

(論 文)

비고전적 감쇠시스템에서 주파수분리의 모드연관에 대한 영향

김정수* · 최기흥** · 최기상***

(1993년 7월 5일 접수)

Influence of Frequency Separation on Modal Coupling in Nonclassically Damped Systems

Jung Soo Kim, Gi Heung Choi and Gi Sang Choi

Key Words: Nonclassically Damped System(비고전적 감쇠시스템), Frequency Separation(주파수분리), Modal Coupling(모드연관)

Abstract

The normal coordinates of a nonclassically damped systems are coupled by nonzero off-diagonal elements of modal damping matrix. The relationship between modal coupling and the frequency separation of the natural modes is presented in this paper. Contrary to widely accepted beliefs, increasing the frequency separation of the natural modes does not necessarily diminish the effect of modal coupling. Consequently, in the practical engineering applications, wide frequency separation of the natural modes would not be sufficient for neglecting modal coupling.

1. 서 론

외부에서의 입력에 의해 여기되고, n 개의 자유도를 갖는 수동시스템(passive system)의 운동방정식은 M 이 질량행렬, C 가 감쇠행렬, K 가 강성행렬일 때 다음과 같이 쓰일 수 있으며, M, C 그리고 K 는 각각 실수 대칭행렬으로서 양의 한정(positive definite)이다.

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx &= g(t) \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \\ t &\geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

U 를 고유치(eigenvalue)가 $\omega_i^2 (> 0)$ 이고, 고유벡터(eigenvector)가 $u^{(i)} (i=1, \dots, n)$ 인 다음과 같은

대칭 고유치 문제(eigenvalue problem)의 고유벡터로 구성된 시스템(1)의 $n \times n$ 모드행렬이라고 하자.

$$Ku^{(i)} = \omega_i^2 Mu^{(i)} \quad (2)$$

모드행렬은 $U^T M U = I$ 라는 관계를 만족하도록 직교정규화(orthonormalization) 될 수 있다. 이 때 $U^T K U = \Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$ 이며, 선형변환 $x(t) = Uq(t)$ 에 의해 식(1)은 $D = U^T C U, f(t) = U^T g(t)$ 이고 $q(t)$ 가 n 차원의 모드좌표벡터(mode coordinate vector)일 때 다음과 같은 정규형(normal form)으로 쓰일 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{q} + D\dot{q} + \Omega q &= f(t) \\ q(0) &= U^T M x_0 \\ \dot{q}(0) &= U^T M \dot{x}_0 \\ t &\geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

대칭행렬(symmetric matrix) D 는 모드감쇠행렬(mode damping matrix)이라 불리고 이것이 대각

*금성산전연구소

**고등기술연구원

***정회원, 서울시립대학교 제어계측공학과

선행렬(diagonal matrix)인 경우 시스템은 고전적 감쇠시스템(classically damped system)이라 불린다. 반면에 D 가 비대각선행렬(nondiagonal matrix)이고 정규화된 운동방정식이 D 의 비대각선 성분에 의해 연관된 시스템이 비고전적 감쇠시스템(non-classically damped system)이다.

그 동안 비고전적 감쇠시스템의 정확한 해와 근사해를 구하는 여러 방법들이 제안되어 왔다. 예를 들면 Foss(1958)는 복소고유벡터들 사이의 직교성(orthogonality)에 기초한 상태공간방법을 제안하였다. 그러나 이 방법은 많은 계산을 요하고 여러 다른 요소들의 물리적 중요성을 잘 설명하지 못한다는 문제점이 있다. 비고전적 감쇠시스템의 근사해를 교란(perturbation)법에 의해 구하는 것은 Cronin(1976) 그리고 Chung과 Lee(1986)에 의해 제안된 바 있다. Prater와 Singh(1986), 또 Nair와 Singh(1986)은 이산 진동시스템에서 비고전적 감쇠의 정도를 정량적으로 결정하기 위한 여러 지수들을 개발하였다. Ozguven(1982, 1987)은 receptance의 개념을 사용하여 비고전적 감쇠구조를 주파수 영역에서 연구하였으며, Bellos와 Inman(1990)은 비비례계수(nonproportionality index)들을 이용하여 선형시스템에서의 모드연관을 연구하였다. 비고전적 감쇠시스템을 해석하는 여러가지 방법들은 Bellos와 Inman(1989)에 의해 정리된 바 있다.

