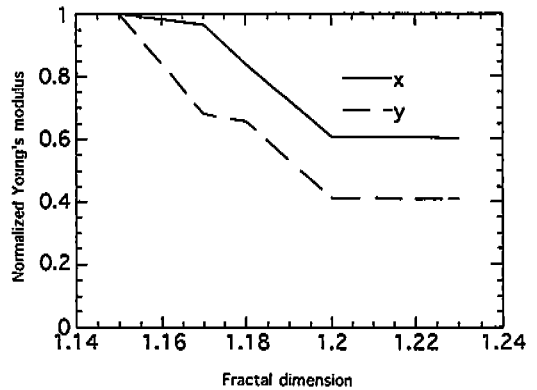


Fig.11 Normalized Young's modulus vs. fractal dimension calculated in Fig.10

결 언

본 연구에서는 Fractal차원을 이용해서 암석내부의 입자구조를 나타내는 모델을 작성하고, 그것을 균질화이론에 적용시켜, 그 입자의 평균물성을 구하였다. 해석결과와 실험에서 구한 결과와의 비교,검토에서 얻어진 결론은 다음과 같다.

Fractal차원을 이용해서 입자의 기본모델을 작성하고, 암석의 물성치변화를 비교한 결과, 사각형 입자경계모델이 실제와 근사한 변화를 보여 주었다. 이 결과로부터 암석내 단위구조의 형상을 Fractal차원에 의해 간략하게 표현할 수 있다는 것을 보여준다.

Fractal차원을 사용하여 여러가지 모델을 작성하고, 그 물성치를 비교한 결과 Fractal차원이 거의 같아도 그 형상에 의해 물성치가 다르게 나타나는 것으로부터 Fractal이론을 사용할때 그 형상에 주의할 필요가 있다고 생각한다.

또한, 입자내 크랙이 복잡하게 되거나 진전해서 Fractal차원이 증가하면, 그 물성치는 감소한다는 것을 알 수 있다.

위의 결론으로부터, 실험 및 유크리드 공간을 이용한 해석문제에 있어서, 어려운 불연속성암반의 물성평가는, Fractal이론을 균질화이론에 적용시키므로서, 그 새로운 접근의 가능성을 시사한다.

사 사

본 논문작성에 있어서 많은 조언을 해

준 일본 나고야대학 토목공학과 지권환경 공학교실의 Y.Ichikawa 조교수에게 감사드리며, 실험 및 해석에 도움을 준 (주)동경가스의 Y.Ohta씨에게 감사한다.

참고문헌

Mandelbrot, B.B., 1983, The fractal geometry of nature. Freeman, San Francisco, 468p.

이영훈, 1994, Fractal차원과 Variogram을 이용한 암반 불연속면의 굴곡도 특성 서술. 자원환경지질, 제27권, 제1호, pp.81-91.

Jeong, G.C., and Ichikawa, Y., 1993, Micromechanics of stress-induced damage at constituent mineral contact of granite. J.Geophys.Res.,(submitted).

Jeong, G.C., and Ichikawa,Y.,1994, An experimental study on damage propagation of intact granite. J.Soc.Mat. Sci.,Japan, v.43, pp.317-323(in Japanese).

Ohta, Y., 1994, A fundamental research of micro-damage in rock specimen by fractal theory. Master Thesis of Nagoya University, 40p.(in Japanese).

Udagawa, Y., 1993, Examination on the evaluation of rock heterogeneity by fractal property of rock fracture. J. Japan Soc. Dam Engineers, No.10,

pp.20-28(in Japanese).

Barton, C.C., and Larsen, E., 1985, Fractal geometry of two-dimensional fracture networks at Yuka Mountain, Southwestern Nevada. Int.1st Symp. on Fundamentals of Rock Joints, Bjorkliden, pp.36-41.

大西有三, 鎌本廣之, 1986, Fractal 기하학의 암반공학에의 적용에 관한 기초적 검토. 일본 토목 학회, 제18회 암반역학에 관한 심포지움 강연 논문집, pp. 186-189(일본어).

정교철 :

한국자원연구소
대전직할시 유성구 가정동 30번지
305-350
TEL : (042)868-3050
FAX : (042)861-9720

김영기 :

경북대학교 지질학과
대구직할시 북구 산격동
702-701
TEL : (053)950-5357
FAX : (053)957-0431