

개선된 ARMA FTF 알고리즘을 이용한 ECG 신호의 스펙트럼 해석

남현도* · 안동준* · 이철희**

=Abstract=

Spectral Analysis of the ECG Using the Improved ARMA FTF Algorithm

H. D. Nam*, D. J. Ahn*, C. H. Lee**

High resolution spectral analysis is essential for ECG analysis. The fast Fourier transform has been widely used for frequency analysis of ECG signals but this procedure provides poor resolution when the data record is short and shows Gibb's phenomena.

The ARMA FTF(Fast Transversal Filter) algorithm is used for high resolution spectral analysis. The reason of unstability of this algorithm is investigated and the method for improving the numerical stability is proposed.

The proposed algorithm is applied to spectral analysis of the ECG. Since this result has less variations than the FFT based results, it can be used for the computerized diagnosis of the ECG.

Key words : Spectral analysis, ARMA FTF Algorithm, ECG, Fast algorithm

서 론

ECG 신호를 이용한 진단을 위해서는 기록된 ECG 신호에 대한 패턴 분류를 위한 특징 추출, QRS duration 및 특성, R-R interval 해석 등의 특성해석이 필요하다. 이러한 해석을 위해서는 시간영역의 해석과 아울러 주파수 영역의 해석이 필요하다¹⁾.

주파수 영역의 해석에서는 주기성, 주파수 영역에서의 신호의 진폭 및 위상 특성 그리고 에너지 분포 특성 등을 주로 분석하게 되는데 종래에는 주로 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용한 방법들이 많이 사용되었으나 FFT는 분해능이 데이터의 수에 의존하고 Gibb의 현상을 보이

며 또한 신호에 대한 직접 연산 처리이므로 생체특성 해석에는 한계성을 띄게 되어 시계열 해석법을 이용한 계수적 스펙트럼 추정법에 대한 연구가 필요하게 되었다²⁾.

계수적 방식은, 관측 데이터와의 사전 정보가 주어질 경우 데이터를 발생시키는 시스템에 근사한 모형화가 가능하다는 사실에 근거하여 관측 데이터를 이용하여 시스템의 모델 계수를 추정함으로써 스펙트럼을 추정하는 방식으로, 신호의 모형화에는 선형 회귀 모델인 시계열 모델이 많이 사용된다. 계수적 스펙트럼의 추정은 Least Squares (LS) 알고리즘이나 Least Mean Square(LMS) 알고리즘들을 이용하여 추정할 수 있는데 LS 기법은 정확하기는 하나 계산량이 많아 실시간 추정이 힘들고 LMS 알고리즘은 수

* 단국대학교 전기공학과

* Dept. of Electrical Eng., Dankook University

** 강원대학교 전기공학과

** Dept. of Electrical Eng., Kangwon University

† 본 연구는 한국과학재단 목적 기초 연구(과제번호:91-01-00-04)의 지원으로 이루어졌음.

통신저자: 남현도, (140-210) 서울시 용산구 한남동 산 8번지, Tel. (02) 709-2574, Fax. (02) 790-3089

렴성에 문제가 있으므로 최근에 이동불변 특성을 이용하여 연산량을 LMS와 마찬가지로 모델 차수 차원으로 줄인 고속 LS 알고리즘이 transversal 필터 또는 격자 필터의 형태로 제안됨으로써 실제 문제에 대한 LS 알고리즘의 사용이 용이해졌다.

고속 transversal 필터 (FTF)는 AR모델의 경우 fast Kalman algorithm, FAEST (Fast A posteriori Error Sequential Techniques) 등 다양한 형태로 구현되었으며, 최근에는 ARMA 모델의 경우에 대해서도 Extended Least Squares (ELS)를 FTF로 구현한 ARMA FTF 알고리즘이 발표되었다^{3, 4)}. 그러나 이들 FTF 알고리즘들은 알고리즘의 형태나, 테이타의 특성 등과는 무관하게 장기 동작 (long run) 시 유한 어장 (finite word length) 효과로 인한 round-off 오차의 누적으로 인한 수리적 불안정성의 경향을 보이는 등의 문제점이 있어 FTF의 사용에 제약 요소가 되고 있다. 최근에 이러한 수리적 불안정성의 분석과 개선에 관한 연구들이 발표되고 있다⁵⁾.