가장 광범위하게 사용되는 선형 비고전적 감쇠시스템을 해석하는 방법은 모드감쇠행렬의 비대각선 성분을 무시하는 비연관화 근사이다. 그러나 비연관화 근사는 모드연관이 무시될 수 있는 경우에만 유효하다. 모드연관을 무시할 수 있는 조건이 Hasselmann(1976)에 의해 제안된 바 있으며 이는 고유모드 사이에 적당한 주파수분리를 필요로 한다. Warburton과 Soni(1977)도 비슷한 제안을 한 바 있다. 오랫동안 고유모드의 주파수 분리가 비연관화 근사의 충분조건으로 인식되어 왔다.

본 논문은 하도닉 입력에 의해 여기되는 선형 비고전적 감쇠시스템의 모드연관을 규명하고자 한다. 실제 공학적 응용에서 고유모드의 넓은 주파수분리가 때로는 모드연관의 주요한 효과들을 억제하는데 충분하지 않다는 것을 보인다. 2절에서는 모드연관에 관한 해석을 하며 연관계수(coupling coefficient)와 연관지수(coupling index)가 도입되고 그 기본적인 성질에 대해 논의하며, 3절에서는 주파수

분리에 대해 논의한다. 구체적으로 도드연관의 고유진동수와 입력주파수에 대한 함수관계를 유도하고, 특히 2자유도 시스템에 대해서 상세한 해석을 한다. 4절에서는 이러한 이론이 성립함을 보이기 위해 수치해의 예를 보인다.

2. 모드연관

지금까지 여러 종류의 지수들이 비고전적 감쇠의 정도를 정량적으로 설명하기 위해 고안된 바 있다. 그 중 중요한 것으로는 Warburton과 Soni(1977), 또 Bellos와 Inman(1990) 등에 의해 제안된 것들이었다. 그러나 본 연구에서 도입하는 것은 새로운 것으로서 도드연관을 기술하는데 복소해석을 심각하게 이용한다.

조화함수에 의해 여기되는 식(3)의 시스템을 고려한다. 스칼라 $u(t)$ 가 단위 크기의 조화함수라 하고 $a = (f_1, \dots, f_m)^T$ 이고 $f_i (i=1, \dots, n)$ 가 0이 아닌 상수일 때

$$f(t) = au(t) \quad (4)$$

라고 한다. 본 연구에서의 주요 관심사는 정상상태에서의 도드연관 해석이므로 $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ 이라고 가정한다. 식(3)의 시스템의 i 번째 모드에 해당하는 운동방정식은

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + d_{ii}\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij}\dot{q}_j &= f_i u(t) \\ q_i(0) = \dot{q}_i(0) &= 0 \\ t \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

이다.

식(5)에 라플라스변환(Laplace transform)을 취하면 $Q_i(s)$, $Q_j(s)$, $U(s)$ 가 각각 $q_i(t)$, $q_j(t)$, $u(t)$ 의 라플라스변환일 때 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \left[s^2 - \left(d_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} \frac{Q_j(s)}{Q_i(s)} \right) s + \omega_i^2 \right] Q_i(s) \\ = f_i U(s) \end{aligned} \quad (6)$$

i 번째 비비례계수(nonproportionality factor), $\Delta_i(s)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta_i(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} \frac{Q_j(s)}{Q_i(s)} \quad (7)$$

만약 고전적 감쇠시스템이라면 $\Delta_i(s)$ 는 0이 된다. 또한 $\Delta_i(s)$ 는 각각의 $Q_k(s)$ 가 $U(s)$ 에 따라 변하

지만 입력 $U(s)$ 에 무관하다. 이 점을 보이기 위하여 $Q_i(s)$ 가 $q(t)$ 의 라플라스변환일 때 식(3)을 다음과 같이 변환한다.

$$(Is^2 + Ds + \Omega^2) Q_i(s) = aU(s) \quad (8)$$

그러면

$$Q_i(s) = (Is^2 + Ds + \Omega^2)^{-1} aU(s) \quad (9)$$

이다. $g_i(s)$ 가 열벡터 $(Is^2 + Ds + \Omega^2)^{-1}a$ 의 i 번째 요소라 한다. 그러면 $g_i(s)$ 는 시스템 파라미터 a 에만 관련되고 $U(s)$ 에는 무관하다.

$$Q_i(s) = g_i(s) U(s) \quad (10)$$

이므로

$$\frac{Q_j(s)}{Q_i(s)} = \frac{g_j(s)}{g_i(s)} \quad (11)$$

이고, 이는 $Q_j(s)/Q_i(s)$ 가 $U(s)$ 에 무관함을 보인다. 식(7)에서 $\Delta_i(s)$ 는 $U(s)$ 에 무관하다. 다시 말해서 비비례계수 $\Delta_i(s)$ 는 $u(t)$ 의 함수형태 변화에 영향받지 않는다.

