

〈論 文〉

응력확대계수와 J-적분 결정을 위한 코스틱스방법의 실험조건에 관한 연구

이억섭* · 조종두* · 홍성경** · 성낙중**
(1994년 2월 18일 접수)

Revisit on Experimental Conditions in Determination of Stress Intensity Factor and the J-Integral Using the Methods of Caustics

O. S. Lee, C. D. Cho, S. K. Hong and N. J. Sung

Key Words : The Methods of Caustics(코스틱스방법), Initial Curve(초기곡선), Plastic Zone(소성역), Stress Intensity Factor(응력확대계수), J-Integral(J-적분)

Abstract

Experimental conditions of the optical shadow methods of caustics for measurement of the stress intensity factor and the J-integral in various materials (polycarbonate, PMMA, Al 5586D) are investigated. The necessary experimental requirements to determine accurate values of the stress intensity factors and the J-integrals are described. The ratio of r_o (radius of initial curve) to r_p (plastic zone size) is selected as a parameter to verify the experimental limitation of the method of caustics in determination of fracture parameters. In this study, transmission caustics method was used for compact tension specimens made of polycarbonate and PMMA, while reflection caustics method was applied to c-shaped tension specimen made of Al 5586D. The appropriate ranges of r_o/r_p to determine accurate values of stress intensity factors were found to be 1.5~1.8. Existing experimental results have been obtained mainly by changing r_p with different loads in r_o/r_p . However, in this study we could obtain varying K_{caus}/K_{th} over the wide range of r_o/r_p at fixed load conditions with newly designed optical arrangement. Thus, we could find the range in which theoretical and experimental results agree well each other by changing r_o values only. In Al 5586D specimen, experimental caustics were located inside of the plastic zone, and K_{caus}/K_{th} were found to be not unity in this range. It is found that $J_{caus}/J_{th}=1$ with $r_o/t \geq 0.8$ and the experimental plastic zone includes the contours of caustics.

1. 서 론

광학적 해석방법의 일종인 코스틱스방법은 동적 및 정적인 응력해석과 진전하는 균열의 거동을 해

석하고 균열선단에서의 파괴파라미터를 구할 수 있는 효과적인 방법으로 그 간편성 때문에 널리 쓰이고 있다.⁽¹⁻³⁾

그러나 이 방법은 이론적인 해석의 적용가능한 영역을 분명히 알고, 필요에 따라 그 실험조건을 바꿔가면서 실험을 해야 하는 어려움이 있다. 인하대학교 파괴역학연구실에서는 이 방법의 유용한 실

*정회원, 인하대학교 기계공학과

**정회원, 인하대학교 대학원

조건을 결정하기 위한 지속적인 연구를 수행하여
초적인 결과를 발표한 바 있다.⁽⁴⁻⁷⁾

Mode I 하중이 시편에 작용할 때 코스틱스 상
의 모양, 크기와 밀접하게 관계있는 초기곡선
 r_0 는 스크린과 시편 사이의 거리 Z_0 에 크게
영향을 받으므로 스크린의 위치를 조절하여 초기곡
을 균열선단 부근의 소성역(r_p)의 내부나 외부에
게 할 수 있다. 소성역 내부와 외부의 응력장
지배하는 파괴역학 파라미터 중 대표적인 것이
적분과 응력확대계수이므로, 소성역 내부에서는
소성 파괴역학 파라미터인 J-적분을 적용하고 그
에서는 탄성파라미터인 K(응력확대계수)를 적
야 한다. 본 연구의 목적은 코스틱스방법으로
확대계수와 J-적분값을 측정할 경우의 한계성
연구하고 이들의 측정 및 산정방법을 실용화할
는 실험적인 세부사항을 결정하는데 있다.