본 연구에서는 최근에 제안하였던 ARMA FTF의 수리적 불안정성을 규명하고 그 개선책을 제시하였으며 이를 ECG 신호에 적용하여 좋은 결과를 얻었다.

ARMA 모형화 기법

주어진 신호와 $y(t)$ 는 다음과 같은 ARMA (p, q) 모델로 표현될 수 있다.

$$y(t) = -\sum_{i=1}^p a_i y(t-i) + \sum_{j=0}^q b_j w(t-j) \quad (1)$$

여기서 $b_0=1$ 이고 $\{w(\cdot)\}$ 는 $N(0, 1)$ 인 백색 잡음 프로세스이다.

적용 알고리즘들을 이용해서 ARMA 계수를 구한 다음 이를 이용해 스펙트럼을 계산하면 다음과 같다⁶⁾.

$$S(w) = \frac{B(z) B(z^*)}{A(z) A(z^*)}, \quad z = e^{jw} \quad (2)$$

여기서

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p} \quad (3)$$

$$B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q} \quad (4)$$

ARMA FTF 알고리즘

신호가 ARMA 모델로 모형화 될 경우, ARMA 계수 추정 과정의 비선형성을 피하기 위해 시간 t-1까지의 백색잡음 시퀀스를 안다고 가정하면

$$y(t) = -\phi'(t)\theta + w(t) \quad (5)$$

$$\text{여기서 } \phi(t) = [y(t-1) \dots y(t-p) \ w(t-1) \dots w(t-q)]' \quad (6)$$

$$\theta(t) = [a_1 \dots a_p \ -b_1 \dots -b_q]' \quad (7)$$

이 경우 ARMA 계수를 추정하는 문제는 다음과 같은 오차 파워를 최소화하는 LS 문제로 변환된다.

$$J(t) = \sum_{k=0}^t [y(k) - \phi'(k)\theta(k)]^2 \quad (8)$$

이와 같이 $w(t)$ 의 값을 $w(t) = y(t) - \phi(t)\theta(t)$ 로 대체한 뒤 순환 최소자승법 (Recursive Least Squares; RLS) 알고리즘으로 ARMA 계수를 추정하는 것이 ELS이다. 따라서 RLS에서와 마찬가지로 다음과 같이 정의되는 Kalman gain의 시갱신이 계수추정의 핵을 이루고 있다.

$$g^*(t) = -\phi'(t+1) \quad (9)$$

$$R(t) = \sum_{i=0}^t \phi(i)\phi'(i) \quad (10)$$

그런데 ARMA 모델의 경우, 이동불변 특성이 상관함수 행렬의 소블록별로 만족함으로 새로이 $xf(t) = [y(t) \ w(t)]'$ 와 $xb(t) = [y(t-p) \ w(t-q)]'$ 에 대해 다음과 같이 FLP (Forward Linear Predictor)와 BLP (Backward Linear Predictor)를 구성하고 이로부터 Kalman gain을 갱신한 것이 ARMA FTF이다.

$$\text{FLP: } e(t) = x_f(t) - x_f(t) = A(t) J_a \phi_c(t) \quad (11)$$

$$\text{BLP: } r(t) = x_b(t) - x_b(t) = B(t) J_b \phi_c(t) \quad (12)$$

여기서 $\phi_c(t) = [y(t) \dots y(t-p) \ w(t) \dots w(t-q)]'$ 이고 J_a 와 J_b 는 각각 다음과 같은 순열 행렬이다.