모드연관의 효과를 나타내는 척도로 비비례계수를 쓸 수 있으나, 비비례계수는 모드연관의 시스템 응답에 대한 영향을 나타내는 직접적인 척도가 될 수는 없다. 즉, 비비례계수가 크다는 것만으로 시스템응답에 대한 모드연관의 영향이 크게 되지 않는다. 모드연관효과에 관한 더 실질적인 척도를 구하기 위하여 다음의 식을 제시한다.

$$Q_i(s) = \left(\frac{f_i}{s^2 + (d_{ii} + \Delta_i(s))s + \omega_i^2} \right) U(s) \quad (12)$$

위의 식을 식(6)에 대입하고 정리하면, $\Delta_i(s)$ 가 $U(s)$ 에 무관할 때 다음과 같은 식을 얻는다.

$$Q_i(s) = \frac{1}{s^2 + d_{ii}s + \omega_i^2} \left(f_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{sf_j}{d_{ij}s^2 - (d_{jj} + \Delta_j(s))s + \omega_j^2} \right) U(s) \quad (13)$$

$\Delta_j(s)$ 가 $U(s)$ 에 무관하므로 위의 식을 $U(s)$ 로 나누는 것을 모드응답 $Q_i(s)$ 에 대한 전달함수로 볼 수 있다.

$i \neq j (i, j=1, \dots, n)$ 일 때 오차계수를 다음과 같이 정의한다.

$$\gamma_{ij}(s) = -d_{ij} \frac{sf_j}{s^2 + (d_{jj} + \Delta_j(s))s + \omega_j^2} \quad (14)$$

또한 i 번째 모드응답에 관련한 연관지수 $\Gamma_i(s)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Gamma_i(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_{ij}(s) \quad (15)$$

연관계수, $\gamma_{ij}(s)$ 는 i 번째 모드응답의 j 번째 모드응답에 대한 연관효과를 측정하며 이 계수는 복소수이다. 연관지수 $\Gamma_i(s)$ 는 복소수 평면에서 $n-1$ 개의 연관계수의 벡터합이며 고전적 감쇠시스템인 경우 연관지수 $\Gamma_i(s)$ 는 0이 되어야 한다. 또한 식(13)로부터 $\Gamma_i(s)$ 는 모드전달함수에서 비고전적 감쇠를 설명하는 보정계수로 간주할 수 있다. 연관지수 $\Gamma_i(s)$ 가 크다는 것은 i 번째 모드응답에 대한 큰 영향을 의미한다.

3. 주파수분리

많은 연구자들이 하모닉 입력을 사용하여 고유모드 사이의 적당한 주파수분리가 모드연관을 무시하기 위한 충분조건임을 제안한 바 있다. 본 논문에서 주파수영역에서의 해석을 통해 모드 사이의 주파수분리가 아니라 입력주파수와 고유모드 사이의 주파수분리가 모드연관의 정도를 주로 결정한다는 것을 보일 것이다.

모드연관은 J 가 $\sqrt{-1}$ 이고 ω_f 가 입력주파수일 때 연관지수 $\Gamma_i(s)$ 에 의해 측정될 수 있다. $\Gamma_i(j\omega_f)$ 의 ω_f 와 고유주파수 $\omega_j (j=1, \dots, n)$ 에 대한 함수관계는 우선 연관계수 $\gamma_{ij}(\omega_f)$ 와 이 주파수들에 대한 함수관계를 연구함으로써 규명될 수 있다. 이제 $\alpha_i = \text{Re}[\Delta_i(j\omega_f)]$, $\beta_i = \text{Im}[\Delta_i(j\omega_f)]$ 라 하면 식(4)와 같은 하모닉 입력에 대하여 i 번째 모드응답 $Q_i(j\omega_f)$ 의 입력에 대한 크기와 위상각은 식(13)으로부터 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$|Q_i| = \frac{|f_i|}{((\omega_i^2 - \omega_f^2 - \beta_i \omega_f)^2 + (d_{ii} + \alpha_i)^2 \omega_f^2)^{1/2}} \quad (16)$$

$$\arg(Q_i) = -\tan^{-1} \frac{(d_{ii} + \alpha_i) \omega_f}{(\omega_i^2 - \omega_f^2 - \beta_i \omega_f)} - \frac{1}{2} (1 - \text{sgn}(f_i)) \pi \quad (17)$$

