

〈論 文〉

제한조건이 없는 최적화 문제의 강건설계에 관한 연구

이권희* · 엄인섭* · 박경진** · 이완익***

(1993년 12월 20일 접수)

A Study on the Robust Design for Unconstrained Optimization Problems

K. H. Lee, I. S. Eom, G. J. Park and W. I. Lee

Key Word : Robust Design(강건설계), Orthogonal Array(직교배열표), Pseudo-Objective Function(가목적함수)

Abstract

The engineering optimization has been developed for the automatic design of engineering systems. Since the conventional optimum is determined without considering noise factors, applications to practical problems can be limited. Current design practice tends to account for these noises by the specification of closer tolerances or the use of safety factors. However, these approaches may be very expensive. Thus the consideration on the noises of design variables is needed for optimal design. A method is presented to find robust solutions for unconstrained optimization problems. The method is applied to discrete and continuous variables. The orthogonal array is utilized based on the Taguchi concept. Through mathematical proofs and numerical examples, it is verified that solutions from the suggested method are more insensitive than the conventional optimum within the range of variations for design variables.

1. 서 론

공학적인 문제의 설계시 비용절감 및 컴퓨터에 의한 자동설계를 위하여 많은 최적설계기법이 개발되어 왔다. 이러한 최적설계기법은 부과된 요구조건을 만족시키면서 설계자가 원하는 효과를 극대화시키는 설계변수의 해를 찾아내는 과정이다. 그러나 기존의 최적설계기법을 이용하여 설계된 계(system)는 불확실한 잡음인자(noise factor)에 의해 예상된 기능을 발휘하지 못하거나 파손될 가능성이 존재한다. 여기서 잡음인자란 계를 구성하는 요소들의 제작 오차, 계가 사용되는 외부 환경조건의

변화, 사용자의 부주의 등, 설계자가 제어할 수 없는 인자로서 설계자가 제어할 수 있는 제어인자(control factor)와 반대의 개념을 갖고 있다.^(1~4) 현재로서는 설계과정에서 이러한 잡음의 영향을 고려하기 보다는 설계 후에 잡음 자체를 감소, 제거하려는 관점에서 안전계수를 보다 크게 사용하거나 요소들의 공차를 작게 주어 이러한 문제점을 해결하고자 한다. 그러나 이런 방법은 제작원가를 증가시키는 원인이 되며 잡음이 제거된다는 보장이 없으므로, 설계과정 중에 잡음에 대해 계의 반응이 둔감하도록 하는 설계해를 찾는 것이 효율적이다. 그러나 이에 대한 연구는 미비한 실정이다.^(5~8)

강건설계(robust design)란 발생가능한잡음에대해서 계의 반응의 산포를 작게 해주며 그 평균치를 목표치에 접근하도록 하는 설계해를 찾는 기법이다. 이러한 다꾸지법의 강건설계의 개념을 도입하

*한양대학교 대학원 기계설계학과

**정회원, 한양대학교 기계공학과

***정회원, 한양대학교 기계설계학과

여 새로운 의미의 강건설계 개념을 정립하였는데 다꾸지법에 관한 자세한 설명은 참고문헌^(1~4)에 수록되어 있으므로 여기서는 생략하였다. 즉, 설계자의 경험, 기술적인 지식 및 문제의 성질에 따라 가중치(weighting factor)를 결정함으로써 잡음에 대한 강건성과 목적함수의 최소화 조건을 만족시키는 설계해를 찾으려 하는 것이다. 이것을 위해 원래 목적함수와 설계변수의 잡음에 의한 함수의 변동으로 구성되는 가목적함수를 새롭게 정의하여 최적설계를 수행한다. 이런 방법으로 구해진 최적해는 설계변수의 잡음에 의한 목적함수의 변동을 고려한 것이므로 일반적인 최적해보다 설계변수의 잡음내에서 훨씬 강건하다. 따라서, 기계요소의 제작시 기존의 최적해에 비하여 상대적으로 설계변수에 대한 큰 공차를 주는 것이 허용되며, 이로 인해 제작 원가를 감소시킬 수 있다는 장점이 있다.

이러한 강건설계는 제한조건이 없는 최적화 문제에서 설계변수가 불연속인 경우와 연속인 경우에 대해 적용 가능하며 불연속 강건설계시 함수의 분산, 즉 강건성과 민감도와의 관계를 수학적으로 명시하였다. 불연속 강건설계는 기존의 최적설계 후 처리(post-process), 또는 기존의 알고리즘을 사용하지 않고 반복적으로 강건해를 구하는데 사용된다. 이 경우, 인자 및 인자의 설계조건인 수준의 수가 결정되면 제어인자와 잡음인자에 대한 내측배열(inner array)과 외측배열(outer array)이 구성되는데 이것을 위해 직교배열표를 이용하였다.^(1,3) 현재까지 불연속 설계기법으로 정수계획법(integer programming)이나 대화법(interactive method) 등이 사용되고 있지만 이 방법들은 그 자체의 제한과 가격 등의 문제로 구조문제에 적합하지 않는 것으로 판명되었다.^(6,8) 그리고 통계적 최적화기법(stochastic optimization)으로도 강건설계가 가능하지만 이 방법은 기존의 알고리즘을 이용하는 것이므로 불연속설계가 불가능하다. 본 연구에서는 제한조건이 없는 최적화문제에서 가목적함수 및 직교배열표를 이용한 불연속설계법을 제시하였다. 설계변수가 불연속 및 연속인 경우에 대하여 각각 수치적 예제로 강건설계의 타당성을 증명하였고 실제 구조물에 대해 적용하여 실용성을 제시하였다.