Table 1. ARMA FTF Algorithm

표 1. ARMA FTF 알고리즘

$$\begin{aligned}
 e^o(t) &= A(t-1)J_e e(t) \\
 e(t) &= e^o(t)\gamma(t-1) \\
 \alpha(t) &= \alpha(t-1) + e^o(t)e'(t) \\
 \gamma_e(t) &= \gamma(t-1) - e'(t)\alpha^{-1}(t)e(t) \\
 g_e(t) &= [0 \ 0 \ g(t-1)] - e^o(t)\alpha^{-1}(t-1)A(t-1) \\
 g_e(t) &= g_e(t)J_e J_e' \\
 \mu(t) &= [g_e(t)]^{N+1, N+2} \\
 \theta(t) &= [A(t)]_{1st \ row} \\
 r^o(t) &= -\beta(t-1)\mu(t) \\
 \gamma(t) &= \gamma_e(t) / [1 + \mu(t)r^o(t)\gamma_e(t)] \\
 r(t) &= r^o(t)\gamma(t) \\
 \beta(t) &= \beta(t-1) + r^o(t)r'(t) \\
 [g(t) \ 0 \ 0] &= g_e(t) - \mu(t)B(t-1) \\
 B(t) &= B(t-1) + r(t)[g(t) \ 0 \ 0]
 \end{aligned}$$

$$J_e \phi_e(t) = [y(t) \ w(t) \ y(t-1) \ \dots \ y(t-p) \ w(t-1) \ \dots \ w(t-q)]' \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 J_e \phi_e(t) &= [y(t) \ \cdot \ y(t-p+1) \ w(t) \ \cdot \ w(t+q+1) \\
 &\quad y(t-p) \ w(t-q)]' \quad (14)
 \end{aligned}$$

그런데 다음과 같이 정의되는 dual Kalman gain 을 사용하면 계산량을 더 줄일 수 있으며, 사영 연산자를 이용한 기하적인 접근 방식으로 유도된 ARMA 전치 윈도우형 FTF 알고리즘이 <표 1>에 정리되어 있다.

$$g(t) = \phi'(t+1)R^{-1}(t) \quad (15)$$

ARMA FTF 알고리즘은 $10N(N=p+q)$ 에 비례하는 연산량을 필요로 한다.

수리적 오차의 전파와 불안정성

<표 1>의 ARMA FTF 알고리즘은 AR 모델 또는 FIR 필터링 경우의 FTF들과 마찬가지로 장기동작시 유한 어장 효과로 인한 round-off 오차에 의해 수리적 불안정성을 나타냄으로 실제 경우에 사용할 때 문제가 된다. 그러므로 수리적 오차의 누적에 관한 원인과 관련된 필터변수를 알아내기 위해 수리적 오차의 전파 메카니즘을 분석해야 한다.

순환 시갱신되는 필터 변수들을 다음과 같이 상태공간 모델로 표현할 수 있다.

$$Z(t) = f(Z(t-1), \phi_e(t)) \quad (16)$$

여기서 $Z = [A_1 \ A_2 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ g \ r \ B_1 \ B_2 \ \beta_1 \ \beta_2]'$ 이며, 이때 아래 첨자는 행렬의 행을 표시한다.

Finite precision 에 의한 필터변수의 값 Z와 infinite precision 에 의한 Z의 차이를 ΔZ 라고 하면, 다음과 같은 선형화된 오차 시스템 모델을 얻을 수 있다.

$$\Delta Z(t) = F(t)\Delta Z(t-1) + V(t) \quad (17)$$

여기서 $F(t) = \nabla_z f(Z(t-1), \phi_e(t))|_{Z=Z(t-1)}$ 이며, $V(t)$ 는 round-off 오차이다.

오차 전파의 해석은 알고리즘이 수렴하여 정상상태에 있으며, $R(t)$ 가 지속 여기 조건을 만족한다는 가정하에 이루어지는데 일반적으로 각 성분들이 복잡하게 얽혀 있고, 신호에 종속적이므로 해석이 까다롭다.