2. 이 론

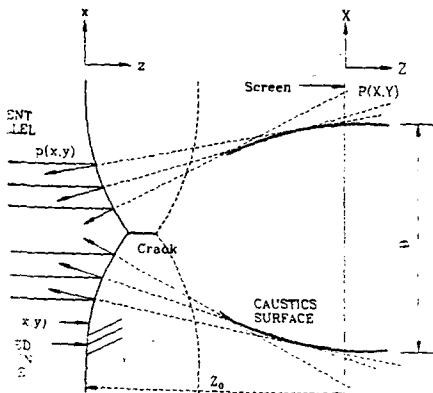
코스틱스를 이용한 K의 실험식

ser에서 나온 점광원을 평행광으로 조절하여
행광이 시편상의 임의의 점에 이르게 되면 스
크린으로 반사되어 코스틱스를 형성하게 된다. 이
를 Fig. 1을 참고하면서 수식으로 나타내면 다
같다.⁽⁸⁾

시편표면의 형상을 2차원 상태로 표시하면
 $z=f(x, y)$ (1)

다.

의 임의의 점 p에서 반사된 광이 스크린의
점 P로 반사된다면 사상(mapping)식은 다



1 Principle of formation of the caustics

음과 같이 표시할 수 있다.

$$(X, Y) = (x, y) + Z_0 \text{ grad } \Delta S \tag{2}$$

여기서,

Z_0 : 시편과 스크린 사이의 거리

ΔS : 광학경로의 변화량

이 식을 Hooke's law와 균열선단의 응력장을 나
타내는 식을 적용시켜 극좌표계 (r, θ)로 바꾸면
다음과 같다.

$$X = r \cos \theta + \frac{Z_0 t \nu}{E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-3/2} \cos \frac{3}{2} \theta$$

$$Y = r \sin \theta + \frac{Z_0 t \nu}{E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-3/2} \sin \frac{3}{2} \theta \tag{3}$$

여기서,

t : 시편의 두께

E : 탄성계수

ν : Poisson's 비

스크린상에 코스틱스가 형성되기 위해서는 사상
식의 Jacobian determinant가 0이 되어야 하므로
식(3)은 다음 식을 만족해야 한다.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

식(4)에 식(3)을 대입하여 정리하면 초기곡선의
방정식을 얻을 수 있으며, 이 초기곡선 반경 r_0 를
식(3)에 대입하면 코스틱스방법을 이용하여 응력확
대계수(K_{caus})를 구하는 식을 다음과 같이 구할 수
있다.

$$K_{caus} = \frac{ED^{5/2}}{10.7 Z_0 t \nu}$$

$$D = 2 Y_{max} = 3.17 r_0 \tag{5}$$

여기서, D 는 코스틱스의 직경이며, Y_{max} 는 코스
틱스 사상방정식 (3)에서의 Y 의 최대값이다.

2.2 응력확대계수의 이론식

본 연구에서 사용한 응력확대계수를 결정하는 이
론식은 compact tension(CT) 시편의 경우 다음과
같다.⁽¹⁰⁾

$$K_{Ih} = \frac{P}{t \sqrt{W}} \frac{(2+a/W)}{(1-a/W)^{3/2}} f(a/W)$$

$$f(a/W) = 0.886 + 4.64(a/W) - 13.32(a/W)^2 + 14.72(a/W)^3 - 5.6(a/W)^4 \quad (6)$$

여기서, P : 하중
 a : 균열길이
 W : 시편폭

C-shaped tension (CST) 시편의 경우에 대한 응력확대계수를 결정하는 이론식은 다음과 같다.⁽¹⁰⁾

$$K_{Ih} = \frac{P}{tW^{1/2}} \left(\frac{3X}{W} + 1.9 + 1.1a \right) [1 + 0.25(1-a)^2(1-r_1/r_2)] f(a)$$

$$f(a) = \frac{a^{1/2}}{(1-a)^{3/2}} (3.74 - 6.30a + 6.32a^2 - 2.43a^3)$$

$$\alpha = \frac{a}{W} \quad (7)$$

여기서, X : 하중구멍 오프셋
 r_1/r_2 : 내외경의 비 (r_1 =내경, r_2 =외경)