2. 강건설계의 최적설계 문제에서의 적용

일반적으로 제한조건이 없는 최적설계 문제는 목

적함수를 최소화시키는 설계변수의 값을 찾는 것이다. 이러한 최적해는 설계변수의 변동에 의한 영향이 전혀 고려되지 않는 것이므로 설계변수의 변동에 대하여 민감할 가능성이 있다. 그러나 실제로는 설계변수의 공칭값(nominal value)으로부터 변동이 항상 존재하므로 이것을 고려한 최적화기법이 요구된다. 설계변수의 변동은 임의의 확률분포를 갖는다고 가정할 수 있으므로 설계변수를 확률변수(random variable)로, 목적함수를 확률변수의 함수로 생각할 수 있다. 식(1)과 같이 목적함수를 최소화시키는 최적화 문제는 강건설계의 개념을 도입하여 식(2)와 같이 가목적함수를 최소화시키는 문제로 변환시킬 수 있다.

$$\text{Minimize } f(x) \quad (1)$$

$$\text{Minimize } \Phi(x) = \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot \sigma_f \quad (2)$$

여기서, $f(x)$ 는 최적설계 문제의 원래 목적함수, $\Phi(x)$ 는 가목적함수, σ_f 는 함수값의 표준편차이며, α 는 가중치로 $0 \leq \alpha \leq 1$ 의 범위를 갖는다. 또한 식(3)과 같이 목적함수를 최대화시키는 최적화 문제에서는 목적함수를 식(4)와 같이 치환함으로써 최소화 문제로 변환시킬 수 있으며 식(5)에서 가목적함수로 구성되는 강건설계를 위한 최소화 문제로 정식화할 수 있다. 단, 식(5)에서 $\sigma_g = \sigma_f$ 이다.

$$\text{Maximize } f(x) \quad (3)$$

$$g(x) = -f(x) \quad (4)$$

$$\text{Minimize } \Phi(x) = \alpha \cdot g(x) + (1-\alpha) \cdot \sigma_g \quad (5)$$

가목적함수는 통계적 최적화기법에서 사용되는 것과 유사하지만 식(2) 또는 (5)의 우변에서 함수값의 평균 μ_f 대신 $f(x)$ 또는 $g(x)$ 가 사용된다. 즉, 식(2), (5)의 가목적함수는 강건성의 관점에서 함수의 표준편차를, 목적함수의 성능 향상의 관점에서 원래 목적함수를 조합하고 가중치를 부여하여 정의되었다. 여기서, 가중치 α 는 설계자의 의도와 문제의 성질에 따라서 기술적으로 정의되어야 한다.

2.1 불연속 강건설계시의 분산과 강건성

기존의 최적설계기법으로 구해진 최적해는 설계변수가 연속적으로 존재한다는 가정하에서 구해진 값인 반면, 구조 최적설계와 같은 실제 문제에서 설계변수는 불연속인 값을 가지는 경우가 대부분이므로 응용에 문제점이 지적되고 있다. 현재의 해결

방안으로는 구해진 최적해로부터 한단계 높은 불연속값을 취하고 있지만 이것은 계의 성능을 악화시키거나 구조물의 경량화에 위배되는 설계해를 선정할 가능성이 있다. 따라서 설계단계에서부터 설계변수를 불연속으로 취급하는 것이 바람직하다.

불연속 강건설계시 식(2)을 위해 사용되는 분산 및 평균은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\sigma_f^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (f_i - \mu_f)^2}{N} \quad (6)$$

$$\mu_f = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N f_i \quad (7)$$

여기서, f_i 는 함수값, σ_f^2 은 함수값의 분산, μ_f 는 함수의 평균, N 은 현재 설계점에서 설계변수의 변동을 고려한 함수계산의 회수를 의미한다.

식(6)에서 정의된 함수의 분산은 강건성을 나타내는 지표이며, 수학적으로 차분법과 관계가 있는 것이 발견되었다.^(9,10) a 를 현재 설계점, Δx 를 설계변수의 변동이라고 할때 이는 잡음인자로 취급할 수 있으며 설계변수는 $a - \Delta x$, a 및 $a + \Delta x$ 의 값을 가질 수 있다. 이때, 세 설계점이 일어날 확률이 동일한 불연속 분포로 가정하면 분산 및 평균은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (f_i - \mu_f)^2 \quad (8)$$

$$\mu_f = \frac{1}{3} [f(a - \Delta x) + f(a) + f(a + \Delta x)] \quad (9)$$

식(8)에 식(9)를 대입하고 정리하면 분산식은 다음으로 표시할 수 있다.

$$\sigma_f^2 = -\frac{(\Delta x)^2}{3^2} [\{f''(a)\}^2 + \{f'_+(a)\}^2 + \{f'_-(a) + f'_+(a)\}^2] \quad (10)$$

여기서,

$$f'_-(a) = \frac{f(a) - f(a - \Delta x)}{\Delta x} \quad (11)$$

$$f'_+(a) = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (12)$$

식(10)은 단지 현재 설계점에서의 편미분값을 의미하는 것은 아니고 현재 설계점에서의 설계변수의 변동 Δx 에 의한 전향차분(forward difference), 후향차분(backward difference), 중심차분(central

difference)의 항이 모두 포함되어 있다. 설계변수가 둘 이상인 경우에도 분산에는 편미분 형태의 전향차분, 후향차분 및 중심차분의 항이 포함된다. 식(10)에는 공칭점으로부터 변동의 범위내에서 얻을 수 있는 모든 차분법이 혼합되어 있는데 변동의 크기가 작을 경우, 수학적 민감도와 유사하지만 문제의 특성에 따라 변동이 커지는 경우, 공칭점으로부터 모든 차분법의 평균적인 의미가 함축되어 있어 강건성을 판별하는데 유용하다.

다꾸지법에서 망목특성(nominal-the-best characteristics)의 경우, 다음과 같은 SN 비⁽¹⁴⁾를 사용한다.

$$SN = 10 \log_{10} \frac{\mu_f^2}{\sigma_f^2} \quad (13)$$

그러나 식(13)을 이용하면 함수값의 위치에 따라 동일한 분산에 대해 다른 SN비를 가질 수 있다. 예를 들면, 두 개의 임의 수준에서 동일한 분산을 갖는 경우 μ_f^2 가 큰 값을 갖는 수준이 SN비가 크게 되어 그 수준이 최적값으로 선정되어 강건성을 판별하는데 오류를 범할 수 있다. 이런 이유로 식(2), (5)의 우변의 둘째 항, 즉 강건성을 고려하는 항에서 다꾸지가 정의한 SN비를 사용하지 않고 표준편차를 이용하였다.⁽⁴⁾

이러한 강건설계법의 개념을 Fig. 1⁽⁴⁾과 같이 설계변수와 그 반응치가 단조증가함수 관계인 간단한 경우를 이용하여 설명할 수 있다. Fig. 1에서 불연속 설계변수 x_1 , x_2 의 변동에 대한 함수의 변동은 ㉠, ㉡에 해당하는데 함수값의 분포곡선이 큰 ㉡가 ㉠보다 σ_f 가 크게 되고 동시에 $f(x_2)$ 가 $f(x_1)$ 보다