선형화된 오차 시스템 모델에서 $F(t)$ 의 BLP변수와 관련이 있는 대각성분인 $F_{33}(t)$ 가 다음과 같이 주어진다.

$$F_{33}(t) = \begin{bmatrix} (I-r(t)\mu(t))_{11} & I_N(I-r(t)\mu(t))_{12}I_N \\ (I-r(t)\mu(t))_{21} & I_N(I-r(t)\mu(t))_{22}I_N \\ & \begin{bmatrix} (I-r(t)\mu(t))_{11} \\ (I-r(t)\mu(t))_{22} \end{bmatrix} & [1 \ 1] \end{bmatrix} \quad (18)$$

1차 근사화에 의한 해석 결과는 FTF의 수리적 불안정성이 주로 BLP 변수들의 수리적 불안정성에 의한 것임을 보여주며, 이는 시뮬레이션에 의한 관찰과도 일치한다. BLP 변수들의 수리적 불안정성은 기본적으로 다음의 사전 후향 예측 오차(a priori backward prediction error) 계산식에 기인한다.

$$r^o(t) = -\beta(t-1)[g_e(t)]^{N+1, N+2} = -\beta(t-1)\mu(t) \quad (19)$$

따라서 이에 의한 수리적 오차의 누적에 대한 대책으로 사전 후향 예측 오차를 매 순환 스텝마다 두 가지 방식으로 계산하여 그 차이를 이용하여 수리적 오차의 보정을 꾀할 수 있다. 이때 사전 후향 예측 오차를 계산하는 다른 하나의 식은 사전 후향 예측 오차의 정의를 사용하는 것으로서 다음과 같이 주어진다.

$$r_o(t) = B(t-1)J_e \phi_e(t) \quad (20)$$

그러면 (19)과 (20)의 차이는 다음과 같이 주어진다.

$$\delta r(t) = B(t-1)J_e \phi_e(t) + \beta(t-1)\mu(t) \quad (21)$$

Table 2. Numerically Stable ARMA FTF Algorithm
표 2. 개선된 ARMA FTF 알고리즘

$$\begin{aligned}
 e^o(t) &= A(t-1)J_i \phi_e(t) \\
 r^o(t) &= B(t-1)J_b \phi_e(t) \\
 e(t) &= e^o(t)\gamma(t-1) \\
 \alpha(t) &= \alpha(t-1) + e^o(t)e'(t) \\
 \gamma_e(t) &= \gamma(t-1) - e'(t)\alpha^{-1}(t)e(t) \\
 g_e(t) &= [0 \ 0 \ g(t-1)] - e^{o'}(t)\alpha^{-1}(t-1)A(t-1) \\
 g_e(t) &= g_e(t)J_f J_b' \\
 \mu(t) &= [g_e(t)]^{N+1, N+2} \\
 A(t) &= A(t-1) + e(t)[0 \ 0 \ g(t-1)] \\
 \theta(t) &= [A(t)]_{1st \ row} \\
 \delta_r(t) &= r^o(t) + \beta(t-1)\mu(t) \\
 r^o(t)_B &= r^o(t) + \rho_B \delta_r(t) \\
 r^o(t)_\gamma &= r^o(t) + \rho_\gamma \delta_r(t) \\
 r^o(t)_\beta &= r^o(t) + \rho_\beta \delta_r(t) \\
 \gamma(t) &= \gamma_e(t) / [1 + \mu(t)r^o(t)_\gamma \gamma_e(t)] \\
 \beta(t) &= \beta(t-1) + r^o(t)_\beta r^o(t)_\beta \gamma(t) \\
 [g(t) \ 0 \ 0] &= g_e(t) - \mu(t)B(t-1) \\
 B(t) &= B(t-1) + r^o(t)_B \gamma(t)[g(t) \ 0 \ 0]
 \end{aligned}$$