$\arg(Q_i)$ 가 f_i 의 부호에 따라 두가지의 다른 값을 갖지만 이 두 값들은 복소수 평면에서 같은 직선에 해당한다. 식(14)로부터 연관계수의 크기 $|\gamma_{ij}|$ 와 편각 $\arg(\gamma_{ij})$ 는 $i \neq j (i, j=1, \dots, n)$ 일 때 다음과 같이 구해진다.

$$|\gamma_{ij}| = \frac{d_{ij} f_j \omega_f}{((\omega_j^2 - \omega_f^2 - \beta_j \omega_f)^2 + (d_{jj} - \alpha_j)^2 \omega_f^2)^{1/2}} \quad (18)$$

$$\arg(\gamma_{ij}) = \arg(Q_j) - \operatorname{sgn}(d_{ij}) \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

위의 식에서 $\omega_j^2 - \omega_i^2$ 항은 모드연관이 고유주파수와 입력주파수 간의 분리에 큰 영향을 받음을 보이고 있다. 이제 문제를 간단히 하기 위하여 2자유도 시스템에 국한하여 문제를 고려한다. 2자유도 시스템은 단지 2모드만 있기 때문에 연관계수는 바로 연관지수와 같다. 즉, $i \neq j (i, j=1, 2)$ 에 대하여

$$\gamma_{ij}(j\omega_f) = \Gamma_i(j\omega_f) \quad (20)$$

이다. 따라서 $|\Gamma_i|$ 도 식(18)에 의해 주어진다. 또한 식(7)로부터 $i \neq j (i, j=1, 2)$ 에 대하여

$$\arg(\Delta_i) = \arg(Q_j) - \arg(Q_i) - \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn}(d_{ij}))\pi \quad (21)$$

이다. 다음과 같이 서로 다른 4 경우를 고려한다.

(1) $\omega_f \ll \omega_1 \ll \omega_2$ 혹은 $\omega_1 \ll \omega_f \ll \omega_2$ 혹은 $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \omega_f$

이는 고유주파수와 입력주파수가 모두 잘 분리된 경우에 해당한다. 식(18)로부터

$$|\Gamma_1| = \frac{|d_{12}f_2|}{[(\omega_2 - \omega_f)(1 + (\omega_2/\omega_f)) - \beta_2]^2 + (d_{22} + \alpha_2)^2}^{1/2} \quad (22)$$

$$|\Gamma_2| = \frac{|d_{21}f_1|}{[(\omega_1 - \omega_f)(1 + (\omega_1/\omega_f)) - \beta_1]^2 + (d_{11} + \alpha_1)^2}^{1/2} \quad (23)$$

이고, 따라서, $|\beta_i|$ 가 커지지 않는다는 조건하에서 $|\omega_i - \omega_f| (i=1, 2)$ 이 크다면 $|\Gamma_1|$ 와 $|\Gamma_2|$ 는 작게 된다. 여기서, $|\beta_i|$ 가 작다는 것은 주파수영역에서 두 모드는 잘 구분되고 또 공진으로부터 멀리 떨어져 있다는 것을 의미한다. 그러면 또한 위상각은 0 혹은 π 에 가깝게 된다. 그러면 식(21)에 의해 $\arg(\Delta_i) \approx 0$ 혹은 $-\pi$ 이다. 이는 비비례계수 Δ_i 의 허수부가 매우 작다는 것을 의미한다. 즉, $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 0$ 이다. 입력과 고유모드 사이에 적당한 주파수 분리가 있을 때 각 연관지수가 작으며 따라서 모드연관도 작다고 할 수 있다.