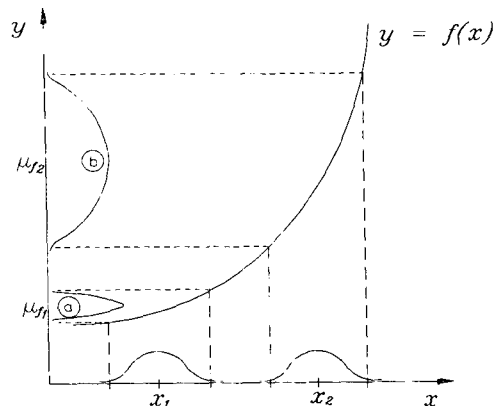


Fig. 1 Design variable versus its response

음을 알 수 있다. 따라서 이 곡선에서는 가중치 값에 관계없이 가목적함수는 $\phi(x_1) < \phi(x_2)$ 가 되어 설계변수 x_1 이 x_2 보다 강건하다고 할 수 있다. 그러나 임의의 $f(x)$ 의 곡선형태에서는 가중치의 값에 의해 강건해를 결정해야 한다.

2.2 불연속 강건설계기법

설계자는 불연속 값을 갖는 설계변수에 설계변수의 변동을 고려하여 이것에 강건한 불연속 설계를 실현할 수 있다. 불연속 강건설계시 설계변수의 수가 많은 원래 함수이 계산이 고가일 경우, 실험횟수를 줄이면서 많은 인자를 취급할 수 있도록 직교성(orthogonality)을 갖고 있는 직교배열표를 사용하는 것이 바람직하다. (1,3,6,8) 직교배열표에 인자를 배치할 때 제어인자의 공칭값은 내측배열에, 제어인자의 변동을 고려한 잡음인자의 값은 외측배열에 각각 배치한다. 이때 문제에 따라 인자 수, 수준 수 및 변동의 크기가 결정되면 내측배열 및 외측배열에 대한 최소 직교배열표를 선정하여 배치하는 것이 효과적이며 이것을 Fig. 2에 표시하였다. 내

측배열의 각 실험번호에 대하여 외측배열이 하나씩 구성되며, 이 직교배열표에 의하여 μ_f, σ_f^2, ϕ 를 계산한다.

불연속 강건설계는 최적설계 후처리시(6,8)와 최적설계의 사용없이 반복적으로 강건해를 구하는데 적용될 수 있다. 후처리로 적용할 경우에는 먼저 일반적인 최적설계기법으로 최적해를 구한 다음 최적해 근방에서의 설계변수의 불연속 값을 결정한다. 결정된 불연속 값중에서 가목적함수를 가장 최소화하는 불연속값을 강건설계의 해로 선정한다. 일반적으로 목적함수가 최적설계의 최적해의 근방에서 매우 민감하지 않을 경우 최적해에 가장 가까운 불연속 값이 강건설계의 해로 결정되는 경우가 많다. 그러나, 이것은 잡음의 크기 및 가중치에 따라 다르며 예제를 통해 검토될 것이다. 반면에 최적설계기법의 적용이 불가능하거나 최적해의 선정이 매우 어려운 경우 이의 사용없이 반복적으로 강건설계의 해를 구하는 것도 가능하다. 이는 관심있는 설계영역 안에 존재하는 설계변수의 불연속 값을 제어인자에, 변동을 잡음인자에 배치하여 강건설계의 해

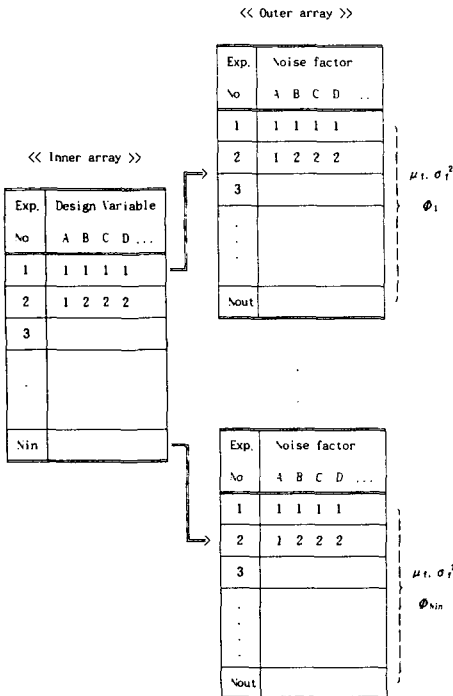


Fig. 2 Arrangement of inner and outer arrays

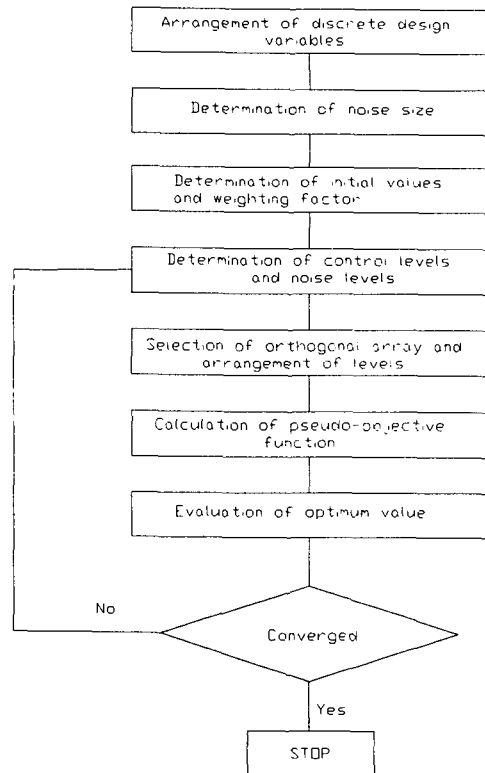


Fig. 3 Iterative robust design

를 선정한다. 이때 가목적함수의 값이 증가하거나, 전 단계(pre-stage)와 현 단계(current-stage)의 설계변수의 수준 조합이 같을 경우에는 이 설계값을 강건설계의 해로 선정한다. 이 과정을 Fig. 3에 표시하였다.