2.3 코스틱스를 이용한 J-적분 결정을 위한 실험식

균열선단 근방에서 소성변형이 발생할 때 나타나는 Hutchinson-Rice-Rosengren (HRR) 특이장의 응력(σ_{ij})과 변형률(ϵ_{ij}) 분포는 다음과 같다.⁽¹⁰⁾

$$\sigma_{ij} = \sigma_r \left[\frac{J}{\alpha \sigma_r \epsilon_r I n r} \right]^{1/(n+1)} \Sigma_{ij}(\theta, n)$$

$$\epsilon_{ij} = \alpha \epsilon_r \left[\frac{J}{\alpha \sigma_r \epsilon_r I n r} \right]^{n/(n+1)} E_{ij}(\theta, n) \quad (8)$$

여기서, r, θ 는 균열선단이 중심인 극좌표이고, $I n$ 은 가공경화지수 n 의 함수인 적분상수이며, Σ_{ij} 와 E_{ij} 는 θ 와 n 의 무차원 함수이다. σ_r 는 항복 응력이고, ϵ_r 는 항복 변형률이며, α 는 재료상수이다.

식(6)을 응력확대계수 식 K_{Icaus} 을 정리할 경우와 같은 방법으로 전개하면 다음과 같은 J-적분의 식을 구할 수 있다.

$$J = S_n \frac{\alpha \sigma_r^2}{E} \left[\frac{E}{\alpha \sigma_r Z_0 t} \right]^{\frac{n}{n+1}} D^{\frac{3n+2}{n}} \quad (7)$$

여기서, S_n 은 수치계수(numerical factor)로서 가공경화지수 n 의 함수이다.

재료가 완전 소성이라고 가정하면 $n = \infty$ 이고, $S_n = 0.074$ 이다. 이 경우의 J-적분값은

$$J = \frac{\sigma_r D^3}{13.5 Z_0 t} \quad (8)$$

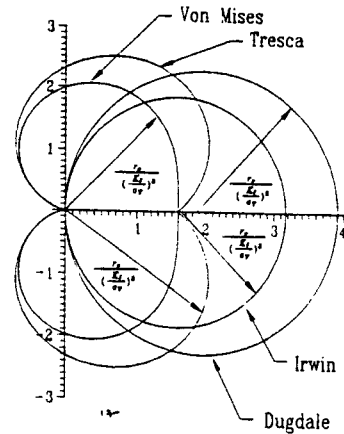


Fig. 2 Plastic zone shape of various theoretical model under plane stress condition

가 된다.

본 연구에서 사용한 이론적인 소성역의 크기는 Dugdale 모델(Fig. 2)을 사용하여 결정하였다.

$$r_p = \frac{\pi}{8} \left[\frac{K_I}{\sigma_r} \right]^2 \quad (9)$$

여기서, K_I 은 응력확대계수이고, σ_r 는 항복응력이다.

2.4 J-적분의 이론식

탄성 파괴역학에 기초를 두어 유도되었으나 실험값과 비교하기 위한 목적으로 다음과 같은 J-적분식을 이용하여 이론적인 J-적분값을 산정하였다.

$$J_{th} = \frac{K_{Ih}^2}{E} \quad (10)$$

3. 실험

3.1 재료특성

본 연구에서 사용한 시편 재료의 기계적인 성질은 다음과 같다.

3.2 실험방법

본 연구에서는 두 가지 플라스틱재료와 알루미늄 합금을 시편 재료로 사용하였다. Polycarbonate와 PMMA는 CT(compact tension) 시편으로 가공하여 투과형 코스틱스방법을 사용했으며, Al 5386D는 시편 가공상 어려움이 있어서 CST(C-shaped tension) 시편으로 가공하여 반사형 코스틱스방법

을 사용했다. (Fig. 3) 자연균열은 기계실패로 인공균열을 낸 후 날카로운 칼을 이용해서 만들었으며, 이 시편들을 하중장치에 장착하고 하중을 일정하게 고정한 상태에서 초기곡선 반경이 소성역부터 탄성영역까지 전 구간에 걸쳐 놓일 수 있도록 광학요소들을 Fig. 4와 같이 배열하여 조절하고 스크린을 평행이동시키면서, 스크린상에 나타난 코스틱스의 직경을 정밀하게 측정할 수 있도록 시편과 스크린 사이에 확대렌즈를 장착하여 코스틱스를 확대시

켰다. 실험장치의 개략도와 사진을 Fig. 4에 나타내었다.