(2) $\omega_f \approx \omega_1 \approx \omega_2$

두 모드가 모두 공진에 가까운 경우를 고려한다. 이때 위상각은 $-\pi/2$ 에 가깝다. ($\arg(Q_1) \approx \arg(Q_2) \approx -\pi/2$) 식(21)로부터 $\arg(\Delta_i) \approx 0$ 혹은 $-\pi$ 이며, 이는 $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 0$ 임을 의미한다. 따라서 연관지수의 크기는

$$|\Gamma_1| \approx \frac{|d_{12}f_2|}{d_{22} + \alpha_2} \quad (24)$$

$$|\Gamma_2| \approx \frac{|d_{21}f_1|}{d_{11} + \alpha_1} \quad (25)$$

이다. 위의 식에서 d_{11} 와 d_{22} 는 감쇠행렬이 양의 한정(positive definite)이므로 양수이어야 한다. 또한 $\alpha_1 \approx \Delta_1$ 이고 $\alpha_2 \approx \Delta_2$ 이다. 만약 α_1 과 α_2 가 양이라면 비비례계수가 증가함에 따라 연관지수의 크기도 감소한다. 따라서 비비례계수 Δ_i 는 모드연관의 진정한 척도가 될 수 없다. 위의 4절의 예에서 볼 수 있는 것처럼 주파수들이 서로 모여있을 때 $|\Gamma_1|$ 과 $|\Gamma_2|$ 는 더 크게 되고 따라서 모드연관도 더 커진다.

(3) $\omega_f \gg \omega_1 \approx \omega_2$ 혹은 $\omega_f \ll \omega_1 \approx \omega_2$

두 고유진동수는 모여 있으나 입력주파수로부터는 멀리 떨어져 있는 경우로서 주파수영역에서 두 모드가 서로 가깝고 공진으로부터 멀리 떨어져 있다. (1)에서의 논의를 그대로 적용할 수 있다. 즉, (1)의 경우처럼 $|\omega_i - \omega_f| (i=1, 2)$ 이 크다면 $|\Gamma_1|$ 와 $|\Gamma_2|$ 는 작다. 따라서, ω_f 가 ω_1 와 ω_2 로부터 잘 분리되어 있으면 $\omega_1 \approx \omega_2$ 인 경우에 대해서도 모드연관은 작다.

(4) $\omega_f \approx \omega_1 \ll \omega_2$ 혹은 $\omega_f \approx \omega_2 \gg \omega_1$

이 경우에 두 고유진동수는 서로 분리되어 있으나, 입력주파수는 한 고유진동수와 가깝다. $\omega_f \approx \omega_1$ 이라 하면 첫번째 모드는 공진에 가깝고 $\arg(Q_1) \approx -\pi/2$ 이다. 그러나 두번째 모드는 공진으로부터 멀고 $\arg(Q_2) \approx 0$ 혹은 $-\pi$ 이다. 또한 식(21)에 의해 $\arg(\Delta_1) \approx \pi/2$ 혹은 $-\pi/2$ 이다. 이는 비비례계수 Δ_i 의 실수부가 작다는 것을 의미한다. ($\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 0$) 따라서 연관지수의 크기는

$$|\Gamma_1| = \frac{|d_{12}f_2|}{[(\omega_2 - \omega_f)(1 + (\omega_2/\omega_f)) - \beta_2]^2 - d_{22}^2}^{1/2} \quad (26)$$

$$|\Gamma_2| \approx \frac{|d_{21}f_1|}{(d_{11}^2 + \beta_1^2)^{1/2}} \quad (27)$$

이다. $|\Gamma_2|$ 가 $\omega_2 - \omega_1$ 에 무관하므로 $|\omega_2 - \omega_1|$ 가 큰 경우에도 $|\Gamma_2|$ 는 크게 된다. 따라서, 고유모드 사이의 넓은 주파수분리는 모드연관의 실질적인 효과를 없애지 않는다. $\omega_f \approx \omega_2 \gg \omega_1$ 인 경우에도 똑같은 논의를 적용할 수 있다.

앞의 논의는 모드연관의 가장 중요한 파라미터가 입력주파수의 고유진동수에 대한 상대적 위치이며 고유모드 간의 주파수분리가 아님을 보인다. 이러한 결과는 Ozguven(1987)의 보고와 일치하나, Haselman(1976)의 결과와는 상치된다. 따라서 넓게 분산된 모드들에 대해서 모드연관이 무시할 수 있

다는 것은 맞지 않다. 고유모드 사이의 주파수 분리가 다소 영향을 끼치기는 하지만 (3)과 (4)의 경우는 모드연관의 정도를 주로 결정하는 것은 모드 사이의 분리가 아니라 입력과 고유모드 사이의 주파수분리임을 명백히 보여주고 있다.