2.3 연속 강건설계

설계변수가 연속적으로 존재할 경우, 직교배열표의 사용없이 설계변수의 확률밀도함수(probability density function)에 의해 분산을 구하고 식(2) 또는 (5)의 가목적함수를 작성하여 기존의 최적설계 알고리즘을 이용함으로써 강건설계를 수행하는 것이 가능하다. 이때 설계변수의 확률밀도함수를 이용한 함수의 분산 및 평균식은 다음과 같이 정의된다.⁽¹¹⁾

$$\sigma_f^2 = \int_{(m_1 - \sigma_1)}^{m_1 + \sigma_1} \int_{(m_n - \sigma_n)}^{m_n + \sigma_n} \{f(x)\}^2 \prod_{i=1}^n \{p_i(x) dx_i\} - \mu_f^2 \quad (14)$$

$$\sigma_f = \int_{(m_1 - \sigma_1)}^{m_1 + \sigma_1} \int_{(m_n - \sigma_n)}^{m_n + \sigma_n} f(x) \prod_{i=1}^n \{p_i(x) dx_i\} \quad (15)$$

여기서, n 은 설계변수의 수, x_i 는 i 번째 설계변수, m_i 는 i 번째 설계변수의 현재 설계점, σ_i 는 i 번째 설계변수의 표준편차, $f(x)$ 는 최적설계 문제의 원래 목적함수, $p_i(x)$ 는 설계변수 x_i 의 확률밀도함수이다. 확률밀도함수 $p_i(x)$ 는 실험의 표본이나 경험에 의하여 추정될 수 있으나 실제로는 간단한 함수로 가정할 수 있다. 그러나 식(14)의 문제점은 확률밀도함수를 알고 있는 경우에도 수학적으로 증적분이 수행되어야 하며 확률변수의 개수가 증가할수록, 확률밀도함수나 원래 목적함수 식이 복잡할수록 증적분을 수행하는 것은 매우 어렵다. 따라서 연속 강건설계는 증적분이 가능한 경우에만 사용하는 것이 타당하며 일반적인 경우에는 불연속 강건설계를 수행하는 것이 보다 좋은 설계법이다.

3. 예제 및 검토

지금까지의 이론에 근거한 제한조건이 없는 강건설계법의 타당성을 검증하기 위해 임의의 수치적 문제를 예시하였다. 동일한 문제에 대하여 가중치 α 의 변화 및 잡음의 크기 변화에 따른 설계변수의 최적값을 비교, 분석하였으며, 공학적인 의미 부여를 위하여 three-bar truss 및 ten-bar truss의 구조설계문제에 대한 강건설계를 수행하였다.

3.1 불연속 강건설계예의 적용

3.1.1 설계변수가 1개인 경우

일반적인 최적화기법으로 구한 해 근방에서 잡음에 대단히 민감한 함수를 나타내기 위하여 식(16) 및 Fig. 4와 같은 함수가 구간별로 임의로 제작되었다.

함수의 구간별 정의 :

$$\begin{cases} f_1(x) = -(x-2)^3 + e^{-x} + 2(x < 2) \\ f_2(x) = e^{-x} + 2(2 \leq x < 5) \\ f_3(x) = (x-5)^5 + e^{-5} + 2(x \geq 5) \end{cases} \quad (16)$$

여기서, 가시적인 최적값은 $x=5$ 이나 강건설계시는 잡음 및 가중치의 영향에 의하여 이와는 다른 해가 선정될 가능성이 있다. 이 문제에서 관심이 있는 설계변수 구간은 $2 \leq x \leq 5$ 이므로 이 구간의

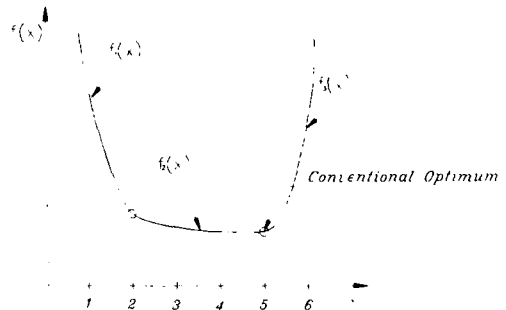


Fig. 4 Graph of Eq.(16)

Table 1 Levels of noise factor $s(\Delta x=0.5)$

x	Outer array		
	2.0	1.5	2.0
3.5	3.0	3.5	4.0
5.0	4.5	5.0	5.5

Table 2 $\Phi(x)$ value with varying weighting factor $\alpha(\Delta x=0.5)$

x	α				
	1.0	0.75	0.5	0.25	0
2.0	2.145	1.620	1.105	0.590	0.075
3.5	2.030	1.526	1.022	0.517	0.013
5.0	2.007	1.509	1.010	0.512	0.014

불연속 값을 임의로 배치하여 먼저 잡음의 크기를 일정하게 고정시키고 가중치의 변화에 따른 최적값을 비교하였다.

설계변수의 변동(Δx)을 0.5로, 잡음인자를 3수준으로 두면 Table 1과 같이 외측배열에 실험이 배치되며, 가중치의 변화에 따른 가목적함수 값을 Table 2에 나타내었다. 예를 들면 $x=2.0$, $\alpha=0.75$ 인 경우, $\sigma^2=0.0055789$, $\mu=2.1592$ 가 되어 $\Phi(2)=0.75(e^{-2}+2)+(1-0.75)\cdot 0.07469=1.620$ 이 계산되었다.

Table 2에 나타난 결과를 검토해 보면, 가중치가 0일때를 제외하고 그 변화에 관계없이 가목적함수값의 최소값은 가시적인 최적값과 일치함을 볼 수 있다. 이는 Δx 가 0.5일 경우에 가시적인 최적값이 원래함수의 강건성과 최소값을 모두 만족시키는 설계해라고 볼 수 있다.

설계변수의 변동을 1.0으로 두고 잡음인자를 3수준으로 두어 Table 3과 같이 외측배열에 실험을 배치하며 가중치의 변화에 따른 가목적함수 값을 Table 4에 나타내었다.

Table 4에 나타난 결과로부터 강건해 가중치가 1.0일때를 제외하면 가시적인 최적값과는 달리 $x=3.5$ 가 됨을 알 수 있다. 이것은 변동이 커짐에 따라 $x=5.0$ 에서 반응치의 큰 변화가 있음을 의미한다. 반면 $x=3.5$ 의 함수값은 2.030이며 $x=5.0$ 의 함수값은 2.007이므로 일반 최적설계의 해보다는 강건설계의 해가 최소값을 그다지 증가시키지 않고 강건성을 만족하는 해라고 볼 수 있다.