식 (21)을 사용하여 $r^o(t)$ 의 값을 필요로 하는 필터 변수 $r_N(t)$, $B(t)$, $\beta(t)$ 의 계산에 다음과 같이 보정된 $r^o(t)$ 를 사용한다.

$$r_o(t)_i = B(t-1)J_b \phi_e(t) + \rho_i \delta_r(t); [i = \gamma, B, \beta] \quad (22)$$

여기서 ρ 는 제어상수로서 신호의 특성에 따라 적절히 선정한다.

식 (21)을 사용하여 식 (19)의 사전 후향 예측 오차를 보정하면 식 (22)와 같이 되는데 이와 같은 방법을 사용하여 수리적 안정성을 개선한 ARMA FTF 알고리즘이 <표 2>에 주어져 있다. 개선된 ARMA FTF 알고리즘은 $12N$ 에 비례하는 연산량을 필요로 함으로 계산량의 작은 추가 부담($2N$)으로 수리적 안정성을 개선할 수 있다.

ECG 신호의 스펙트럼 추정

<그림 1>의 ECG 신호에 대한 스펙트럼을 FFT와 계수적 방법을 이용해서 추정했다. 1024 개의 데이터에 대한 FFT 스펙트럼이 <그림 2>에 나타나 있으며 1000개의 데이터에 대한 ARMA(10,2) 모델을 이용해서 추정한 스펙트럼을 <그림 3>에 보였다.