4. 예

$a = (1, 1)^T$ 이고 $D = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.2 \end{pmatrix}$ 일 때 운동방정식이 다음과 같이 나타내지는 자유도가 2인 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \ddot{q} + D\dot{q} + \Omega q &= a \sin \omega_f t \\ q(0) = \dot{q}(0) &= 0 \\ t &\geq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

이 시스템의 모드강성행렬은 차례대로 주파수분리가 증가하는 다음의 3 경우와 같다.

$$\text{Case 1. } \Omega = \text{diag}(8.9^2, 9.1^2) = \Omega_1 \quad (29)$$

$$\text{Case 2. } \Omega = \text{diag}(5.5^2, 13.5^2) = \Omega_2 \quad (30)$$

$$\text{Case 3. } \Omega = \text{diag}(2.1^2, 17.1^2) = \Omega_3 \quad (31)$$

Fig. 1과 2에 $|\Gamma_1|$ 과 $|\Gamma_2|$ 가 위의 3 경우에 대하여 입력주파수 ω_f 의 함수로 나타나 있다. 비연관화 근사에 의한 오차의 크기는 $|\Gamma_1|$ 과 $|\Gamma_2|$ 과 같은 경향을 보이므로 이 그림들에서 비연관화 근사에 의한 오차를 추정해 볼 수도 있다. 여기서 연관지수가 분명하게 ω_f 에 좌우됨을 알 수 있다. 두 모드만 있으므로 $|\Gamma_1|$ 은 두번째 모드에 의해 첫번째 모드 응답에 미치는 연관을 나타내며, $|\Gamma_2|$ 는 첫번째 모드에 의해 두번째 모드응답에 미치는 연관을 나타낸다. Fig. 1의 각각의 경우에 대하여 $|\Gamma_1|$ 은 $\omega_f \approx \omega_2$ 일 때 피크 값을 가지며 이는 공진하는 두번째 모드가 연관을 통해 공진하지 않는 첫번째 모드 응답에 큰 영향을 미치기 때문이다. 반면에 $\omega_f \approx \omega_2$ 일 때 $|\Gamma_2|$ 는 Fig. 1과 2를 비교함으로써 알 수 있는 것처럼 $|\Gamma_1|$ 보다 훨씬 작다. 이유는 더 작은 크기의 운동을 하는 첫번째 모드가 공진하는 두번째 모드에 별 영향을 미치지 않기 때문이다. Fig. 2에서 $|\Gamma_2|$ 는 $\omega_f \approx \omega_1$ 일 때 피크치를 보이며, 이는 공진하는 첫번째 모드 때문이다. $|\Gamma_1|$ 과 $|\Gamma_2|$ 는 $|\omega_1 - \omega_f|$ 과 $|\omega_2 - \omega_f|$ 가 증가함에 따라 급격하게 감소한다. 이 세 경우를 비교해 보면 가장 높은 피크는 $\omega_1 \approx \omega_2$ 이라는 부가적인 효과때문에 case 1의 경우에 얻어진다. 그러나 이러한 효과는 부수적인 것이

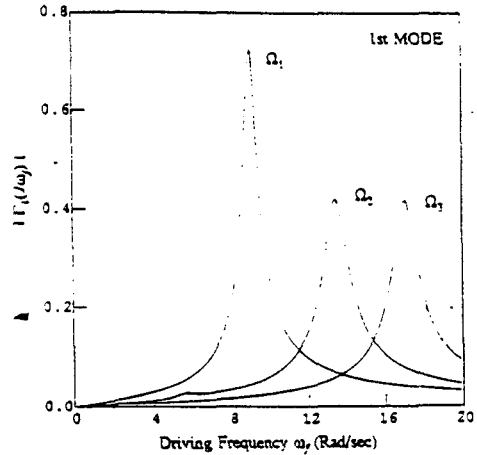


Fig. 1 Amplitudes of $\Gamma_1(j\omega_f)$ corresponding to different natural frequencies

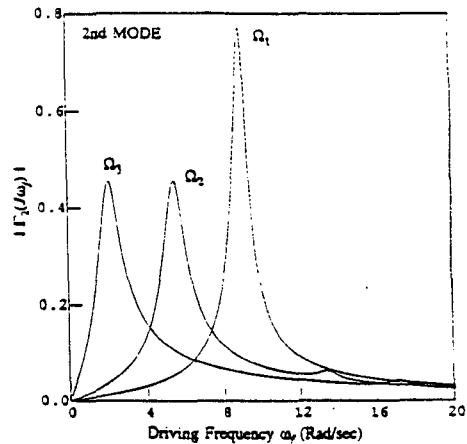


Fig. 2 Amplitudes of $\Gamma_2(j\omega_f)$ corresponding to different natural frequencies

며, case 1에 대해서도 ω_f 와 ω_1 간의 또 ω_f 와 ω_2 간의 분리가 증가할수록 모드연관이 급격하게 감소한다.