3.1.2 설계변수가 2개인 경우

식(17) 및 Fig. 5로 주어진 함수⁽¹²⁾는 일반 최적설계시 $x_1=1.743$, $x_2=2.030$ 의 해를 갖는다.

$$f(x_1, x_2) = 12 + x_1^2 + \frac{1+x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 \cdot x_2^2 + 100}{(x_1 \cdot x_2)^4} \quad (17)$$

Fig. 5의 함수 등고선을 보면 기존의 최적값 주위의, 특히 설계변수가 최적값보다 작은 영역에서 매우 민감하므로 강건설계가 요구되는 문제로 분류할 수 있다. 강건설계시 각 인자의 수준값을 1~5까지 5개로 하였으며 $\Delta x'$ 0.5 및 1.0으로 하여 가중치를 변화시키면서 강건설계의 해를 구하였다. 이때 내측배열의 각 변수는 각각 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0의 5개 수준을 부여하였고 외측배열을 위한 잡음의 수준수는 3으로 결정하여 이에 해당되는 최소

Table 3 Levels of noise factor $s(\Delta x=1.0)$

x	Outer array		
	2.0	1.0	2.0
3.5	2.5	3.5	4.5
5.0	4.0	5.0	6.0

Table 4 $\Phi(x)$ value with varying weighting factor $\alpha(\Delta x=1.0)$

$x \backslash \alpha$	1.0	0.75	0.5	0.25	0
2.0	2.135	1.725	1.314	0.903	0.493
3.5	2.030	1.530	1.030	0.530	0.030
5.0	2.007	1.622	1.238	0.853	0.469

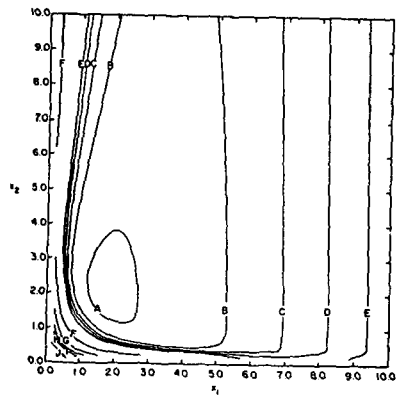


Fig. 5 Contour plot of Eq.(17)

직교배열표로서 내측배열에 $L_{25}(5^6)$, 외측배열에 $L_9(3^4)$ 의 직교배열표를 이용하였다. 이 경우, 내측배열에서 직교배열표에 의한 실험회수가 건조합성시법의 실험횟수와 일치하는 것은 수준수를 5로 하였기 때문이다. 직교배열표에서 α 에 따른 가목적함수값을 Δx 가 0.5, 1.0인 경우에 대하여 각각 Tables 5, 7에 표시하였으며 Table 6은 Table 5의 실험번호 1에 대한 외측배열 및 함수의 평균, 분산을 나타낸 것이다. 예를 들면 $x_1=1.0$, $x_2=1.0$, $\alpha=0.75$ 인 경우 $\sigma^2=62685016.34$ 가 되어 $\Phi(1, 1)=0.75(116)+(1-0.75)\cdot 7917.387=2066.35$ 가 계산되었다.

Δx 가 0.5인 경우에 강건설계의 최적해는 $x_1=2$, $x_2=2$ 로서 일반 최적설계시이 최적해에 가장가까운

Table 5 $\Phi(x)$ value with varying weighting factor $\alpha(\Delta x=5.0)$

Exp. No.	α		1	0.75	0.5	0.25	0
	x_1	x_2					
1	1	1	116	2066.35	4016.69	5967.04	7917.39
2	1	2	24.5	43.57	62.65	81.73	100.81
3	1	3	24.34	24.82	25.30	25.78	26.27
4	1	4	30.45	30.33	30.22	30.10	29.99
5	1	5	39.2	40.01	40.83	41.64	42.46
6	2	1	23.0	41.51	60.02	78.53	97.05
7	2	2	17.7	13.47	9.240	5.010	0.78
8	2	3	18.6	14.16	9.720	5.280	0.84
9	2	4	20.29	15.51	10.74	5.965	1.19
10	2	5	22.52	17.40	12.28	7.160	2.04
11	3	1	22.57	20.07	17.57	15.07	12.57
12	3	2	21.66	16.79	11.93	7.072	2.21
13	3	3	22.14	17.13	12.13	7.132	2.13
14	3	4	22.9	17.66	12.42	7.180	1.94
15	3	5	23.89	18.34	12.79	7.247	1.7
16	4	1	28.58	22.46	16.35	10.23	4.12
17	4	2	28.35	22.05	15.76	9.472	3.18
18	4	3	28.63	22.25	15.88	9.505	3.13
19	4	4	29.06	22.55	16.05	9.552	3.05
20	4	5	29.62	22.94	16.27	9.602	2.93
21	5	1	37.28	28.95	20.63	12.30	3.98
22	5	2	37.22	28.92	20.71	12.33	4.01
23	5	3	37.41	29.06	20.71	12.36	4.01
24	5	4	37.68	29.25	20.83	12.39	3.97
25	5	5	38.04	29.51	20.98	12.45	3.92

불연속 값이므로 이는 설계변수의 변동이 0.5일 경우에는 일반 최적설계의 최적값이 강건하다고 할 수 있다. 그러나 Δx 가 1.0인 경우에는 강건설계의 최적해는 $x_1=2, x_2=3$ 이 되며 이는 Fig. 5에서 예측한 바와 같다. 설계변수의 변동이 작을 경우는 일반 최적설계시 수학적 민감도 해석과 유사한 성질을 갖게 되므로 기존의 최적해가 강건설계의 해

로 선정될 가능성이 높다. 이러한 설계변수의 변동을 결정하는 것은 매우 중요하며 제품의 제작조건, 제품의 사용환경 등을 정확히 고려하여 설계자의 경험 및 지식을 통하여 결정되어야 할 것이다.