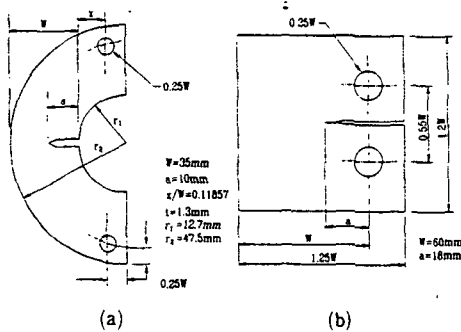
4. 결과 및 고찰

Fig. 2에 균열선단을 중심으로 평면응력에 대한 Irwin, Dugdale, Tresca, Von Mises의 소성역의 크기를 도시하였다. 사용한 재료의 균열선단에서의 소성역은 Dugdale 모델과 같은 원이므로 위 그림에 나타난 여러가지 모델 중 Dugdale 모델을 적용하여 소성역을 정의하였다.

하중을 고정한 상태에서 광학적 배열을 조절하여 소성역에서 탄성영역에 이르는 영역에 걸쳐서 코스틱스 상을 형성할 수 있었으며, 그 결과로부터 정해진 하중상태에서 K_{caus}/K_{ch} 가 변화하는 경향을 나타내는 여러가지 실험곡선을 얻을 수 있었다. (여기서, K_{ch} = 이론 응력확대계수)

Fig. 5에 실험에서 사용한 광학적 배열의 성능곡선을 나타내었으며, 이 성능곡선을 참조하여 Z_0 가 음(-)인 영역에서 Z_0 를 미소하게 변화시켜 가면서 코스틱스상을 측정, 기록하였다. Fig. 5에서 x 축은 확대렌즈와 스크린 사이의 거리(C)를 나타내며 y 축은 실제 시편과 스크린 사이의 거리(Z_0)를 나타낸 것이다. 따라서 이 그림은 확대렌즈의 초점거리(f)를 고정하고 시편과 확대렌즈 사이의 거리(b)를 임의의 상태로 고정했을 경우, C 의 변화에 대한 Z_0 의 변화를 나타내고 있다.

본 연구에서 사용한 광학적 배열(Fig. 4)은 여러 연구자들이 사용하는 기존의 반사형 코스틱스방법에 렌즈 2를 첨가한 것인데, 시편과 스크린 사이의



(a) CST specimen (Al5586D)
(b) CT specimen (Polycarbonate, PMMA)

Fig. 3 Specimen configurations

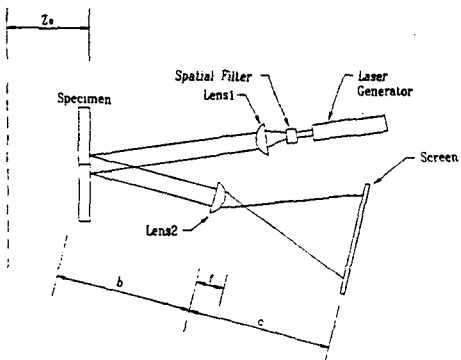
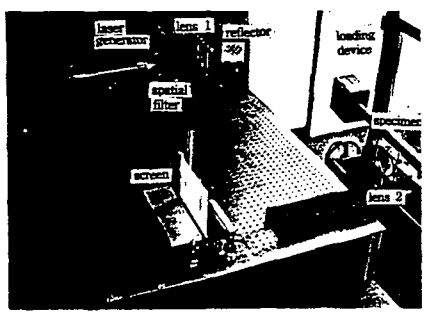