모드연관이 주파수영역에서 넓게 떨어져 있는 모드들에 대해서 무시할만 하다면 case 3의 연관지수는 크기가 대단히 작아야 한다. 그러나 Fig. 1, 2에서 볼 수 있는 것처럼 ω_f 가 한 고유진동수 근처에 있을 때 이는 사실이 아니다. 더우기, case 3에 대한 $|\Gamma_1|$ 과 $|\Gamma_2|$ 의 피크치가 case 2의 경우에 비해 결코 작지 않다. ω_f 가 ω_1 혹은 ω_2 와 비슷한 경우 $|\omega_2 - \omega_1|$ 가 증가한다고 해서 모드연관의 효과가 감소하지 않는다. 이는 단지 연관지수가 최고치를 갖는 위치를 움직일 뿐이다.

5. 결 론

본 논문에서 하모닉 입력이 있을 때 주파수분리의 모드연관에 대한 효과를 연구하였다. 주요한 결과를 다음과 같이 요약할 수 있다.

(1) 선형시스템에서의 모드연관은 식(15)에서 정의된 연관지수로 나타낼 수 있다. 비고전적 감쇠의 정도는 복소 연관지수와 연관계수를 사용함으로써 정량적으로 나타낼 수 있다.

(2) 고유도드간의 적당한 주파수분리가 모드연관을 무시할 수 있는 충분조건이 될 수 없다. 모드연관을 결정하는 것은 모드간의 분리라기 보다는 입력과 고유 도드간의 주파수분리이다.

참고문헌

- (1) Bellow, J. and Inman, D. J., 1989, "A Survey of Nonproportional Damping," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 21, pp. 7~12.
- (2) Bellos, J. and Inman, D. J., 1990, "Frequency Response of Nonproportionally Damped Lumped Parameter, Linear Dynamic Systems," *ASME J. Vibration and Acoustics*, Vol. 112, pp. 194~201.
- (3) Caughey, T. K. and O'Kelly, M. E. J., 1965, "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 583~588.
- (4) Chung, K. R. and Lee, C. W., 1986, "Dynamic Reanalysis of Weakly Nonproportionally Damped Systems," *J. Sound and Vibration*, Vol. 111, pp. 37~50.
- (5) Cronin, D. L., 1976, "Approximation for Determining Harmonically Excited Response of Non-classically Damped Systems," *ASME J. Engineering for Industry*, Vol. 98, pp. 43~47.
- (6) Foss, K. A., 1958, "Coordinates which Uncouple the Equation of Motion of Damped Linear Dynamic System," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 25, pp. 361~364.
- (7) Hasselman, T. K., 1976, "Modal Coupling in Lightly Damped Structures," *AIAA J.*, Vol. 14, pp. 1627~1628.
- (8) Nair, S. S. and Singh, R., 1986, "Examination of the Validity of Proportional Damping Approximations with Two Further Numerical Indices," *J. Sound and Vibration*, Vol. 104, pp. 348~350.
- (9) Ozguven, H. N., 1982, "Receptances of Non-Proportionally and Continuously Damped Plates-Reduced Dampers Method," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 85, pp. 383~395.
- (10) Ozguven, H. N., 1987, "On the Harmonic Response of Non-Proportionally Damped Structures," *Proc. 11th ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Vol. 5, pp. 117~124.
- (11) Prater, G., Jr. and Singh, R., 1986, "Quantification of the Extent of Nonproportional Viscous Damping in Discrete Vibratory Systems," *J. Sound and Vibration*, Vol. 104, pp. 109~125.
- (12) Warburton, G. B. and Soni, S. R., 1977, "Errors in Response Calculations for Non-Classically Damped Structures," *Earthq. Engg. Struct. Dyn.*, Vol. 5, pp. 365~376.
- (12) Xu, K. and Igusa, T., 1991, "Dynamic Characteristic of Non-Classically Damped Structures," *Earthq. Engg. Struct. Dyn.*, Vol. 20, pp. 1127~1144.