3.2 연속 강건설계에의 적용

설계변수가 연속인 경우, 분산을 고려한 가목적

Table 6 The orthogonal array for noise

Exp. No.	x ₁	x ₂	f(x)
1	0.5	0.5	25633.25
2	0.5	1	1624.25
3	0.5	1.5	343.08
4	1	0.5	1618.25
5	1	1	116
6	1	1.5	36.45
7	1.5	0.5	332.63
8	1.5	1	35.34
9	1.5	1.5	19.79

$$\mu_f = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^9 f_i = 3306.56$$

$$\sigma_f^2 = \frac{\sum_{i=1}^9 (f_i - \mu_f)^2}{9} = 62685016.34$$

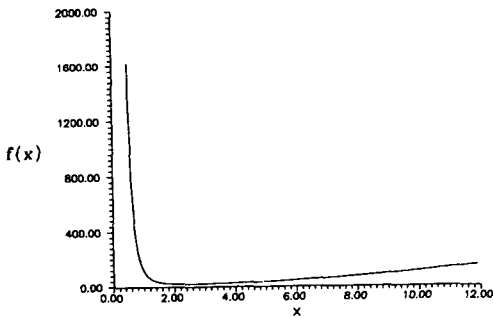


Fig. 6 Graph of Eq.(18)

함수를 연속함수로 정의하여 가목적함수의 최소값에 해당하는 설계변수의 값을 강건설계의 해로 결정할 수 있다. 이에 대해 적용된 함수는 식(18) 및 Fig. 6과 같다.

$$f(x) = 12 + x^2 + \frac{3}{x^2} + \frac{100}{x^4} \quad (18)$$

이 함수의 일반 최적설계 해는 $x=2.453$ 이지만 설계변수의 변동이 존재할 경우에는 최적값 주위에서 매우 가파른 형상을 하고 있으므로 강건설계가 필요한 유형의 문제이다. 연속 강건설계를 수행할 경우에는 설계변수의 확률분포를 반드시 알아야 하는데 예를 들면, 설계변수가 하나일 경우 모든 확률분포 중에 가장 많이 사용되는 분포인 정규분포

(normal distribution)에서 확률밀도함수는 다음과 같이 표시된다.⁽¹¹⁾

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]} \quad (19)$$

여기서, μ , σ 는 각각 설계변수의 평균 및 표준편차를 의미한다. 그러나 분산 및 평균을 계산하기 식(19)를 식(14), (15)에 대입하면 이는 계산하기가 거의 불가능해진다. 연속 강건설계에서는 중적분 계산 등의 어려움으로 인해 일반적으로 사용되는 분포곡선을 사용하기가 어려운 단점이 있다. 따라서 본 예제에서는 설계변수의 확률분포 식과 변동을 다음과 같이 간단한 함수로 가정하였으며 설계변수의 표준편차는 이차함수 및 상수함수에 대하여 각각 0.5 및 1.0으로 가정하였다.

- (i) 설계변수의 확률분포 : 2차 함수,
설계변수의 변동 : 0.5

$$p(x) = -6 \cdot \{x - (m - 0.5)\} \cdot \{x - (m + 0.5)\};$$

$$m - 0.5 < x < m + 0.5 \quad (20)$$

- (ii) 설계변수의 확률분포 : 2차 함수,
설계변수의 변동 : 1.0

$$p(x) = 0.75 \cdot \{x - (m - 1)\} \cdot \{x - (m + 1)\};$$

$$m - 1 < x < m + 1 \quad (21)$$

- (iii) 설계변수의 확률분포 : 1(상수),
설계변수의 변동 : 0.5

$$p(x) = -1; m - 0.5 < x < m + 0.5 \quad (22)$$

- (iv) 설계변수의 확률분포 : 0.5(상수),
설계변수의 변동 : 1.0

$$p(x) = 0.5; m - 1 < x < m + 1 \quad (23)$$

여기서, m 은 설계변수의 설계점을 나타내며 각 확률밀도함수는 다음식을 만족하고 있다.

$$\int_{(m-\sigma)}^{(m+\sigma)} P(x) dx = 1 \quad (24)$$

각 경우에 대한 결과값과 일반 최적설계값과의 비교를 Table 8에 표시하였으며 각 경우별 그래프 형상의 변화를 Figs. 7~10에 표시하였다.

Table 8 및 Figs. 7~10의 결과를 검토해보면 강건설계해는 a 가 감소할수록 최적해보다 덜 민감한 방향으로 이동함을 알 수 있다. 특히 iv의 경우는 다른 방법보다 덜 민감한 방향으로 가장 많이 이동

Table 7 $\phi(x)$ value with varying weighting factor $\alpha(\Delta x=1.0)$

Exp. No.	α		1	0.75	0.5	0.25	0
	x_1	x_2					
1	1	1	116	1.985E+51	3.97E+51	5.966E+51	7.94E+50
2	1	2	24.5	1.985E+27	3.97E+27	5.966E+27	7.94E+26
3	1	3	24.34	7.900E+24	1.58E+02	2.37E+25	3.16E+24
4	1	4	30.45	3.125E+23	6.25E+23	9.375E+23	1.25E+23
5	1	5	39.2	1.985E+27	3.97E+27	5.955E+27	1.25E+22
6	2	1	23.0	1.985E+27	3.97E+27	5.955E+27	7.94E+26
7	2	2	17.7	229.517	441.335	653.152	864.97
8	2	3	18.6	17.112	15.625	14.137	12.65
9	2	4	20.29	24.965	29.640	34.315	38.99
10	2	5	22.52	37.925	53.330	68.735	84.14
11	3	1	22.57	7.9E+24	1.58E+25	2.37E+25	3.16E+24
12	3	2	21.66	20.117	18.575	17.032	15.49
13	3	3	22.14	20.870	19.600	18.330	17.06
14	3	4	22.9	20.730	18.560	16.390	14.22
15	3	5	23.89	20.730	18.560	16.390	14.22
16	4	1	28.58	3.15E+23	6.3E+23	9.45E+23	1.26E+23
17	4	2	28.35	30.945	33.54	36.135	38.73
18	4	3	29.63	31.175	33.54	36.135	38.81
19	4	4	29.06	30.955	32.85	34.745	36.64
20	4	5	29.62	30.667	31.71	32.762	33.81
21	5	1	37.28	3.125E+22	6.25E+22	9.375E+22	1.25E+22
22	5	2	37.22	44.095	50.97	57.845	64.72
23	5	3	37.41	44.122	50.83	57.547	64.26
24	5	4	37.68	43.962	50.24	56.527	62.81
25	5	5	38.04	43.732	49.42	55.117	60.81

한 것을 볼 수 있는데 이는 설계변수의 변동이 1.0 으로서 다른 방법보다 크거나 같으며 변동의 구간에서 변동이 일어날 확률이 같다는 이유에서 발생한 결과이다.