그림에서 보듯이 FFT의 경우와 유사한 결과를 보였으나 이 방법은 FFT와 달리 데이터의 수가 2의 정수승이 될

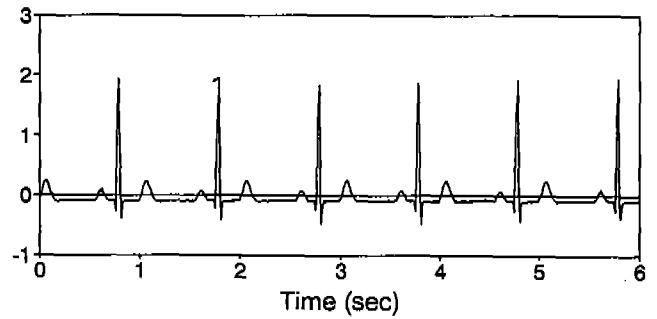


그림 1. ECG 신호
Fig. 1. ECG Signal

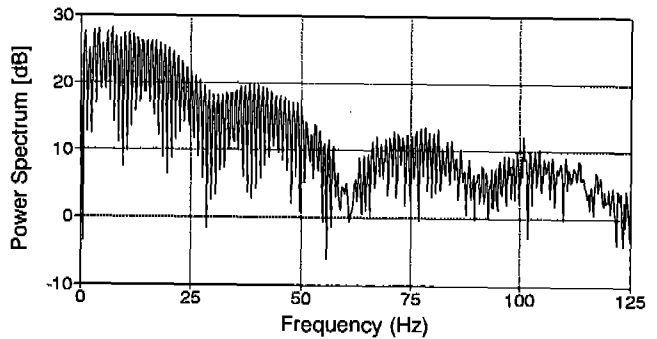


그림 2. 1024 point FFT를 이용한 ECG 스펙트럼
Fig. 2. ECG Spectrum using 1024 point FFT

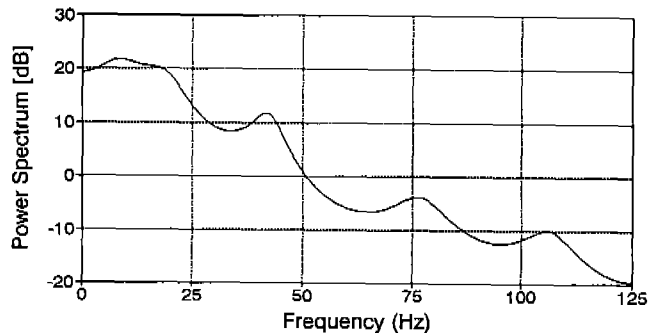


그림 3. ARMA(10, 2) 모델을 사용한 ECG 스펙트럼
Fig. 3. ECG Spectrum using ARMA(10, 2) Model

필요가 없으며 스펙트럼 분해능(resolution)이 데이터의 수에 관계가 없어 데이터 수가 적을때 FFT에 비해 유리하며 참고문헌 [1]에서 사용한 최소자승법에 근거한 방법들 보다 계산량이 작아 실시간 추정에 유리하다.

결 론

본 논문에서는 ARMA FTF의 수리적 불안정성을 야기하는 수리적 오차의 전파 메카니즘을 1차 상태공간 모델을 이용하여 분석하고, 수리적 안정성을 개선할 수 있는 변형된 알고리즘을 제시하였으며 이를 이용한 ECG 신호의 스펙트럼 추정 결과를 보였다. 제안된 알고리즘은 수리적 안정성이 상당히 보장됨으로 실제 문제에 보다 유용할 것으로 기대된다.

FFT가 block processing인데 반해 계수적 방법은 on-line processing이므로 ECG 신호가 non-stationary process인 점을 고려하면 계수적 방법이 더 유리하리라 생각된다. FFT를 이용한 방법이 스펙트럼 추정치의 굴곡이 심해 스펙트럼의 peak나 골을 찾을 때 컴퓨터를 이용한 방법을 사용하기에 어려움이 많을 것으로 생각되나 계수적 방법은 이 경우 더욱 효과적이라 생각된다.

지금까지 연구결과로는 ARMA 모델을 사용한 경우에

차수는 AR 차수가 10~20정도, MA 차수는 2~4정도면 충분하리라 생각되나 이에 대해서는 앞으로 더 연구가 필요하리라 생각된다.

참 고 문 헌

1. R. Maniewski, M. Kohutnicki, P. Lewandowski, A. Liebert and T. Palko, "Frequency analysis of high resolution ECG using autoregression method", Proc. 14th Int. Conf. IEEE EMBS, pp. 504-505, 1992
2. S. L. Marple, *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, 1987
3. S. H. Ardalan and L. J. Faber, "A Fast ARMA Transversal RLS Filter Algorithm", IEEE Tr. Acoust. Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-36, pp. 349-358, 1988
4. J. L. Botto and G. V. Moustakides, "Stabilization of Fast Kalman Algorithms", IEEE Tr. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-37, pp. 1342-1348, 1989
5. 이철희, 남현도, "ARMA 고속 transversal 필터의 수리적 안정성 개선", KACC 논문집, pp. 923-926, 1992
6. S. M. Kay and S. L. Marple, Jr., "Spectrum analysis-A modern perspective", Proc. IEEE, Vol. 69, pp. 1380-1419, 1981

=국문초록=

ECG 신호 해석을 위해서는 고해상도 스펙트럼 해석이 필수적이다. ECG 신호의 주파수 해석을 위하여 많이 사용되고 있는 FFT(Fast Fourier Transform)는 데이터 수가 적을 때는 해상도가 나쁘고 Gibb의 현상을 보인다.

ARMA 모델을 이용한 고해상도 스펙트럼 해석을 위하여 ARMA FTF(Fast Transversal Filter) 알고리즘을 사용하였으며 ARMA FTF 알고리즘의 불안정의 원인을 분석하고 이의 개선책을 제시하였다.

제안된 알고리즘을 사용하여 ECG 신호의 스펙트럼 해석에 적용하여 좋은 결과를 얻었다. 본 연구의 결과는 FFT를 사용한 결과보다 굴곡이 작아 컴퓨터를 이용한 진단에 유용하게 사용될 수 있으리라 생각된다.