Fig. 4 Experimental set-up for the methods of caustics

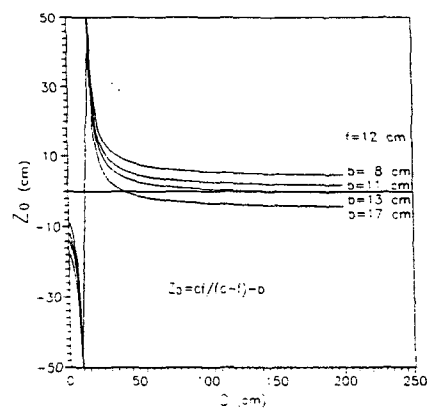


Fig. 5 Optical performance curve for the optical set-up in caustics experiment

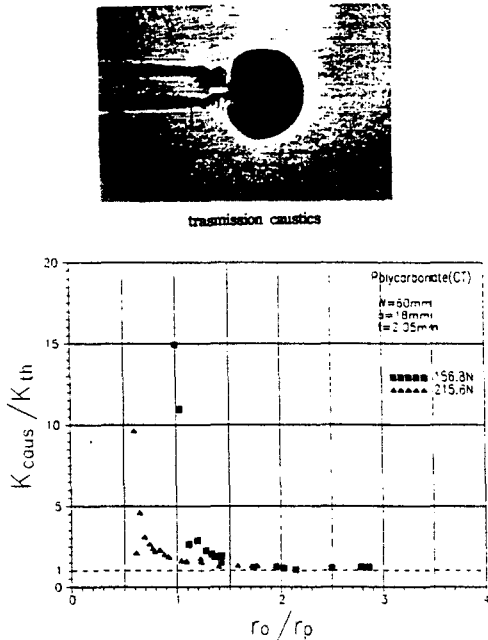


Fig. 6 Influence of r_0/r_p on K_{caus}/K_{th} in polycarbonate specimen (r_0 : radius of the initial curve, r_p : the plastic zone size, K_{caus} : experimental value of the stress intensity factor, K_{th} : theoretical value of the stress intensity factor)

거리 Z_0 가 아주 작더라도 미세하게 조정하면서 초기곡선을 소성역의 내부와 외부로 이동시킬 수 있는 특징을 가지고 있다. 따라서 이 배열을 사용하면 정확한 소성역과 탄성영역의 경계를 구할 수 있을 뿐 아니라, 성능곡선을 참조하면서 그 이동 정도를 조절할 수 있다. 성능곡선에서 기울기가 급한 곳에서는 거리를 미소하게 움직여 가면서 측정하였고, 기울기가 완만한 곳에서는 거리를 많이 움직여 가면서 Z_0 변화에 따른 코스틱스 지름의 변화(r_0 의 변화)를 측정하였다.

이론적인 응력확대계수 값(K_{th})과 코스틱스방법으로 얻은 응력확대계수 값(K_{caus})을 비교하기 위하여 그래프의 y축을 K_{caus}/K_{th} 로 하고, x축을 r_0/r_p (여기서 r_0 는 코스틱스의 초기반경, r_p 는 소성역의 크기)로 하여 결과를 도시하였으며, 소성역의 내부($r_0/r_p < 1$)에서 외부($r_0/r_p > 1$)로 초기곡선의 위치가 이동함에 따라 K_{caus} 값이 이론값에서 벗어나다가 이론값과 접근하는 현상을 면밀히 조사하였다.