3.3 구조설계에의 적용

강건설계법의 공학적 의미부여 및 성능을 평가하

고자 구조 최적설계의 예제로 많이 사용되는 three-bar truss, ten-bar truss의 경우에 대하여 강건설계를 수행하였다. 각 문제에 대하여 절점에서의 변위와 각 부재에서의 응력을 제한조건으로 두었으며 먼저 기존의 최적화기법을 이용하여 최적해를 찾고^(13,14) 그 주위에서의 불연속값을 규격집⁽¹⁵⁾으로부터 선택하여 배치하였다. 본 예제에서는 관심있는 절

Table 8 $\phi(x)$ value with varying weighting factor α

Case α	i	ii	iii	iv
1	2.453	2.453	2.453	2.453
0.75	2.455	2.573	2.491	2.625
0.5	2.457	2.632	2.512	2.688
0.25	2.459	2.667	2.524	2.723
0	2.460	2.693	2.534	2.747

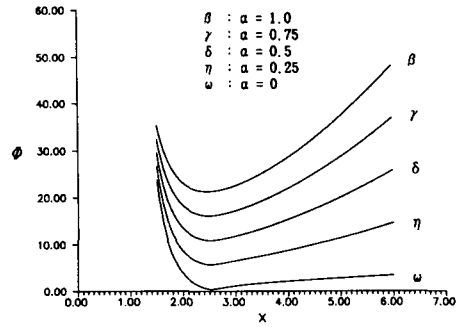


Fig. 9 Graph of pseudo-objective function, case iii

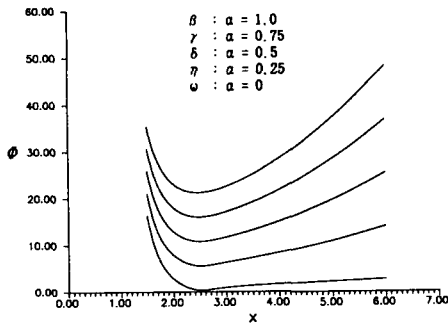


Fig. 7 Graph of pseudo-objective function, case i

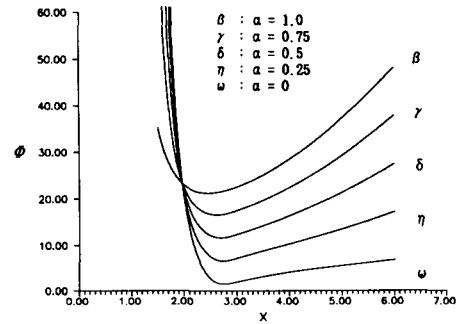


Fig. 10 Graph of pseudo-objective function, case iv

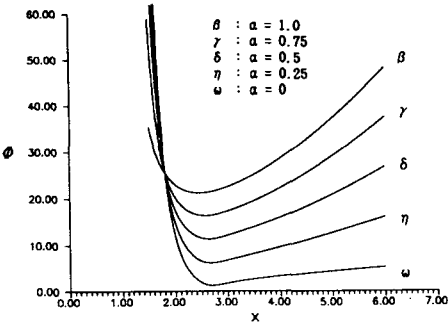


Fig. 8 Graph of pseudo-objective function, case ii

Table 9 Factors and their levels

Level Factor	1	2	3	4
A ₁	14.7	17.1	20.6	25.9
A ₂	1.21	1.67	1.97	2.99
A ₃	2.40	2.64	2.79	2.94

점에서의 변위에 가장 강건한 설계변수의 해를 찾는데 그 의미가 있다. 이 경우 가목적함수에서 α 는 0으로 하였으며 σ_x 는 x , y 방향의 절대변위에 대한 표준편차를 의미한다. 그러나 본 연구에서 제안된 강건설계법은 제한조건이 없는 경우에 한하여 사용되어야 하므로 강건설계의 해가 제한조건을 반드시 만족시킨다는 보장은 할 수가 없다.

3.3.1 Three-bar Truss

Fig. 7과 같이 주어진 하중조건에서 최적설계의

해는 $A_1=16.67$, $A_2=1.0$, $A_3=2.533$ 이며, 최적해 주위에서의 불연속 값의 배치는 Table 9와 같고 제한조건 및 문제의 수식화는 설계변수의 하한값(lower bound)이 1.0, 하중의 크기가 50,000인 것을 제외하면 참고문헌⁽¹³⁾의 case 5와 동일하다. 본 예제에서는 Fig. 7의 절점 A의 변위에 강건한 설계변수의 값을 찾고자 하는 것이다. 직교배열표로는 내측배열의 경우 직교배열표 $L_{16}(4^5)$, 외측배열의 경우는 $L_9(3^4)$ 을 사용하였다. 또한 외측배열의 사용시 A_1 은 1.0, A_2 는 0.1, A_3 는 0.01의 변

Table 10 Comparison of sensitivities between optimal design and robust design($\times 10^{-4}$)

	A ₁		A ₂		A ₃	
	Z _{x1}	Z _{y1}	Z _{x2}	Z _{y2}	Z _{x3}	Z _{y3}
Opt. design	2.90	1.86	5.75	7.81	2.90	2.68
Rob. design	1.35	0.57	1.91	2.39	2.35	2.04

$(Z_{x1}=|\partial u_x/\partial A_1|, Z_{y1}=|\partial u_y/\partial A_1|)$

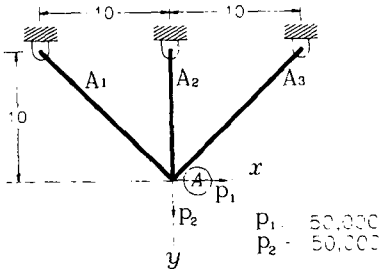


Fig. 11 Three-bar truss

Table 11 Factors and their levels

Factor Level	A ₁	A ₃	A ₄	A ₇	A ₈	A ₉
1	27.7	22.6	14.7	6.16	20.8	20.8
2	35.1	24.1	15.6	7.69	22.6	22.6
3	38.9	25.6	16.8	8.25	24.1	24.1

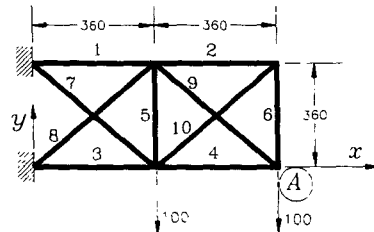


Fig. 12 Ten-bar truss

Table 12 Comparison of sensitivities between optimal design and robust design($\times 10^{-5}$)