Fig. 6과 Fig. 7에 각각 polycarbonate와 PMMA

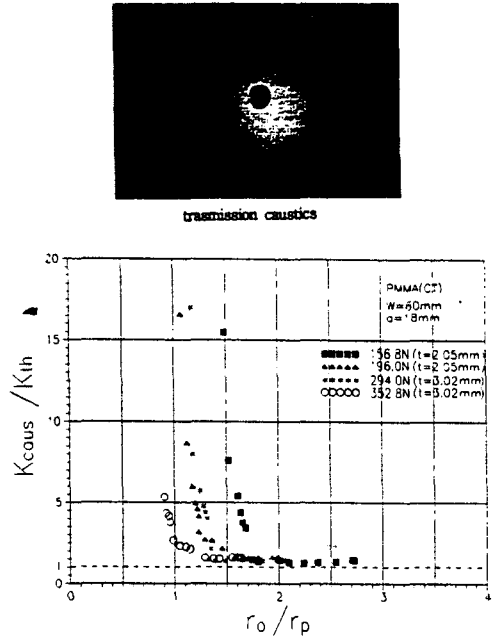


Fig. 7 Influence of r_0/r_p on K_{caus}/K_{th} in PMMA specimen (r_0 : radius of the initial curve, r_p : the plastic zone size, K_{caus} : experimental value of the stress intensity factor, K_{th} : theoretical value of the stress intensity factor)

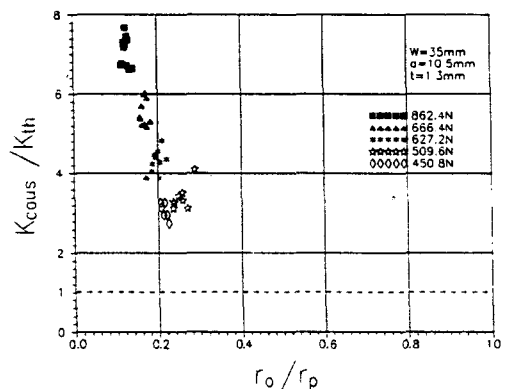


Fig. 8 Influence of r_0/r_p on K_{caus}/K_{th} in Al 5586D specimen ($a=10.5$ mm) (r_0 : radius of the initial curve, r_p : the plastic zone size, K_{caus} : experimental value of the stress intensity factor, K_{th} : theoretical value of the stress intensity factor, a : crack length)

에 대한 r_0/r_p 와 K_{caus}/K_{th} 가 변화하는 결과를 나타내었다. 여기서 코스틱스 모양은 탄성영역에서 촬영한 것이다. Fig. 6은 두께가 2.05 mm이고 균열길기와 시편길이의 비(比)가 0.3인 polycarbonate

Table 1 Tensile properties of specimens

Material	Modulus of elasticity(MPa)	Poisson's ratio	Yield stress(MPa)
Polycarbonate	2150	0.37	46
PMMA	3015	0.35	45
Al 5586D	75090	0.32	108

를 사용해서 156.8 N과 215.6 N의 하중을 가했을 때의 결과이다. 이론적인 응력확대계수와 실험에서 구한 응력확대계수가 r_0/r_p 가 약 1.5에서 일치하고 있음을 보이고 있다. Fig. 7은 두께가 2.05 mm이고 균열길기와 시편길이의 비(比)가 0.3인 polymethyl-methacrylate(PMMA) 시편에 각각 156.8 N, 196.0 N의 하중을 가했을 때 두께가 3.01 mm이고 균열길기와 시편길이의 비(比)가 0.3인 polymethyl-methacrylate(PMMA) 시편에 각각 294.0 N, 352.0 N의 하중을 가했을 때의 결과이다. r_0/r_p 가 1.7~1.8에서 응력확대계수의 이론치와 실험치가 일치하였다.

Fig. 8에는 Al 5586D에 대한 K_{caus}/K_{th} 가 r_0/r_p

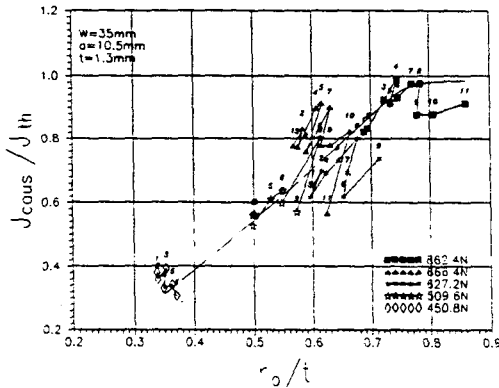
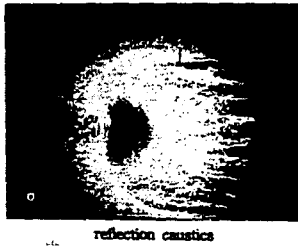


Fig. 9 Influence of r_0/t on J_{caus}/J_{th} in Al 5586D specimen ($a=10.5$ mm) (r_0 : radius of the initial curve, t : specimen thickness, J_{caus} : experimental value of the J-integral, J_{th} : theoretical value of the J-integral, a : crack length)

에 따라 변화하는 결과를 도시하였는데 r_0 가 모두 소성역에 포함되어 있음을 나타내 주고 있다. r_0/r_p 가 0.3보다 큰 영역에서의 실험은 배열상의 난점으로 좋은 실험결과를 얻을 수 없었으며 차후의 연구과제로 남겨두었다.

모든 실험 데이터가 소성역내에 있음을 확인한 후 Al 5586D의 결과를 Fig. 9과 같이 J_{caus}/J_{th} 가 r_0/t 에 따라 변화하는 양상을 그래프로 나타내었다. 이 그래프에서 각 데이터에 붙여진 번호는 고정된 각각의 하중에서 Z_0 가 증가하는 순서이며, 각 하중에서 Z_0 가 증가함에 따라 J_{caus}/J_{th} 이 반복적인 증감을 보이고 있으나 전반적인 경향은 점선을 따라 증가하여 r_0/t 가 0.8 이상에서 1에 접근하고 있음을 알 수 있다. 소성역내의 코스틱스 모양의 사진을 그림에 첨부하였다. 사진에서 바깥쪽 부분은 소성역이고 그 안쪽에 있는 것은 코스틱스 상이다.

Fig. 10과 Fig. 11은 Al 5586D를 사용하여 균열 길이가 다른 시편으로 실험한 결과이며, 이들도 Fig. 8과 Fig. 9의 결과와 같은 경향을 나타내고 있음을 알 수 있다. Fig. 10에 나타난 것과 같이 코

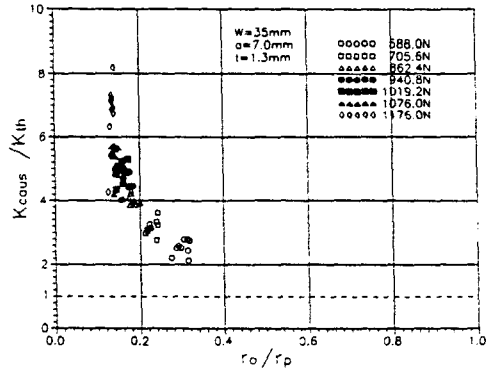


Fig. 10 Influence of r_0/r_p on K_{caus}/K_{th} in Al 5586D specimen ($a=7$ mm) (r_0 : radius of the initial curve, r_p : the plastic zone size, K_{caus} : experimental value of the stress intensity factor, K_{th} : theoretical value of the stress intensity factor, a : crack length)

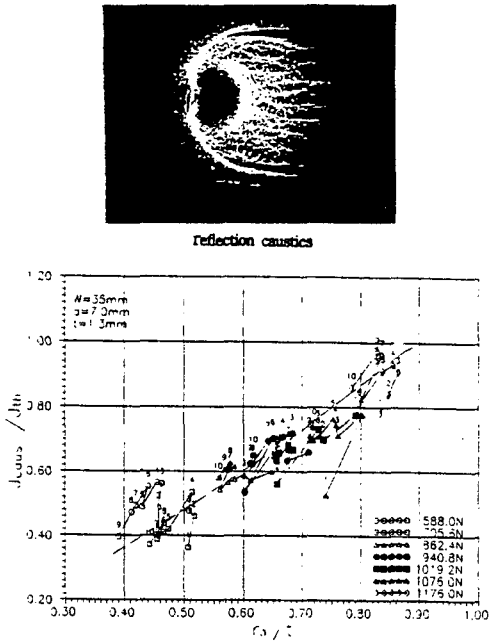


Fig. 11 Influence of r_0/t on J_{caus}/J_{th} in Al 5586D specimen ($a=7$ mm) (r_0 : radius of the initial curve, t : specimen thickness, J_{caus} : experimental value of the J-integral, J_{th} : theoretical value of the J-integral, a : crack length)