	A ₁		A ₃		A ₄		A ₇		A ₈		A ₉	
	Z _{x1}	Z _{y1}	Z _{x3}	Z _{y3}	Z _{x4}	Z _{y4}	Z _{x7}	Z _{y7}	Z _{x8}	Z _{y8}	Z _{x9}	Z _{y9}
Opt. design	2.818	1599	1308	1531	1543	1531	61.91	405.1	8.100	2272	1.327	2163
Rob. design	1.534	955	1080	1104	1278	1269	53.21	322.3	5.732	1768	0.969	1744

$(Z_{x1}=|\partial u_x/\partial A_1|, Z_{y1}=|\partial u_y/\partial A_1|)$

등을 주어 3수준으로 배치하였다. 강건설계의 해는 A₁은 4수준, A₂는 4수준, A₃는 4수준으로 구해졌으며 강건설계와 최적설계의 해의 민감도 비교는 Table 10에 나타나 있고, Z_{xi}, Z_{yi}는 x, y방향의 설계변수 i에 대한 민감도를 의미한다. 여기서, 민감도 비교가 가능한 이유는 최적화 문제 자체가 제한조건이 없는 문제라면 최적값에서 민감도가 0이 되므로 의미가 없지만 이 예제에서는 제한조건이 있는 문제의 후처리로 사용되었기 때문에 의미가 있다. Table 10으로부터 강건설계의 결과가 최적설계의 결과보다 민감도가 18~69% 정도 감소함을 알 수 있다.

3.3.2 Ten-bar Truss

Fig. 8과 같이 주어진 하중조건에서 최적설계의 최적해는 A₁=30.52, A₂=0.1, A₃=23.20, A₄=

15.22, A₅=0.1, A₆=0.55, A₇=7.46, A₈=21.53, A₉=21.53, A₁₀=0.1이며 최적해 주위에서의 불연속 값의 배치는 Table 11과 같다. 최적설계시 설계변수의 한한치 값을 최적값으로 취한 설계변수 A₂, A₅, A₁₀과 이와 유사한 값을 취한 A₆은 상수로 취급하였으며 제한조건 및 문제의 수식화는 참고문헌⁽¹⁴⁾에 나와 있다. 본 예제에서는 Fig. 8의 절점 A의 변위에 강건한 설계변수의 값을 찾고자 하는 것이다. 강건설계의 해는 내측·외측배열에 직교배열표 L₁₈(2¹×3⁷)를 사용하였으며 외측배열을 배치할 때 각 설계변수의 변동은 0.5로 동일하게 주었다. 강건설계의 해는 A₁은 3수준, A₃은 3수준, A₇은 2수준, A₈은 3수준, A₉은 3수준으로 구해졌다. 강건설계와 최적설계의 해의 민감도 비교를 Table 12에 표시하였으며 three-bar truss와 마찬가지로 강건설계해의 민감도가 14~45% 정도

감소하였다.

4. 결 론

본 연구에서는 제한조건이 없는 최적설계 문제에서 설계변수의 잡음에 강건하면서 목적함수의 성능을 개선시키는 최적해를 찾기 위하여 강건설계의 방법을 제시하였으며 수치적 예제로 타당성을 검토하였다. 본 연구의 주요한 결과는 다음과 같다.

(1) 최적설계의 수행시 설계변수 뿐만 아니라 잡음인자의 고려도 가능하게 되었으며 이에 의한 강건설계의 수행이 가능하게 되었다. 예를 들면 구조설계 문제에서 공칭값으로부터 상한값, 하한값을 고려한 공차를 잡음으로 고려함으로써 강건설계가 가능하였다.

(2) 기존의 최적설계의 후처리로서 강건한 불연속값을 결정하는 것이 가능하게 되어 구조설계와 같은 실제문제에 적용할 수 있게 하였다.

(3) 강건설계시 분산과 민감도와의 관계를 수학적으로 명시하였다.

(4) 구조설계 문제에 적용하여 관심있는 특성치에 대해 강건한 설계를 얻었으며 three-bar, ten-bar truss의 제한된 예제의 경우이지만 민감도가 최소 14%에서 최고 69%까지 감소하였다.

참고문헌

- (1) Phadke, M. S., 1989, *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall.
- (2) Taguchi, G., 1987, *System of Experimental Design*, Unipub, Kraus International Publications.
- (3) 朴聖炫, 1990, "應用實驗計劃法," 民英社.
- (4) Ross, P. J., 1988, *Taguchi Techniques for Quality Engineering*, McGraw-Hill.
- (5) Belegundu, A. D. and Zhang, S., 1992, "Robustness of Design Through Minimum Sensitivity," *ASME*, Vol. 114, pp. 213~217.
- (6) 황우정, 박경진, 이완익, 1992, "구조 최적설계 후처리시 다투지법의 직교배열표 이용방법," 한양대학교1 산업과학연구소 논문집, No. 34, pp. 119~130.
- (7) Ramakrishnan, B. & Rao, S. S., 1991, "A Robust Optimization Approach Using Taguchi's Loss Function for Solving Nonlinear Optimization Problems," *ASME*, Vol. 1, pp. 241~248.
- (8) G. J., Park, W. J., Hwang, and W. I., Lee, 1994, "Structural Optimization Post-Process Using Taguchi Method," *JSME*, Series A, Vol. 37, pp. 166~172.
- (9) 엄인섭, 1993, "제한조건이 없는 최적화 문제에서의 둔감설계방법에 관한 연구," 한양대학교 석사학위 청구논문.
- (10) 엄인섭, 이권희, 박경진, 이완익, 1993, "제한조건이 없는 최적화 문제의 둔감설계에 관한 연구," 대한기계학회 추계학술대회 논문집(1), pp. 501~504.
- (11) Mood, A. M., Grabill, F. A. & Boes, D. C., 1974, "Introduction to the Theory of Statistics," McGraw-Hill.
- (12) Reklaitis, G. V., Ravindran, A. & Ragsdell, K. M., 1983, *Engineering Optimization Methods and Applications*, John Wiley and Sons, pp. 123~124.
- (13) Arora, J. S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill.
- (14) Arora, J. S. and Thanedar, P. B., 1985, *User's Manual for Truss Design Problems with IDESIGN 3.3*, Optimal Design Laboratory, The Univ. of Iowa.
- (15) Popov, E. P., 1990, *Engineering Mechanics of Solids*, Prentice Hall, pp. A-5-A-8.