스틱스의 초기곡선이 소성역 안에 위치하면 응력확대계수의 이론치와 실험치가 상당한 차이를 보이고 있다. 따라서 이 데이터로 J_{caus}/J_{th} 가 r_0/t 에 따라 변화하는 양상을 그래프로 나타내었다. (Fig. 11) r_0/t 가 0.8 이상에서 1에 접근하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 새롭게 고안한 광학적 배열을 이용하여 코스틱스방법의 정확성을 입증하고 그 적용 범위를 제시하였다. 구체적인 연구 결과는 다음과 같다.

- (1) 정확한 응력확대계수를 결정하기 위해서는 r_0/r_p 가 1.5~1.8 이상이 되어야 함을 확인하였다.
- (2) 기존 실험결과는 r_0/r_p 에서 주로 r_p 를 변화시키면서(하중변화) 얻은 결과인데 비해서 본 연구에서 제시한 광학적 배열을 사용하면, 정해진 하중에서 비교적 넓은 r_0/r_p 영역에 걸쳐서 정확한 K_{caus}/K_{th} 값을 얻을 수 있다. 따라서 순수하게 광학적 배열 조절에 따른 r_0 변화만을 가지고 이론값

과 실험값이 일치하는 범위를 찾을 수 있다.

(3) Al 5586D에 대한 실험결과는 모든 데이터가 소성역에 들어있는 경우이며 탄성 파괴역학 파라미터인 응력확대계수는 많은 오차를 발생시키나 r_0/t 가 0.8 이상이면 J_{caus} 가 이론값 J_{th} 로 접근함을 확인하였고, 코스틱스 상 주위의 소성역의 형상도 조사할 수 있다.

후 기

본 연구는 1992년도 인하대학교 교내연구비를 지원 받아 수행한 것입니다.

참고문헌

- (1) Lee, O. S. and Kwon, O. K., 1987, "An Experimental Study on Crack Healing of Various Glassy Polymers," *KSME Journal*, Vol. 1, No. 1, pp. 189~252.
- (2) Rosakis, A. J., Ma, C. C. and Freund, L. B., 1983, "Analysis of the Optical Shadow Spot Method for a Tensile Crack in a Power-Law Hardening Material," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 777~782.
- (3) Rosakis A. J. and Zenher, A. T., 1988, "Caustics by Reflection and their Application to Elastic-Plastic and Dynamic Fracture Mechanics," *Optical Engineering*, Vol. 27, No. 8, pp. 596~609.
- (4) Lee, O. S., Han, M. K. and Hong, S. K., 1989, "Effects of Non-Singular Stress Terms and Birefringent Coefficient on Caustics under Various Fracture Mode Loadings," *KSME Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 159~163.
- (5) 이역섭, 홍성경, 김영수, 1990, "반사형 Caustics방법을 이용한 K_I 과 J-integral 결정에 관한 기초적 연구," '90년도 대한기계학회 춘계학술대회 논문집, pp. 83~88.
- (6) Lee, O. S., Hong, S. K. and Kim, Y. S., 1993, "Revisit to the Determination of Stress Intensity Factors and J-Integrals Using the Caustics Method," *Experimental Mechanics*, Vol. 33, No. 2, pp. 133~138.
- (7) Lee, O. S. and Hong, S. K., 1993, "Determina-

- tion of Stress Intensity Factors and J-Integrals Using the Method of Caustics." *Engineering fracture mechanics*, Vol. 44, No. 6, pp. 981~989.
- (8) Theocaris, P. S., 1981, "Elastic Stress Intensity Factors Evaluated by Caustics," *Mechanics of Fracture*, Vol. 7, pp. 189~252.
- (9) ASTM-Standard E399-83, 1983, "Standard Test Methods for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials," *1983 Annual Book of ASTM Standards*, pp. 501~506.
- (10) Hutchinson, J. W., 1986, "Singular behaviour at the end of tensile crack," *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, pp. 13~31.